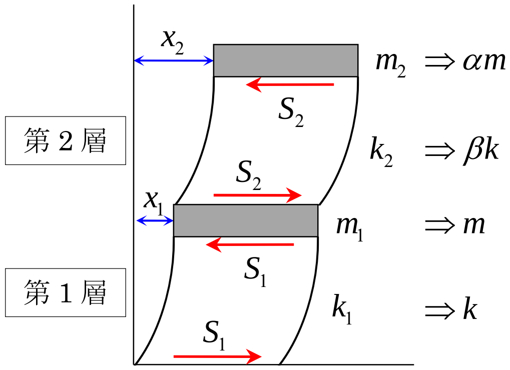
２自由度系の自由振動(free vibration)

１．振動方程式の作成



右図に示すような２層建物は床の剛性が大きい場合、簡単のため１階の水平変位 x_1 と２階の水平変位 x_2 の２つの**自由度**(degree of freedom)をもち、２自由度の振動系とみなす。第１層の柱と第２層の柱がバネとして働く。いま、各層の上半分が上側の床と一緒に運動し、下半分が下側の床と一緒に運動するものとして柱の質量を第１層および第２層の床の質量に付加し、それぞれの床の質量を m_1，m_2 とする。第１層の柱のバネ定数を k_1，第２層の柱のバネ定数を k_2 とすれば、第１層のせん断力は k_1x_1 であり、第２層のせん断力は $k_2(x_2-x_1)$ である。

したがって、各層の運動方程式は次のようになる。

第１層　$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$　………(1)

第２層　$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1)$　………(2)

両辺を整理すれば、次のような連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

いま、これをマトリクス・ベクトル表示すると、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(3)'$$

さらに、$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$: **質量マトリクス**(mass matrix), $[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$: **剛性マトリクス**(stiffness matrix)（※対称マトリクス），$\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$: 変位ベクトルとおくと、次のように表される。

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\} \qquad \cdots\cdots\cdots(3)''$$

ここで、剛性マトリクスを $[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ とすると、

(3)'式は、$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$、(3)式は、$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0 \end{cases}$ と表される。

２．振動方程式の解

減衰のない振動系は、変位が**調和振動**(harmonic vibration)で表されるような時間関数をもつことは明らかだから、

$$\begin{cases} x_1 = X_1e^{i\omega t} \\ x_2 = X_2e^{i\omega t} \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

と仮定する。式(4)を式(3)に代入し、$e^{i\omega t}$ を分離すれば、次のようになる。

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = m_1\left(-\omega^2X_1e^{i\omega t}\right) + k_{11}\left(X_1e^{i\omega t}\right) + k_{12}\left(X_2e^{i\omega t}\right) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = m_2\left(-\omega^2X_2e^{i\omega t}\right)\ddot{x}_2 + k_{21}\left(X_1e^{i\omega t}\right) + k_{22}\left(X_2e^{i\omega t}\right) = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \left[\left(k_{11} - \omega^2m_1\right)X_1 + k_{12}X_2\right]\cdot e^{i\omega t} = 0 \\ \left[k_{21}X_1 + \left(k_{22} - \omega^2m_2\right)X_2\right]\cdot e^{i\omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(k_{11} - \omega^2m_1\right)X_1 + k_{12}X_2 = 0 \\ k_{21}X_1 + \left(k_{22} - \omega^2m_2\right)X_2 = 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

この式は X_1, X_2 に関する同次方程式であるから、X_1, X_2 が同時に 0 でない解（有義解）をもつためには、その係数の行列式の値が 0 でなければならない。すなわち、

$$\begin{vmatrix} \left(k_{11}-\omega^2 m_1\right) & k_{12} \\ k_{21} & \left(k_{22}-\omega^2 m_2\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

行列式を展開すると、ω^2 に関する 2 次方程式が得られる。

$$\left(k_{11}-\omega^2 m_1\right)\left(k_{22}-\omega^2 m_2\right)-k_{12}k_{21}=0 \quad \therefore m_1m_2\left(\omega^2\right)^2-\left(k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)\left(\omega^2\right)+k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}=0$$

$$\therefore \left(\omega^2\right)^2-\frac{k_{11}m_2+k_{22}m_1}{m_1m_2}\left(\omega^2\right)+\frac{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}{m_1m_2}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(6)'$$

この式は、この振動系の**固有円振動数**(natural circular frequency)ω を求める方程式であるから、**振動数方程式**(frequency equation)といわれる。

式(6)'の判別式を求めると、次のようになる。

$$\frac{D}{m_1^2m_2^2}=(k_{11}m_2+k_{22}m_1)^2-4m_1m_2(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})=(k_{11}m_2-k_{22}m_1)^2+4m_1m_2k_{12}k_{21}>0 \quad (\because k_{12}=k_{21}\neq 0)$$

したがって、式(6)'を満足する ω^2 の値は、次のように 2 つあり、いずれも正の実根である。

$$\omega^2=\frac{1}{2}\left\{\frac{k_{11}m_2+k_{22}m_1}{m_1m_2}\mp\sqrt{\left(\frac{k_{11}m_2+k_{22}m_1}{m_1m_2}\right)^2-4\frac{k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}}{m_1m_2}}\right\}=\frac{1}{2m_1m_2}\left\{\left(k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)\mp\sqrt{D}\right\}$$

$$\therefore \omega^2=\frac{1}{2m_1m_2}\left\{\left(k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)\mp\sqrt{\left(k_{11}m_2-k_{22}m_1\right)^2+4m_1m_2k_{12}k_{21}}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

いま、これを小さい方から ω_1^2, ω_2^2 とすれば、固有円振動数はその平方根のうち正のみの値をとって、ω_1, ω_2 となる。このとき、**固有周期**(natural period)は、

$$T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}, \quad T_2=\frac{2\pi}{\omega_2} \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

の 2 通りが得られる。$T_1>T_2$ であり、T_1 を**1次の固有周期**または**基本振動周期**(fundamental period of vibration)といい、T_2 を**2次の固有周期**という。**固有振動数**(natural frequency)は、

$$f_1=\frac{1}{T_1}=\frac{\omega_1}{2\pi}, \quad f_2=\frac{1}{T_2}=\frac{\omega_2}{2\pi} \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

である。ω_1, ω_2 に相当する振動をこの系の**基準振動**(normal vibration)という。

次に、式(5)より X_1 と X_2 の比を求めると、

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{k_{11}-\omega^2m_1}{-k_{12}}=\frac{-k_{21}}{k_{22}-\omega^2m_2} \qquad \cdots\cdots\cdots(10)$$

【式(10)の確認】

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{k_{11}-\omega^2m_1}{-k_{12}}=\frac{k_{11}-\frac{1}{2m_2}\left\{\left(k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)\mp\sqrt{D}\right\}}{-k_{12}}=-\frac{k_{11}}{k_{12}}+\frac{1}{2m_2k_{12}}\left\{\left(k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)\mp\sqrt{D}\right\}$$

$$=\frac{1}{2m_2k_{12}}\left[-2k_{11}m_2+\left\{\left(k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)\mp\sqrt{D}\right\}\right]=\frac{1}{2m_2k_{12}}\left\{\left(-k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)\mp\sqrt{D}\right\}$$

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{-k_{21}}{k_{22}-\omega^2m_2}=\frac{-k_{21}}{k_{22}-\frac{1}{2m_1}\left\{\left(k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)\mp\sqrt{D}\right\}}=\frac{-2m_1k_{21}}{\left(-k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)\pm\sqrt{D}}$$

$$=\frac{-2m_1k_{21}\left\{\left(-k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)\mp\sqrt{D}\right\}}{\left(-k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)^2-D}=\frac{-2m_1k_{21}\left\{\left(-k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)\mp\sqrt{D}\right\}}{\left(k_{11}m_2-k_{22}m_1\right)^2-\left\{\left(k_{11}m_2-k_{22}m_1\right)^2+4m_1m_2k_{12}k_{21}\right\}}$$

$$=\frac{-2m_1k_{21}\left\{\left(-k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)\mp\sqrt{D}\right\}}{-4m_1m_2k_{12}k_{21}}=\frac{1}{2m_2k_{12}}\left\{\left(-k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)\mp\sqrt{D}\right\}$$

となり、この式(10)の ω^2 に ω_1^2 を入れると、

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{k_{11}-\omega_1^2 m_1}{-k_{12}}=\frac{1}{2m_2k_{12}}\left\{\left(-k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)-\sqrt{D}\right\}$$

$$=\frac{-1}{2m_2k_{12}}\left\{\left(k_{11}m_2-k_{22}m_1\right)+\sqrt{\left(k_{11}m_2-k_{22}m_1\right)^2+4m_1m_2k_{12}k_{21}}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(11)$$

$$=\frac{X_{21}}{X_{11}}=r_1 \qquad \left(\because k_{12}<0\right)$$

が得られ、ω_2^2を代入すると、

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{k_{11}-\omega_2^2 m_1}{-k_{12}}=\frac{1}{2m_2k_{12}}\left\{\left(-k_{11}m_2+k_{22}m_1\right)+\sqrt{D}\right\}$$

$$=\frac{1}{2m_2k_{12}}\left\{\sqrt{\left(k_{11}m_2-k_{22}m_1\right)^2+4m_1m_2k_{12}k_{21}}-\left(k_{11}m_2-k_{22}m_1\right)\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(12)$$

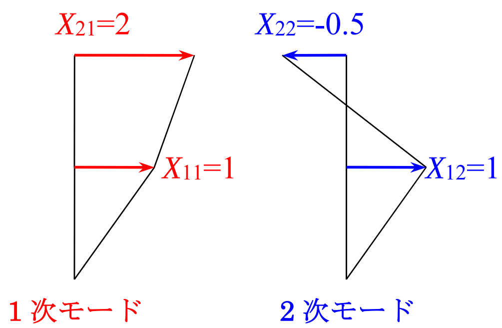
$$=\frac{X_{22}}{X_{12}}=-r_2 \qquad \left(\because k_{12}<0\right)$$

が得られる。この比の値はそれぞれ１次および２次の振動における第１層と第２層の変位の比であり、**基準振動形（基準変位モード）**(normal mode of vibration)または**固有振動形**と呼ばれ、ω_1^2に対応するものを１次振動形(1 次モード)，ω_2^2に対応するものを２次振動形(2 次モード)という。振動形は変位の比であるから、第１層を１としてもよく、第２層を１としてもよく、また最大値を１としてもよい。

右図は第 1 層を 1 として表した基準振動形で、一般に、2 層ラーメンの 1 次振動では 1,2 層の変位が同じ側に、2 次振動では 1,2 層の変位が互いに反対側に生じ、X_{12}を〝正〟(＋,プラス)にとればX_{22}は〝負〟(－,マイナス)となる。

振動形は無次元でもよく、また、長さの単位をもたせてもよいが、次式のような単位および大きさをもたせる場合もある。

$$\sum_{i=1}^{2} m_i X_{is}^2=1 \quad \left(s=1,2\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(13)$$



振動モード（振動形）

これを**正規化振動形**(normalized mode of vibration)という。

一般には、各層の振動は 1 次と 2 次の振動の和として次の式で表される。

$$\begin{aligned} x_1&=X_{11}\left(A_1\cos\omega_1 t+B_1\sin\omega_1 t\right)+X_{12}\left(A_2\cos\omega_2 t+B_2\sin\omega_2 t\right)\\ x_2&=X_{21}\left(A_1\cos\omega_1 t+B_1\sin\omega_1 t\right)+X_{22}\left(A_2\cos\omega_2 t+B_2\sin\omega_2 t\right)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots(14)$$

または、

$$\begin{aligned} x_1&=X_{11}C_1\cos\left(\omega_1 t-\phi_1\right)+X_{12}C_2\cos\left(\omega_2 t-\phi_2\right)\\ x_2&=X_{21}C_1\cos\left(\omega_1 t-\phi_1\right)+X_{22}C_2\cos\left(\omega_2 t-\phi_2\right)\\ &=r_1X_{11}C_1\cos\left(\omega_1 t-\phi_1\right)-r_2X_{12}C_2\cos\left(\omega_2 t-\phi_2\right)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots(14)'$$

任意定数（積分定数）A_1，B_1，A_2，B_2またはC_1，C_2，ϕ_1，ϕ_2は初期条件より決定され、両者の間には関係がある。

式(14)'の第 1 式を変形して、式(14)の第 1 式と比べると、

$$\begin{aligned} x_1&=X_{11}C_1\cos\left(\omega_1 t-\phi_1\right)+X_{12}C_2\cos\left(\omega_2 t-\phi_2\right)\\ &=X_{11}C_1\left(\cos\omega_1 t\cdot\cos\phi_1+\sin\omega_1 t\cdot\sin\phi_1\right)+X_{12}C_2\left(\cos\omega_2 t\cdot\cos\phi_2+\sin\omega_1 t\cdot\sin\phi_2\right)\\ &=X_{11}\left(C_1\cos\phi_1\cdot\cos\omega_1 t+C_1\sin\phi_1\cdot\sin\omega_1 t\right)+X_{12}\left(C_2\cos\phi_2\cdot\cos\omega_2 t+C_2\sin\phi_2\cdot\sin\omega_1 t\right)\\ &=X_{11}\left(A_1\cos\omega_1 t+B_1\sin\omega_1 t\right)+X_{12}\left(A_2\cos\omega_2 t+B_2\sin\omega_2 t\right)\end{aligned}$$

となるから、係数を比較することにより、次の関係が得られる。

$$\begin{cases} C_1\cos\phi_1 = A_1 \\ C_1\sin\phi_1 = B_1 \\ C_2\cos\phi_2 = A_2 \\ C_2\sin\phi_2 = B_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad \tan\phi_1 = \dfrac{B_1}{A_1} \\ C_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}, \quad \tan\phi_2 = \dfrac{B_2}{A_2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(15)$$

式(14)'から明らかなように、x_1 および x_2 は２つの**単弦振動**(simple harmonic vibration)の和として表され、それらの単弦振動においては、x_1 も x_2 も共通の周期と位相をもち、両振幅の比が常に一定であることがわかる。

一般に、2 自由度以上の自由度をもつ振動系においては、各質点が単独の振動を行わず、互いに他の質点の運動と相互に関係を保ちつつ振動する。このような振動を**連成振動**(coupled vibration)という。しかし、多自由度系においても構造形式によっては連成しない場合もある。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝≪**２．振動方程式の解【補遺】**≫＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

前記の式の誘導(5)～(12)は、(3)式を$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 = 0 \end{cases}$として行ったが、

ここでは、(3)式を$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + \left(k_1 + k_2\right)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases}$として行うことにする。

式(4)を式(3)に代入し、$e^{i\omega t}$を分離すれば、次のようになる。

$$\begin{cases} \left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)X_1 - k_2X_2 = 0 \\ -k_2X_1 + \left(k_2 - \omega^2 m_2\right)X_2 = 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

この式はX_1，X_2に関する同次方程式であるから、X_1，X_2が同時に0でない解（有義解）をもつためには、その係数の行列式の値が0でなければならない。すなわち、

$$\begin{vmatrix} \left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right) & -k_2 \\ -k_2 & \left(k_2 - \omega^2 m_2\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

行列式を展開すると、ω^2に関する2次方程式が得られる。

$$\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)\left(k_2 - \omega^2 m_2\right) - \left(-k_2\right)\left(-k_2\right) = 0 \quad \therefore m_1m_2\left(\omega^2\right)^2 - \left\{m_1k_2 + m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\}\left(\omega^2\right) + k_2\left(k_1 + k_2\right) - k_2^2 = 0$$

$$\therefore m_1m_2\left(\omega^2\right)^2 - \left\{m_1k_2 + m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\}\left(\omega^2\right) + k_1k_2 = 0$$

$$\therefore \left(\omega^2\right)^2 - \frac{m_1k_2 + m_2\left(k_1 + k_2\right)}{m_1m_2}\left(\omega^2\right) + \frac{k_1k_2}{m_1m_2} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(6)'$$

式(6)'の判別式を求めると、次のようになる。

$$D = \frac{\left\{m_1k_2 + m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\}^2 - 4m_1m_2k_1k_2}{m_1^2m_2^2} \qquad \therefore m_1^2m_2^2D = \left\{m_1k_2 - m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\}^2 - 4m_1m_2k_1k_2 + 4m_1m_2k_2\left(k_1 + k_2\right)$$

$$= \left\{m_1k_2 - m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\}^2 + 4m_1m_2k_2^2 > 0$$

したがって、式(6)'を満足するω^2の値は、次のように2つあり、いずれも正の実根である。

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{m_1k_2 + m_2\left(k_1 + k_2\right)}{m_1m_2} \mp \sqrt{D}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{m_1k_2 + m_2\left(k_1 + k_2\right)}{m_1m_2} \mp \sqrt{\frac{\left\{m_1k_2 - m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\}^2 + 4m_1m_2k_2^2}{m_1^2m_2^2}}\right\}$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{1}{2m_1m_2}\left[\left\{m_1k_2 + m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\} \mp \sqrt{\left\{m_1k_2 - m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\}^2 + 4m_1m_2k_2^2}\right] \cdots\cdots\cdots(7)$$

いま、(5)式を(5)a式と(5)b式に分け、まず、(5)a式に固有円振動数ω^2を代入して、式を変形すると、次のようになる。

$$\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right)X_1 - k_2X_2 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(5)\text{a}$$

$$k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 = k_1 + k_2 - \frac{1}{2m_1m_2}\left[\left\{m_1k_2 + m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\} \mp \sqrt{\left\{m_1k_2 - m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\}^2 + 4m_1m_2k_2^2}\right] \cdot m_1$$

$$= k_1 + k_2 - \frac{1}{2m_2}\left[\left\{m_1k_2 + m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\} \mp \sqrt{\left\{m_1k_2 - m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\}^2 + 4m_1m_2k_2^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2m_2}\left[2m_2k_1 + 2m_2k_2 - \left\{m_1k_2 + m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\} \pm \sqrt{\left\{m_1k_2 - m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\}^2 + 4m_1m_2k_2^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2m_2}\left[-\left\{m_1k_2 - m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\} \pm \sqrt{\left\{m_1k_2 - m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\}^2 + 4m_1m_2k_2^2}\right]$$

$$\therefore \frac{1}{2m_2}\left[-\left\{m_1k_2 - m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\} \pm \sqrt{\left\{m_1k_2 - m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\}^2 + 4m_1m_2k_2^2}\right] \cdot X_1 - k_2X_2 = 0$$

$$\therefore \left[-\left\{m_1k_2 - m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\} \pm \sqrt{\left\{m_1k_2 - m_2\left(k_1 + k_2\right)\right\}^2 + 4m_1m_2k_2^2}\right] \cdot X_1 - 2m_2k_2 \cdot X_2 = 0$$

ここで、±を＋と－に分けて、変形する。

【＋の場合】

$$\left[-\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}+\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]\cdot X_1-2m_2k_2\cdot X_2=0$$

$$\therefore\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2-\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2\right]\cdot X_1$$

$$-2m_2k_2\cdot\left[+\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}+\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]\cdot X_2=0$$

$$\therefore 4m_1m_2k_2^2\cdot X_1-2m_2k_2\cdot\left[+\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}+\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]\cdot X_2=0$$

$$\therefore 2m_1k_2\cdot X_1-\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}+\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]\cdot X_2=0$$

【－の場合】

$$-\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}+\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]\cdot X_1-2m_2k_2\cdot X_2=0$$

$$\therefore-\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2-\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2-4m_1m_2k_2^2\right]\cdot X_1$$

$$-2m_2k_2\cdot\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}-\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]\cdot X_2=0$$

$$\therefore 2m_1k_2\cdot X_1-\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}-\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]\cdot X_2=0$$

＋と－の場合を統合すると、

$$2m_1k_2\cdot X_1-\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\pm\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]\cdot X_2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(5)a'$$

また、(5)b 式に固有円振動数 ω^2 を代入して、式を変形すると、次のようになる。

$$-k_2X_1+\left(k_2-\omega^2m_2\right)X_2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(5)b$$

$$k_2-\omega^2m_2=k_2-\frac{1}{2m_1m_2}\left[\left\{m_1k_2+m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\mp\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]\cdot m_2$$

$$=k_2-\frac{1}{2m_1}\left[\left\{m_1k_2+m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\mp\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2m_1}\left[2m_1k_2-\left\{m_1k_2+m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\pm\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2m_1}\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\pm\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]$$

$$\therefore -k_2X_1+\frac{1}{2m_1}\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\pm\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]\cdot X_2=0$$

$$2m_1k_2\cdot X_1-\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\pm\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]\cdot X_2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(5)b'$$

(5)a 式と(5)b 式は、全く同一な式となることがわかる。これは、(5)式において、X_1，X_2 が同時に 0 でない解（有義解）をもつためには、連立方程式は〝不定形〟になることを意味し、X_1，X_2 は比の形でしか求まらないことを示している。

そこで、式(5)より X_1 と X_2 の比を求めると、

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{k_1+k_2-\omega^2m_1}{k_2}=\frac{k_2}{k_2-\omega^2m_2} \qquad \cdots\cdots\cdots(10)$$

【式(10)の確認】

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{k_1+k_2-\omega^2m_1}{k_2}=\frac{\dfrac{1}{2m_2}\left[-\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\pm\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]}{k_2}$$

$$=\frac{-\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\pm\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}}{2m_2k_2}$$

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{k_2}{k_2-\omega^2 m_2}=\frac{k_2}{\frac{1}{2m_1}\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\pm\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]}$$

$$=\frac{2m_1k_2}{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\pm\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}}$$

$$=\frac{2m_1k_2\cdot\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\mp\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]}{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2-\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2\right]}$$

$$=\frac{2m_1k_2\cdot\left[\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\mp\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]}{-4m_1m_2k_2^2}$$

$$=\frac{-\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}\pm\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}}{2m_2k_2}$$

となり、この式(10)のω^2にω_1^2を入れると、

$$\begin{aligned}\frac{X_2}{X_1}&=\frac{k_1+k_2-\omega_1^2m_1}{k_2}\\&=\frac{k_1+k_2-\frac{1}{2m_1m_2}\left[\left\{m_1k_2+m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}-\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]\cdot m_1}{k_2}\\&=\frac{2m_2\left(k_1+k_2\right)-\left[\left\{m_1k_2+m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}-\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]}{2m_2k_2}\\&=\frac{1}{2m_2k_2}\left[-\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}+\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]=\frac{X_{21}}{X_{11}}=r_1\left(>0\right)\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots(11)$$

が得られ、ω_2^2を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{X_2}{X_1}&=\frac{k_1+k_2-\omega_2^2m_1}{k_2}\\&=\frac{k_1+k_2-\frac{1}{2m_1m_2}\left[\left\{m_1k_2+m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}+\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]\cdot m_1}{k_2}\\&=\frac{2m_2\left(k_1+k_2\right)-\left[\left\{m_1k_2+m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}+\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]}{2m_2k_2}\\&=\frac{1}{2m_2k_2}\left[-\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}-\sqrt{\left\{m_1k_2-m_2\left(k_1+k_2\right)\right\}^2+4m_1m_2k_2^2}\right]=\frac{X_{22}}{X_{12}}=r_2\left(<0\right)\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots(12)$$

が得られる。

==

==============================【計算例】==============================

ここで、$\begin{cases} m_1 = m \\ m_2 = \alpha\, m \end{cases}$，$\begin{cases} k_1 = k \\ k_2 = \beta k \end{cases}$ とすると、$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + \beta k(x_2 - x_1) \\ \alpha m\ddot{x}_2 = -\beta k(x_2 - x_1) \end{cases}$ より、$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (1+\beta)kx_1 - \beta kx_2 = 0 \\ \alpha m\ddot{x}_2 - \beta kx_1 + \beta kx_2 = 0 \end{cases}$

となり、また、$\begin{cases} k_{11} = k_1 + k_2 = (1+\beta)k \\ k_{22} = \beta k \\ k_{12} = k_{21} = -\beta k \end{cases}$ であるから、振動数方程式は、次のようになる。

$$\omega^4 - \frac{(1+\beta)k\cdot\alpha\, m + \beta\, k\cdot m}{\alpha\, m^2}\omega^2 + \frac{(1+\beta)k\cdot\beta\, k - \beta^2k^2}{\alpha\, m^2} = 0 \quad \therefore \omega^4 - \frac{\{(1+\beta)\alpha + \beta\}k}{\alpha\, m}\omega^2 + \frac{\beta\, k^2}{\alpha\, m^2} = 0$$

$$\omega^4 - \left\{(1+\beta) + \frac{\beta}{\alpha}\right\}\left(\frac{k}{m}\right)\omega^2 + \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

ここで、$\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ とおくと、　$\omega^4 - \left(1+\beta+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\omega_0^2\omega^2 + \dfrac{\beta}{\alpha}\omega_0^4 = 0$

この式の判別式を求めると、次のようになる。

$$\frac{D}{\omega_0^4} = \left(1+\beta+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 4\frac{\beta}{\alpha} = (1+\beta)^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}(1+\beta) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 4\frac{\beta}{\alpha}$$

$$= \left\{(1-\beta)^2 + 4\beta\right\} - 2\frac{\beta}{\alpha}(1-\beta) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \left\{(1-\beta) - \frac{\beta}{\alpha}\right\}^2 + 4\beta > 0 \quad (\because \beta > 0)$$

　したがって、振動数方程式を満足する ω^2 の値は、2 つあり、いずれも正の実根である。いま、これを小さい方から ω_1^2，ω_2^2 とすれば、次のようになる。

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{2}\left\{\left(1+\beta+\frac{\beta}{\alpha}\right) - \sqrt{\left(1+\beta+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 4\frac{\beta}{\alpha}}\right\}, \quad \omega_2^2 = \frac{\omega_0^2}{2}\left\{\left(1+\beta+\frac{\beta}{\alpha}\right) + \sqrt{\left(1+\beta+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 4\frac{\beta}{\alpha}}\right\}$$

　次に、X_1 と X_2 の比を求めると、$\dfrac{X_2}{X_1} = \dfrac{(1+\beta)k - \omega^2 m}{\beta k} = \dfrac{\beta\, k}{\beta\, k - \omega^2\alpha\, m}$ となり、この式の ω^2 に ω_1^2 を入れると、

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{\beta k}{\beta k - \omega_1^2\alpha m} = \frac{1}{1 - \omega_1^2\dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{m}{k}} = \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} = \frac{X_{21}}{X_{11}} = r_1 \quad \therefore \frac{X_1}{X_2} = 1 - \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = \frac{X_{11}}{X_{21}} = \frac{1}{r_1}$$

が得られ、ω_2^2 を代入すると、

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{\beta k}{\beta k - \omega_2^2\alpha m} = \frac{1}{1 - \omega_2^2\dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{m}{k}} = \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2} = \frac{X_{22}}{X_{12}} = -r_2 \quad \therefore \frac{X_1}{X_2} = 1 - \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 = \frac{X_{12}}{X_{22}} = -\frac{1}{r_2}$$

が得られる。例えば、$\alpha = \beta = 1$ の場合は、次のようになる。

$$\omega_1^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_0^2 \quad \therefore \omega_1 = \omega_0\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = 0.618033988\cdots\omega_0 \cong 0.62\omega_0$$

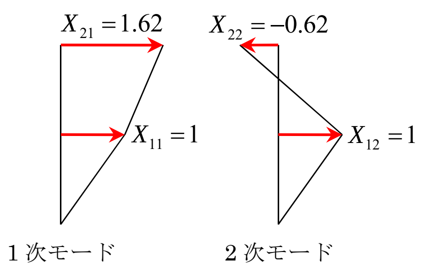
$$\frac{X_{11}}{X_{21}} = 1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618033988\cdots \cong 0.62$$

$$\frac{X_{21}}{X_{11}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033989\cdots \cong 1.62$$

$$\omega_2^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0^2 \quad \therefore \omega_2 = \omega_0\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = 1.618033989\cdots\omega_0 \cong 1..62\omega_0$$

$$\frac{X_{12}}{X_{22}} = 1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -1.618033989\cdots \cong -1.62$$

$$\frac{X_{22}}{X_{12}} = -\frac{2}{\sqrt{5}+1} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -0.618033988\cdots \cong -0.62$$



振動モード（振動形）

==

３．基準振動の直交性

２質点系の振動方程式において、１次の固有円振動数 ω_1 に対して、基準振動が

$$\begin{cases} x_1 = X_{11}C_1\cos(\omega_1 t-\phi_1) \\ x_2 = X_{21}C_1\cos(\omega_1 t-\phi_1) \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(16)$$

と得られたから、この式(16)を式(3)に代入して変形すると、

$$\begin{cases} (k_{11}-\omega_1^2 m_1)X_{11}+k_{12}X_{21}=0 \\ k_{21}X_{11}+(k_{22}-\omega_1^2 m_2)X_{21}=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(17)$$

となる。この式(17)において、その第１式に X_{12}，第２式に X_{22} を乗じて加えると、

$$(k_{11}-\omega_1^2 m_1)X_{11}X_{12}+(k_{22}-\omega_1^2 m_2)X_{21}X_{22}+k_{12}X_{21}X_{12}+k_{21}X_{11}X_{22}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(18)$$

全く同様に、２次の固有円振動数 ω_2 に対して、基準振動は

$$\begin{cases} x_1 = X_{12}C_2\cos(\omega_2 t-\phi_2) \\ x_2 = X_{22}C_2\cos(\omega_2 t-\phi_2) \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(19)$$

であり、この式(19)を式(3)に代入して変形すると、

$$\begin{cases} (k_{11}-\omega_2^2 m_1)X_{12}+k_{12}X_{22}=0 \\ k_{21}X_{12}+(k_{22}-\omega_2^2 m_2)X_{22}=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(20)$$

が得られるから、この式(20)において、その第１式に X_{11}，第２式に X_{21} を乗じて加えると、

$$(k_{11}-\omega_2^2 m_1)X_{11}X_{12}+(k_{22}-\omega_2^2 m_2)X_{21}X_{22}+k_{12}X_{22}X_{11}+k_{21}X_{12}X_{21}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(21)$$

式(21)より式(18)を減ずれば、$k_{12}=k_{21}$ であるから、次の式が得られる。

$$(k_{11}-\omega_1^2 m_1)X_{11}X_{12}+(k_{22}-\omega_1^2 m_2)X_{21}X_{22}+k_{12}X_{21}X_{12}+k_{21}X_{11}X_{22}$$

$$-(k_{11}-\omega_2^2 m_1)X_{11}X_{12}-(k_{22}-\omega_2^2 m_2)X_{21}X_{22}-k_{12}X_{22}X_{11}-k_{21}X_{12}X_{21}=0$$

$$\therefore (\omega_2^2-\omega_1^2)m_1X_{11}X_{12}+(\omega_2^2-\omega_1^2)m_2X_{21}X_{22}=0$$

$$\therefore (\omega_2^2-\omega_1^2)(m_1X_{11}X_{12}+m_2X_{21}X_{22})=0$$

ここで、$\omega_1^2 \neq \omega_2^2$ であるから、次の式が成立する。

$$m_1X_{11}X_{12}+m_2X_{21}X_{22}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(22)$$

すなわち、
$$\sum_i m_i X_{is}X_{ir}=0 \quad (r\neq s) \qquad \cdots\cdots\cdots(22)'$$

式(22)は、『ある振動系の振動次数が異なる２つの振動形の対応する質点の変位同士をかけ、これにその質点の質量をかけて、全質点について総和をとったものは０になる』ことを示している。この関係を**基準振動の直交性**(orthogonality)という。

式(18)を書き直すと、

$$(k_{11}-\omega_1^2 m_1)X_{11}X_{12}+(k_{22}-\omega_1^2 m_2)X_{21}X_{22}+k_{12}X_{21}X_{12}+k_{21}X_{11}X_{22}=0$$

$$\therefore -\omega_1^2(m_1X_{11}X_{12}+m_2X_{21}X_{22})+k_{11}X_{11}X_{12}+k_{12}X_{21}X_{12}+k_{21}X_{11}X_{22}+k_{22}X_{21}X_{22}=0$$

となり、これに式(22)の関係を用いると、次の式が得られる。

$$k_{11}X_{11}X_{12}+k_{12}X_{21}X_{12}+k_{21}X_{11}X_{22}+k_{22}X_{21}X_{22}=0$$

すなわち、
$$\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}k_{rs}X_{r2}X_{s1}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(23)$$

４．基準振動による初期条件の展開

２自由度系では、各質点に任意定数が２個となるから、合計４個の任意定数を含んだ自由振動の解が得られた。任意定数を初期条件から求める場合には一般に４元連立方程式となるが、それから任意定数 A_1，B_1，A_2，B_2 または C_1，C_2，ϕ_1，ϕ_2 を求めるよりも、基準振動の直交性を利用して求めると、各定数が単独に求められ、計算が簡単である。

いま、初期条件として各質点の変位と速度が、$t=0$：$\begin{cases} x_1 = x_{10}, & x_2 = x_{20} \\ \dot{x}_1 = \dot{x}_{10}, & \dot{x}_2 = \dot{x}_{20} \end{cases}$ のように与えられているものとすれば、式(14)から

$$\begin{cases} A_1 X_{11} + A_2 X_{12} = x_{10} \\ A_1 X_{21} + A_2 X_{22} = x_{20} \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(24)$$

$$\begin{cases} \omega_1 B_1 X_{11} + \omega_2 B_2 X_{12} = \dot{x}_{10} \\ \omega_1 B_1 X_{21} + \omega_2 B_2 X_{22} = \dot{x}_{20} \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(25)$$

式(24)の第１式に $m_1 X_{11}$，第２式に $m_2 X_{21}$ をかけて加えると、

$$m_1 A_1 X_{11}^2 + m_1 A_2 X_{12} X_{11} + m_2 A_1 X_{21}^2 + m_2 A_2 X_{22} X_{21} = m_1 X_{11} x_{10} + m_2 X_{21} x_{20}$$

$$\therefore A_1\left(m_1 X_{11}^2 + m_2 X_{21}^2\right) + A_2\left(m_1 X_{11} X_{12} + m_2 X_{21} X_{22}\right) = m_1 X_{11} x_{10} + m_2 X_{21} x_{20}$$

となるが、左辺第２項は基準振動の直交性より消失するから、

$$A_1\left(m_1 X_{11}^2 + m_2 X_{21}^2\right) = m_1 X_{11} x_{10} + m_2 X_{21} x_{20} \quad \therefore A_1 = \frac{m_1 X_{11} x_{10} + m_2 X_{21} x_{20}}{m_1 X_{11}^2 + m_2 X_{21}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i1} x_{i0}}{\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i1}^2}$$

全く同様にして、

式(24)の第１式に $m_1 X_{12}$，第２式に $m_2 X_{22}$ をかけて加えると、

$$m_1 A_1 X_{11} X_{12} + m_1 A_2 X_{12}^2 + m_2 A_1 X_{21} X_{22} + m_2 A_2 X_{22}^2 = m_1 X_{12} x_{10} + m_2 X_{22} x_{20}$$

$$\therefore A_1\left(m_1 X_{11} X_{12} + m_2 X_{21} X_{22}\right) + A_2(m_1 X_{12}^2 + m_2 X_{22}^2) = m_1 X_{12} x_{10} + m_2 X_{22} x_{20}$$

$$\therefore A_2 = \frac{m_1 X_{12} x_{10} + m_2 X_{22} x_{20}}{m_1 X_{12}^2 + m_2 X_{22}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i2} x_{i0}}{\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i2}^2}$$

式(25)の第１式に $m_1 X_{11}$，第２式に $m_2 X_{21}$ をかけて加えると、

$$\omega_1 m_1 B_1 X_{11}^2 + \omega_2 m_1 B_2 X_{11} X_{12} + \omega_1 m_2 B_1 X_{21}^2 + \omega_2 m_2 B_2 X_{21} X_{22} = m_1 X_{11} \dot{x}_{10} + m_2 X_{21} \dot{x}_{20}$$

$$\therefore \omega_1 B_1\left(m_1 X_{11}^2 + m_2 X_{21}^2\right) + \omega_2 B_2\left(m_1 X_{11} X_{12} + m_2 X_{21} X_{22}\right) = m_1 X_{11} \dot{x}_{10} + m_2 X_{21} \dot{x}_{20}$$

$$\therefore B_1 = \frac{m_1 X_{11} \dot{x}_{10} + m_2 X_{21} \dot{x}_{20}}{\omega_1\left(m_1 X_{11}^2 + m_2 X_{21}^2\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i1} \dot{x}_{i0}}{\omega_1 \sum_{i=1}^{2} m_i X_{i1}^2}$$

式(25)の第１式に $m_1 X_{12}$，第２式に $m_2 X_{22}$ をかけて加えると、

$$\omega_1 m_1 B_1 X_{11} X_{12} + \omega_2 m_1 B_2 X_{12}^2 + \omega_1 m_2 B_1 X_{21} X_{22} + \omega_2 m_2 B_2 X_{22}^2 = m_1 X_{12} \dot{x}_{10} + m_2 X_{22} \dot{x}_{20}$$

$$\therefore \omega_1 B_1\left(m_1 X_{11} X_{12} + m_2 X_{21} X_{22}\right) + \omega_2 B_2\left(m_1 X_{12}^2 + m_2 X_{22}^2\right) = m_1 X_{12} \dot{x}_{10} + m_2 X_{22} \dot{x}_{20}$$

$$\therefore B_2 = \frac{m_1 X_{12} \dot{x}_{10} + m_2 X_{22} \dot{x}_{20}}{\omega_2\left(m_1 X_{12}^2 + m_2 X_{22}^2\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i2} \dot{x}_{i0}}{\omega_2 \sum_{i=1}^{2} m_i X_{i2}^2}$$

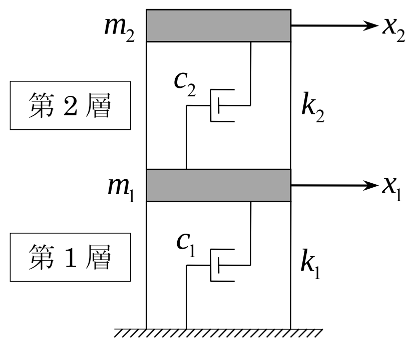
以上をまとめると、次のようになる。

$$A_1=\frac{\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i1} x_{i0}}{\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i1}^2},\quad A_2=\frac{\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i2} x_{i0}}{\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i2}^2},\quad B_1=\frac{\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i1} \dot{x}_{i0}}{\omega_1\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i1}^2},\quad B_2=\frac{\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i2} \dot{x}_{i0}}{\omega_2\sum_{i=1}^{2} m_i X_{i2}^2} \qquad \cdots\cdots\cdots(26)$$

このような方法は多自由度系において初期条件を用いて任意定数を定める場合に非常に便利である。

式(26)を式(14)に代入すると、任意の自由振動は必ずその系の基準振動の和として表されることがわかる。

５．２自由度系の減衰自由振動(damped free vibration)



右図に示すように、２層ラーメンの各層の相対速度に比例する減衰がある場合を考える。各層のバネ定数を k_1， k_2 、減衰係数(coefficient of　damping)を c_1， c_2 、質量を m_1， m_2 とすれば、振動方程式は次のようになる。

第１層の運動方程式は、

$$m_1\ddot{x}_1 = -c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \quad \cdots\cdots\cdots(27)$$

第２層の運動方程式は、

$$m_2\ddot{x}_2 = -c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1) \quad \cdots\cdots\cdots(28)$$

両辺を整理すれば、次のような連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(29)$$

いま、これをマトリクス・ベクトルを用いて表すと、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(29)'$$

さらに、$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$， $[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$， $[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ ：減衰マトリクス(damping matrix)， $\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ とおくと、次のように表される。

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad \cdots\cdots\cdots(29)''$$

解は次のようになる。

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-\varepsilon_1 t}\{A_1\cos\omega_1't + B_1\sin\omega_1't\} \\ &\quad + e^{-\varepsilon_2 t}\{A_2\cos\omega_2't + B_2\sin\omega_2't\} \\ x_2 &= r_1e^{-\varepsilon_1 t}\{A_1\cos(\omega_1't + \theta_1) + B_1\sin(\omega_1't + \theta_1)\} \\ &\quad + r_2e^{-\varepsilon_2 t}\{A_2\cos(\omega_2't + \theta_2) + B_2\sin(\omega_2't + \theta_2)\} \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots(30)$$

積分定数 A_1， B_1， A_2， B_2 は、初期条件により決定される。

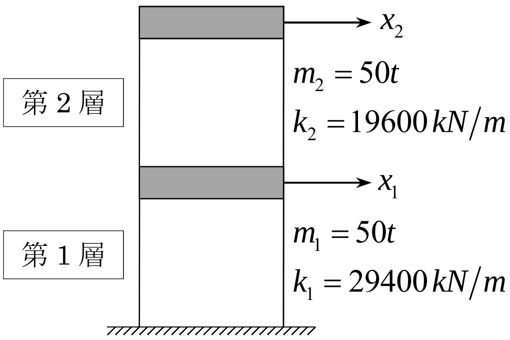
r_1 および r_2 は１次振動および２次振動の振動形に相当するが、減衰のない場合の値よりわずかに異なる。減衰のある場合の基準振動が減衰のない場合のそれと異なる点は、１層と２層の変位が同時に極値に達せず、また、同時に平衡位置を通過しないで、１次振動では θ_1，２次振動では θ_2 の位相差をもって生ずることである。減衰のない場合には $\theta_1 = 0$， $\theta_2 = \pi$ となり、1,2 層の変位が同時に極値に達することになる。

多質点系において、厳密に考えると、振動数，振動形を求める場合には減衰を考慮しなければならないが、一般の構造物においては減衰が小さいので、その振動性状に及ぼす影響も小さい。したがって、初め減衰のないものとして固有振動数および振動形を求め、後で減衰を付加して応答計算を行っても誤差は問題とするに足らない。

【例題】

右図に示す振動系の固有円振動数・固有周期・固有振動数と振動形を求めよ。

また、ある時刻における各層の変位および速度が、$x_{10}=2[cm],\,x_{20}=3[cm],\,\dot{x}_{10}=4[cm/s],\,\dot{x}_{20}=5[cm/s]$　であれば、t 秒後の各層の変位はいくらか。



【解答】

各層の右向きの水平変位を x とすれば、振動方程式は、

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0 \\ m_2\ddot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\text{(a)}$$

となる。ここで、与えられた数値を代入し、$\begin{cases} x_1=X_1e^{i\omega t} \\ x_2=X_2e^{i\omega t} \end{cases}$ とおいて、X に関する同次方程式を求めると、

$$\begin{cases} (49000-50\omega^2)X_1-19600X_2=0 \\ -19600X_1+(19600-50\omega^2)X_2=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\text{(b)}$$

となり、振動数方程式は、次のようになる。

$$\begin{vmatrix} (49000-50\omega^2) & -19600 \\ -19600 & (19600-50\omega^2) \end{vmatrix}=0$$

$$(49000-50\omega^2)(19600-50\omega^2)-19600^2=0$$

$$\therefore 2500\omega^4-3430000\omega^2+576240000=0$$

$$\therefore \omega^4-1372\omega^2+230496=0$$

これを解くと、

$$\omega^2=\frac{1}{2}\left(1372\pm\sqrt{1372^2-4\times230496}\right)=\frac{1}{2}\left(1372\pm\sqrt{960400}\right)=\frac{1}{2}(1372\pm980)=\begin{Bmatrix}196\\1176\end{Bmatrix}$$

となり、$\omega_1^2=196$，$\omega_2^2=1176$ となるから、次のようになる。

１次の固有円振動数は、　$\omega_1=\sqrt{196}=14$

１次の固有周期は、　$T_1=\dfrac{2\pi}{\omega_1}=\dfrac{\pi}{7}=0.44899895\cdots\cong0.4488\,[s]$

１次の固有振動数は、　$f_1=\dfrac{\omega_1}{2\pi}=\dfrac{7}{\pi}=2.228169203\cdots\cong2.228\,[Hz]$

２次の固有円振動数は、　$\omega_2=\sqrt{1176}=14\sqrt{6}=34.2928564\cdots\cong34.29$

２次の固有周期は、　$T_2=\dfrac{2\pi}{\omega_2}=\dfrac{\pi}{7\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}\pi}{42}=0.183221404\cdots\cong0.1832\,[s]$

２次の固有振動数は、　$f_2=\dfrac{\omega_2}{2\pi}=\dfrac{7\sqrt{6}}{\pi}=5.457877609\cdots\cong5.458\,[Hz]$

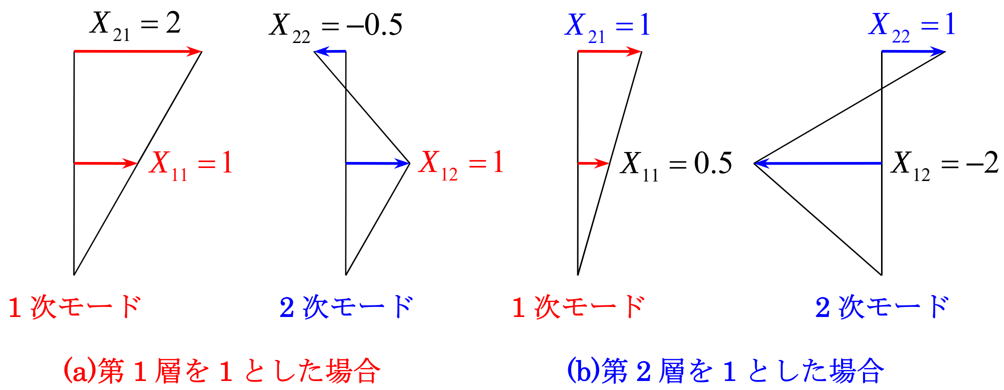
式(b)の第１式より、振動形を求めれば、１次の固有振動モードに対して、

$$\frac{X_{21}}{X_{11}}=\frac{49000-50\omega_1^2}{19600}=\frac{49000-50\times196}{19600}=\frac{39200}{19600}=2$$

２次の固有振動モードに対して、

$$\frac{X_{22}}{X_{12}}=\frac{49000-50\omega_2^2}{19600}=\frac{49000-50\times1176}{19600}=\frac{-9800}{19600}=-0.5$$

次頁の図は振動形を示すが、X の添字は始めのものが層数を表し、後のものがモード次数を表している。



振動モード（振動形）

===============《基準振動の直交性の確認》=======================================

この問題では、$m_1 = 50$，$m_2 = 50$ であり、

第１層の変位を１とすると、$X_{11} = 1$，$X_{12} = 1$，$X_{21} = 2$，$X_{22} = -0.5$ であるから、

$$m_1 X_{11} X_{12} + m_2 X_{21} X_{22} = 50 \times 1 \times 1 + 50 \times 2 \times (-0.5) = 50 - 50 = 0$$

また、第２層の変位を１とすると、$X_{11} = 0.5$，$X_{12} = -2$，$X_{21} = 1$，$X_{22} = 1$ であるから、

$$m_1 X_{11} X_{12} + m_2 X_{21} X_{22} = 50 \times 0.5 \times (-2) + 50 \times 1 \times 1 = -50 + 50 = 0$$

となり、直交することがわかる。

==

ある時刻を $t = 0$ とすれば、

$m_1 = 50$，$m_2 = 50$，$X_{11} = 1$，$X_{21} = 2$，$X_{12} = 1$，$X_{22} = -0.5$

$x_{10} = 2[cm]$，$x_{20} = 3[cm]$，$\dot{x}_{10} = 4[cm/s]$，$\dot{x}_{20} = 5[cm/s]$

であるから、式(26)を用いると、任意定数は次のように計算される。

$$A_1 = \frac{m_1 X_{11} x_{10} + m_2 X_{21} x_{20}}{m_1 X_{11}^2 + m_2 X_{21}^2} = \frac{50 \times 1 \times 2 + 50 \times 2 \times 3}{50 \times 1^2 + 50 \times 2^2} = \frac{400}{250} = \frac{8}{5} = 1.6[cm]$$

$$A_2 = \frac{m_1 X_{12} x_{10} + m_2 X_{22} x_{20}}{m_1 X_{12}^2 + m_2 X_{22}^2} = \frac{50 \times 1 \times 2 + 50 \times (-0.5) \times 3}{50 \times 1^2 + 50 \times (-0.5)^2} = \frac{25}{62.5} = \frac{2}{5} = 0.4\ [cm]$$

$$B_1 = \frac{m_1 X_{11} \dot{x}_{10} + m_2 X_{21} \dot{x}_{20}}{\omega_1 \left(m_1 X_{11}^2 + m_2 X_{21}^2 \right)} = \frac{50 \times 1 \times 4 + 50 \times 2 \times 5}{14 \times \left(50 \times 1^2 + 50 \times 2^2 \right)} = \frac{700}{3500} = \frac{1}{5} = 0.2\ [cm]$$

$$B_2 = \frac{m_1 X_{12} \dot{x}_{10} + m_2 X_{22} \dot{x}_{20}}{\omega_2 \left(m_1 X_{12}^2 + m_2 X_{22}^2 \right)} = \frac{50 \times 1 \times 4 + 50 \times (-0.5) \times 5}{14\sqrt{6} \times \left\{ 50 \times 1^2 + 50 \times (0.5)^2 \right\}} = \frac{75}{875\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{70} \cong 0.035\ [cm]$$

t 秒後の各層の変位は、式(14)を用いると、次のように表される。

$$x_1 = X_{11} \left(A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t \right) + X_{12} \left(A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t \right)$$

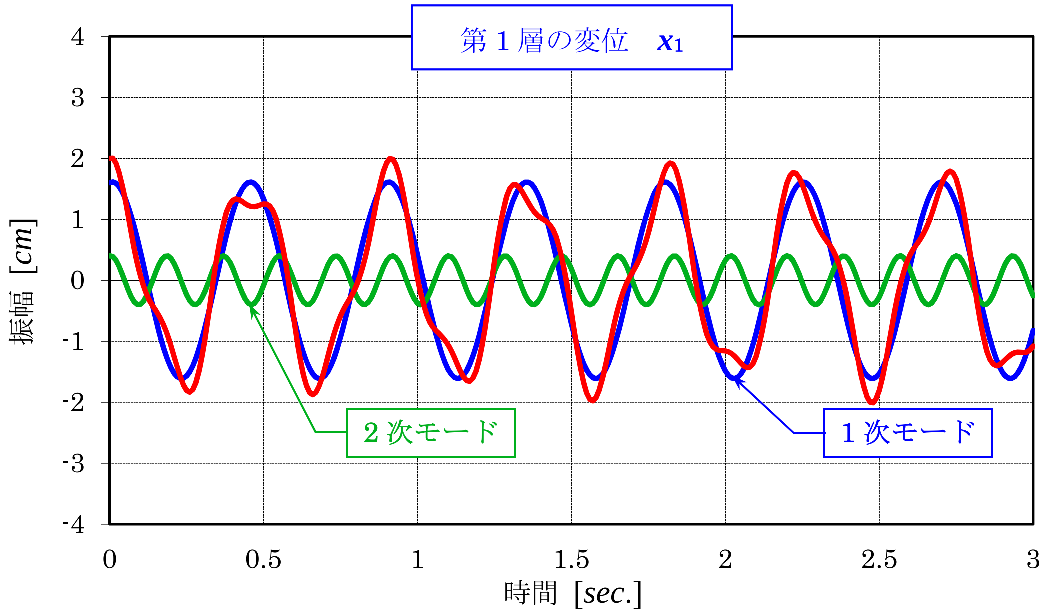
$$= 1 \times (1.6 \cos 14t + 0.2 \sin 14t) + 1 \times \left(0.4 \cos 14\sqrt{6}t + \frac{\sqrt{6}}{70} \sin 14\sqrt{6}t \right)$$

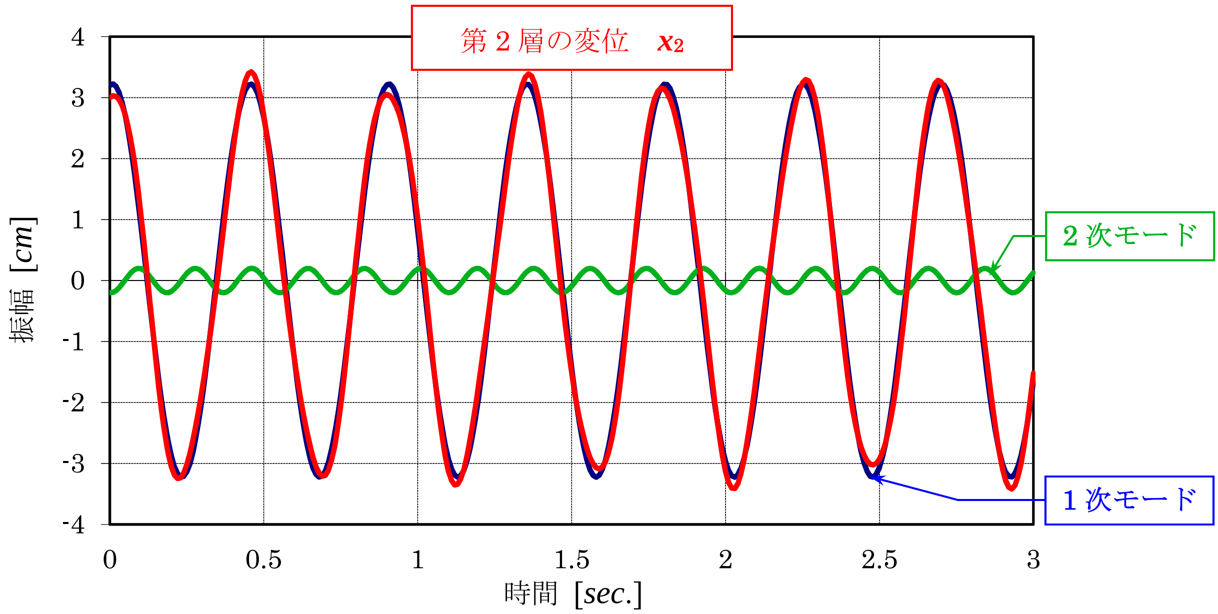
$$= 1.6 \cos 14t + 0.2 \sin 14t + 0.4 \cos 14\sqrt{6}t + \frac{\sqrt{6}}{70} \sin 14\sqrt{6}t$$

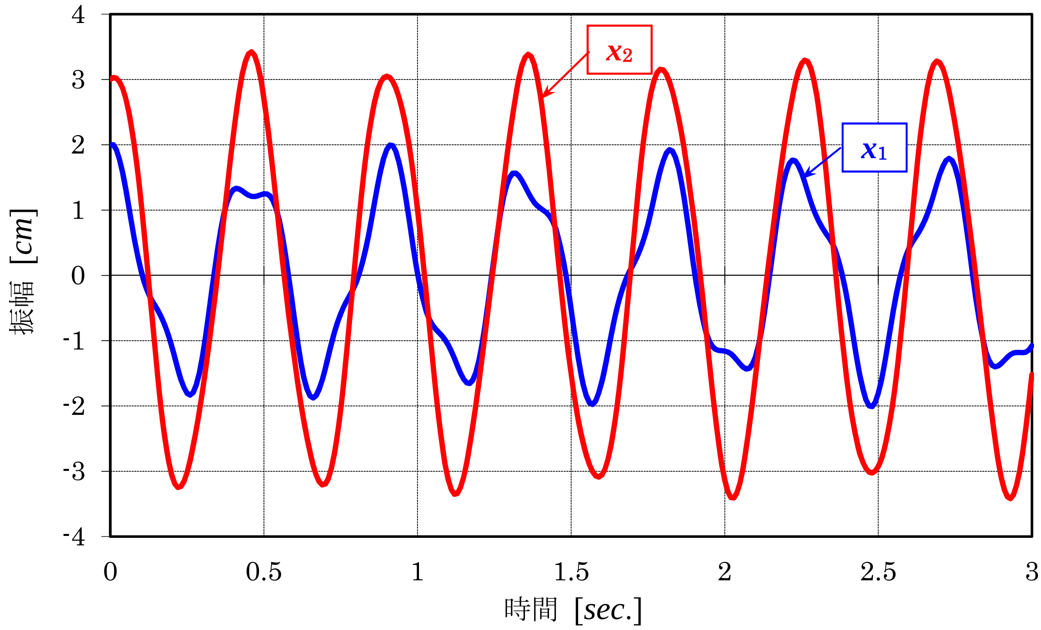
$$\cong 1.6 \cos 14t + 0.2 \sin 14t + 0.4 \cos 34.29t + 0.035 \sin 34.29t\ \ [cm]$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= X_{21}\left(A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t\right) + X_{22}\left(A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t\right) \\
&= 2\times\left(1.6\cos 14t + 0.2\sin 14t\right) + \left(-0.5\right)\times\left(0.4\cos 14\sqrt{6}t + \frac{\sqrt{6}}{70}\sin 14\sqrt{6}t\right) \\
&= 3.2\cos 14t + 0.4\sin 14t - 0.2\cos 14\sqrt{6}t - \frac{\sqrt{6}}{140}\sin 14\sqrt{6}t \\
&\cong 3.2\cos 14t + 0.4\sin 14t - 0.2\cos 34.29t - 0.0175\sin 34.29t \ \ [cm]
\end{aligned}
$$

これを図示すると、次頁の図のようになる。


第１層の変位　x1
2次モード
1次モード
振幅 [cm]
時間 [sec.]


第２層の変位　x2
2次モード
1次モード
振幅 [cm]
時間 [sec.]


x2
x1
振幅 [cm]
時間 [sec.]

t 秒後の各層の変位

２自由度系の強制振動(forced vibration)

１．外力と解法について

1 自由度系における強制振動は、〝力による強制振動〟と〝支点の変位による強制振動〟とに分けられる。このうち、支点の変位による強制振動は、もし、各支点の加速度が一様であれば、支点の加速度に比例する各質点の慣性力を外力と考えれば、力による強制振動と全く同様に解くことができる。また、支点の変位記録が与えられる場合には、静止座標についての系の変位を未知量にとれば、これも力による強制振動と全く同様に取り扱うことができる。ただ、2 自由度系では、後者の場合には支点の加速度が与えられる場合と若干強制項が異なる。

2 自由度系の強制振動が 1 自由度系の強制振動と異なるのは、解法において、各基準振動に分解してそのまま各質点の応答を求める方法（〝2 質点系としての解法〟と呼ぶことにする）と、各基準振動に分解してそれぞれの基準振動の解の和として求める、いわゆる**振動形解析法（モード解析法）**(method of modal analysis)を利用できることである。

２．正弦波外力による強制振動（2 質点系としての解法）

右下図に示す 2 層ラーメンの第 1 層に正弦波外力 $F_1\cos\omega t$，第 2 層に $F_2\cos\omega t$ が作用する場合の各層の応答変位を求める。振動方程式は次のようになる。

第 1 層の運動方程式は、

$$m_1\ddot{x}_1=-c_1\dot{x}_1+c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)-k_1x_1+k_2\left(x_2-x_1\right)+F_1\cos\omega t \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

第 2 層の運動方程式は、

$$m_2\ddot{x}_2=-c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)-k_2\left(x_2-x_1\right)+F_2\cos\omega t \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

両辺を整理すれば、次のような連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+\left(c_1+c_2\right)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+\left(k_1+k_2\right)x_1-k_2x_2=F_1\cos\omega t \\ m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+c_2\dot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=F_2\cos\omega t \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

いま、これをマトリクス・ベクトル表示すると、次のようになる。

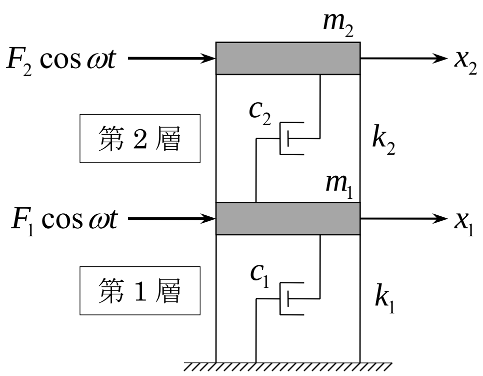
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}\cos\omega t \qquad \cdots\cdots\cdots(3)'$$

さらに、

$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},\quad [C]=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

$$[K]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix},\quad \{F\}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix},$$

$$\{X\}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$



とおくと、次のように表される。

$$[M]\cdot\left\{\ddot{X}\right\}+[C]\cdot\left\{\dot{X}\right\}+[K]\cdot\{X\}=\{F\}\cos\omega t \qquad \cdots\cdots\cdots(3)''$$

式(3)の解は右辺が 0 の場合の自由振動と特解としての強制振動との和で与えられるが、前者については既に述べたので、ここでは強制項のみを取り扱うことにする。

式(3)の特解は次のようにおくことができる。

$$\begin{cases} x_1=D_1\cos\left(\omega t-\varphi_1\right)=a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t \\ x_2=D_2\cos\left(\omega t-\varphi_2\right)=a_2\cos\omega t+b_2\sin\omega t \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

ここに、

$$\begin{cases} D_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2} \\ \tan\varphi_1=\dfrac{b_1}{a_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} D_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2} \\ \tan\varphi_2=\dfrac{b_2}{a_2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

以下では、式(4)，(5)の各係数を求めてみることにする。
式(4)を式(3)の第１式に代入して、$\cos\omega t$ および $\sin\omega t$ の項を左右両辺で等置すると、

$$m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=F_1\cos\omega t$$

$$\therefore m_1\left(-\omega^2a_1\cos\omega t-\omega^2b_1\sin\omega t\right)+(c_1+c_2)\left(-\omega a_1\sin\omega t+\omega b_1\cos\omega t\right)$$

$$-c_2\left(-\omega a_2\sin\omega t+\omega b_2\cos\omega t\right)+(k_1+k_2)\left(a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t\right)-k_2\left(a_2\cos\omega t+b_2\sin\omega t\right)=F_1\cos\omega t$$

$$\therefore\left\{-m_1\omega^2a_1+(c_1+c_2)\omega b_1-c_2\omega b_2+(k_1+k_2)a_1-k_2a_2\right\}\cos\omega t$$

$$+\left\{-m_1\omega^2b_1-(c_1+c_2)\omega a_1+c_2\omega a_2+(k_1+k_2)b_1-k_2b_2\right\}\sin\omega t=F_1\cos\omega t$$

となるから、

$$-m_1\omega^2a_1+(c_1+c_2)\omega b_1-c_2\omega b_2+(k_1+k_2)a_1-k_2a_2=F_1$$

$$\therefore\left(k_1+k_2-m_1\omega^2\right)a_1+(c_1+c_2)\omega b_1-k_2a_2-c_2\omega b_2=F_1 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

$$-m_1\omega^2b_1-(c_1+c_2)\omega a_1+c_2\omega a_2+(k_1+k_2)b_1-k_2b_2=0 \quad \therefore-(c_1+c_2)\omega a_1+\left(k_1+k_2-m_1\omega^2\right)b_1+c_2\omega a_2-k_2b_2=0$$

$$\therefore(c_1+c_2)\omega a_1-\left(k_1+k_2-m_1\omega^2\right)b_1-c_2\omega a_2+k_2b_2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

となる。同様に、式(4)を式(3)の第２式に代入して、$\cos\omega t$ および $\sin\omega t$ の項を左右両辺で等置すると、

$$m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+c_2\dot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=F_2\cos\omega t$$

$$\therefore m_2\left(-\omega^2a_2\cos\omega t-\omega^2b_2\sin\omega t\right)-c_2\left(-\omega a_1\sin\omega t+\omega b_1\cos\omega t\right)$$

$$+c_2\left(-\omega a_2\sin\omega t+\omega b_2\cos\omega t\right)-k_2\left(a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t\right)+k_2\left(a_2\cos\omega t+b_2\sin\omega t\right)=F_2\cos\omega t$$

$$\therefore\left(-m_2\omega^2a_2-c_2\omega b_1+c_2\omega b_2-k_2a_1+k_2a_2\right)\cos\omega t+\left(-m_2\omega^2b_2+c_2\omega a_1-c_2\omega a_2-k_2b_1+k_2b_2\right)\sin\omega t=F_2\cos\omega t$$

となるから、

$$-m_2\omega^2a_2-c_2\omega b_1+c_2\omega b_2-k_2a_1+k_2a_2=F_2 \quad \therefore-k_2a_1-c_2\omega b_1+\left(k_2-m_2\omega^2\right)a_2+c_2\omega b_2=F_2$$

$$\therefore k_2a_1+c_2\omega b_1-\left(k_2-m_2\omega^2\right)a_2-c_2\omega b_2=-F_2 \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

$$-m_2\omega^2b_2+c_2\omega a_1-c_2\omega a_2-k_2b_1+k_2b_2=0$$

$$\therefore c_2\omega a_1-k_2b_1-c_2\omega a_2+\left(k_2-m_2\omega^2\right)b_2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

となり、a_1，b_1，a_2，b_2 に関する４元連立方程式①～④が得られる。
まず、式①から式③を減ずると、

$$\left(k_1+k_2-m_1\omega^2-k_2\right)a_1+(c_1+c_2-c_2)\omega b_1+\left\{-k_2+\left(k_2-m_2\omega^2\right)\right\}a_2=F_1+F_2$$

$$\therefore\left(k_1-m_1\omega^2\right)a_1+c_1\omega b_1-m_2\omega^2a_2=F_1+F_2$$

$$\therefore a_2=\frac{1}{m_2\omega^2}\left\{\left(k_1-m_1\omega^2\right)a_1+c_1\omega b_1-(F_1+F_2)\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots⑤$$

次に、式②から式④を減ずると、

$$(c_1+c_2-c_2)\omega a_1-\left(k_1+k_2-m_1\omega^2-k_2\right)b_1+\left\{k_2-\left(k_2-m_2\omega^2\right)\right\}b_2=0 \quad \therefore c_1\omega a_1-\left(k_1-m_1\omega^2\right)b_1+m_2\omega^2b_2=0$$

$$\therefore b_2=\frac{-1}{m_2\omega^2}\left\{c_1\omega a_1-\left(k_1-m_1\omega^2\right)b_1\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots⑥$$

式⑤，⑥を式③に代入し、両辺に $m_2\omega^2$ を乗ずると、

$$m_2k_2\omega^2a_1+m_2c_2\omega^3b_1-\left(k_2-m_2\omega^2\right)\left\{\left(k_1-m_1\omega^2\right)a_1+c_1\omega b_1-(F_1+F_2)\right\}+c_2\omega\left\{c_1\omega a_1-\left(k_1-m_1\omega^2\right)b_1\right\}=-m_2\omega^2F_2$$

$$\therefore\left\{m_2k_2\omega^2-\left(k_1-m_1\omega^2\right)\left(k_2-m_2\omega^2\right)+c_1c_2\omega^2\right\}a_1$$

$$+\left\{m_2c_2\omega^3-c_1\omega\left(k_2-m_2\omega^2\right)-c_2\omega\left(k_1-m_1\omega^2\right)\right\}b_1=-m_2\omega^2F_2-(F_1+F_2)\left(k_2-m_2\omega^2\right)$$

$$\therefore\left\{(m_2k_2+c_1c_2)\omega^2-\left(k_1-m_1\omega^2\right)\left(k_2-m_2\omega^2\right)\right\}a_1$$

$$+\left\{m_2c_2\omega^2-c_1\left(k_2-m_2\omega^2\right)-c_2\left(k_1-m_1\omega^2\right)\right\}\omega b_1=m_2\omega^2F_1-(F_1+F_2)k_2 \qquad \cdots\cdots\cdots⑦$$

同様に、式⑤，⑥を式④に代入し、両辺に $m_2\omega^2$ を乗ずると、

$$m_2c_2\omega^3a_1-m_2k_2\omega^2b_1-c_2\omega\left\{\left(k_1-m_1\omega^2\right)a_1+c_1\omega b_1-(F_1+F_2)\right\}-\left(k_2-m_2\omega^2\right)\left\{c_1\omega a_1-\left(k_1-m_1\omega^2\right)b_1\right\}=0$$

$$\therefore\left\{m_2c_2\omega^2-c_1\left(k_2-m_2\omega^2\right)-c_2\left(k_1-m_1\omega^2\right)\right\}\omega a_1$$

$$-\left\{(m_2k_2+c_1c_2)\omega^2-\left(k_1-m_1\omega^2\right)\left(k_2-m_2\omega^2\right)\right\}b_1=-(F_1+F_2)c_2\omega \qquad \cdots\cdots\cdots⑧$$

ここで、α，β を次のようにおくと、

$$\begin{cases}\alpha=\left(m_2k_2+c_1c_2\right)\omega^2-\left(k_1-m_1\,\omega^2\right)\left(k_2-m_2\,\omega^2\right)=-m_1m_2\omega^4+\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\omega^2-k_1k_2\\ \beta=\left\{m_2c_2\,\omega^2-c_1\left(k_2-m_2\,\omega^2\right)-c_2\left(k_1-m_1\,\omega^2\right)\right\}\omega=\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\omega^3-\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\omega\end{cases}$$

式⑦，⑧はそれぞれ次のようになる。

$$\alpha a_1+\beta b_1=m_2\omega^2F_1-\left(F_1+F_2\right)k_2 \qquad \cdots\cdots\cdots⑦'$$

$$\beta a_1-\alpha b_1=-\left(F_1+F_2\right)c_2\omega \qquad \cdots\cdots\cdots⑧'$$

式⑦'，⑧'より、b_1を消去すると、

$$\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_1=\left\{m_2\omega^2F_1-\left(F_1+F_2\right)k_2\right\}\alpha-\left(F_1+F_2\right)c_2\omega\beta$$

$$\therefore a_1=\frac{\left\{m_2\omega^2F_1-\left(F_1+F_2\right)k_2\right\}\alpha-\left(F_1+F_2\right)c_2\omega\beta}{\alpha^2+\beta^2} \qquad \cdots\cdots\cdots⑨$$

逆に、式⑦'，⑧'より、a_1を消去すると、

$$\left(\beta^2+\alpha^2\right)b_1=\left\{m_2\omega^2F_1-\left(F_1+F_2\right)k_2\right\}\beta+\left(F_1+F_2\right)c_2\omega\alpha$$

$$\therefore b_1=\frac{\left\{m_2\omega^2F_1-\left(F_1+F_2\right)k_2\right\}\beta+\left(F_1+F_2\right)c_2\omega\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \qquad \cdots\cdots\cdots⑩$$

ここで、$\alpha^2+\beta^2$を求めるため、α^2とβ^2をωのべき数で整理すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}\alpha^2&=\left\{-m_1m_2\omega^4+\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\omega^2-k_1k_2\right\}^2\\&=m_1^2m_2^2\omega^8-2m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\omega^6+\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)^2\omega^4\\&\quad-2k_1k_2\left\{-m_1m_2\omega^4+\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\omega^2\right\}+k_1^2k_2^2\\&=m_1^2m_2^2\omega^8-2m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\omega^6+\left\{\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)^2+2m_1m_2k_1k_2\right\}\omega^4\\&\quad-2k_1k_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\omega^2+k_1^2k_2^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta^2&=\left\{\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\omega^3-\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\omega\right\}^2\\&=\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)^2\omega^6-2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\omega^4+\left(k_1c_2+k_2c_1\right)^2\omega^2\end{aligned}$$

したがって、$\alpha^2+\beta^2$は次のようになる。

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=m_1^2m_2^2\omega^8-2m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\omega^6\\&\quad+\left\{\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)^2+2m_1m_2k_1k_2\right\}\omega^4-2k_1k_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\omega^2+k_1^2k_2^2\\&\quad+\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)^2\omega^6-2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\omega^4+\left(k_1c_2+k_2c_1\right)^2\omega^2\\&=m_1^2m_2^2\omega^8+\left\{\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)^2-2m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\right\}\omega^6\\&\quad+\left\{\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)^2-2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(k_1c_2+k_2c_1\right)+2m_1m_2k_1k_2\right\}\omega^4\\&\quad+\left\{\left(k_1c_2+k_2c_1\right)^2-2k_1k_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\right\}\omega^2+k_1^2k_2^2\end{aligned}$$

さらに、第１層と第２層の変位の振幅D_1，D_2に着目すると、式(5)より、

$$\begin{aligned}\left(\alpha^2+\beta^2\right)D_1^2&=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(a_1^2+b_1^2\right)=\left\{m_2F_1\omega^2-\left(F_1+F_2\right)k_2\right\}^2+c_2^2\left(F_1+F_2\right)^2\omega^2\\&=m_2^2F_1^2\omega^4+\left(F_1+F_2\right)\left\{c_2^2\left(F_1+F_2\right)-2m_2k_2F_1\right\}\omega^2+k_2^2\left(F_1+F_2\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_2^2\omega^4D_2^2&=m_2^2\omega^4\left(a_2^2+b_2^2\right)=\left\{\left(k_1-m_1\omega^2\right)a_1+c_1\omega b_1-\left(F_1+F_2\right)\right\}^2+\left\{c_1\omega\,a_1-\left(k_1-m_1\omega^2\right)b_1\right\}^2\\&=\left(k_1-m_1\omega^2\right)^2a_1^2+2c_1\left(k_1-m_1\omega^2\right)a_1b_1\omega+c_1^2b_1^2\omega^2-2\left(F_1+F_2\right)\left\{\left(k_1-m_1\omega^2\right)a_1+c_1b_1\omega\right\}+\left(F_1+F_2\right)^2\\&\quad+c_1^2a_1^2\omega^2-2c_1\left(k_1-m_1\omega^2\right)a_1b_1\omega+\left(k_1-m_1\omega^2\right)^2b_1^2\\&=m_1^2\left(a_1^2+b_1^2\right)\omega^4+\left(-2m_1c_1a_1b_1+2m_1c_1a_1b_1\right)\omega^3+\left\{-2m_1k_1a_1^2+c_1^2b_1^2-2m_1\left(F_1+F_2\right)a_1+c_1^2a_1^2-2m_1k_1b_1^2\right\}\omega^2\\&\quad+\left\{2k_1c_1a_1b_1-2c_1\left(F_1+F_2\right)b_1-2k_1c_1a_1b_1\right\}\omega+\left\{k_1^2a_1^2-2k_1\left(F_1+F_2\right)a_1+\left(F_1+F_2\right)^2+k_1^2b_1^2\right\}\\&=m_1^2\left(a_1^2+b_1^2\right)\omega^4+\left\{\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(c_1^2-2m_1k_1\right)-2m_1\left(F_1+F_2\right)a_1\right\}\omega^2\\&\quad-2c_1\left(F_1+F_2\right)b_1\omega+\left\{k_1^2\left(a_1^2+b_1^2\right)-2k_1\left(F_1+F_2\right)a_1+\left(F_1+F_2\right)^2\right\}\end{aligned}$$

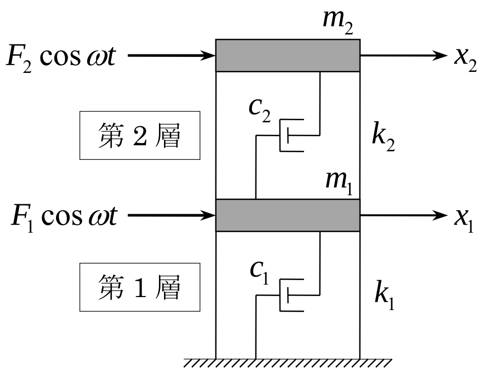
となり、計算可能である。

式(5)より明らかなように、φ_1 と φ_2 は等しくないので第１層と第２層の変位には位相差が生ずる。しかし、もし、減衰がない場合には係数 b が 0 となり、第１層と第２層は同時に極値に達する。

２自由度系では固有振動数は２個存在するから、共振点も２個現れる。

外力の F_1 と F_2 の振動数が異なる場合には、それぞれの力による応答を別個に求め、最後にそれらの解を加え合わせればよい。

右図に示すような２層ラーメンの挙動を数値的に示すために、２層ラーメンの第１層にだけ $F_1 \cos\omega t$ が作用する場合の第１層と第２層の変位を求めてみる。
なお、条件は以下の通りである。



【条件】

質量　$m_1 = m_2 = 50\,[ton]$,

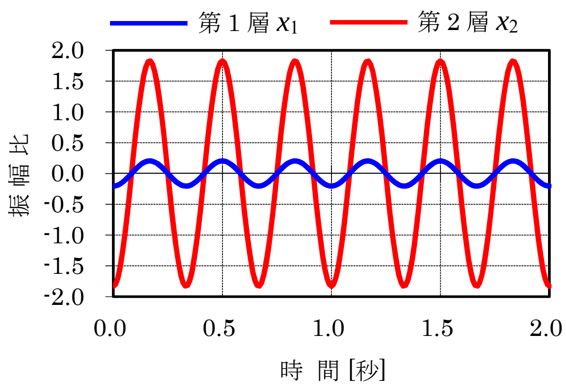
バネ定数　$k_1 = 30000\,[kN/m],\ k_2 = 20000\,[kN/m]$,

外力　$F_1 = F_0 \cos\omega t,\ \ f = 3\ \ [Hz],\ \ \omega = 2\pi f = 6\pi\ ,\ \ F_2 = 0$

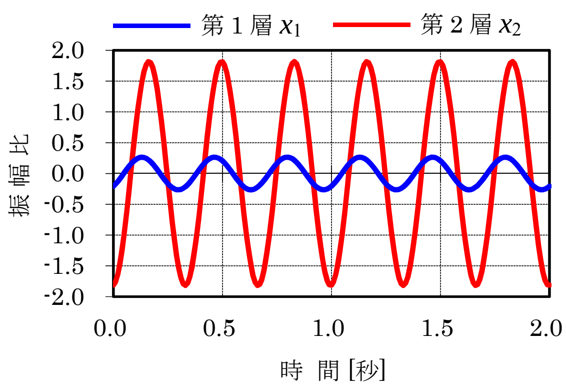
（※振幅比は、静的載荷を基準として、変位振幅を正規化したもの）

【減衰係数の違いによる時間変動】

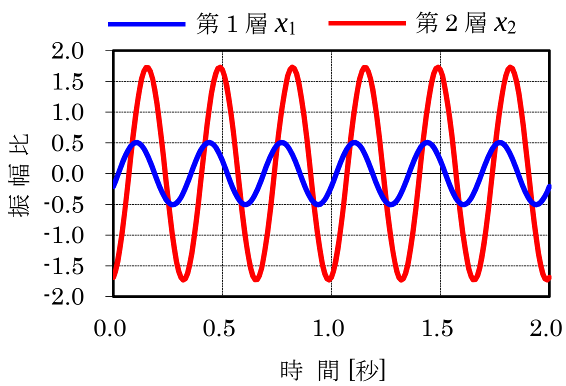
❶減衰係数　$c_1 = c_2 = 0\left[kN \cdot s/m\right]$



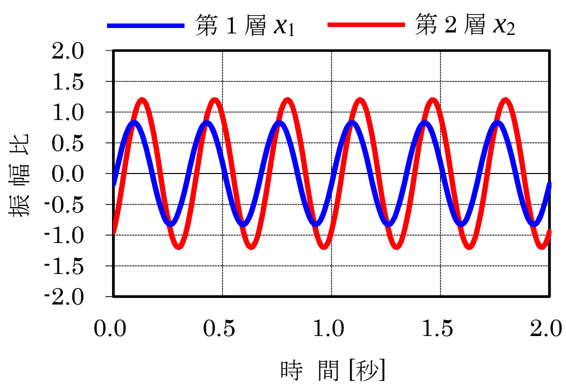
❷減衰係数　$c_1 = c_2 = 100\left[kN \cdot s/m\right]$



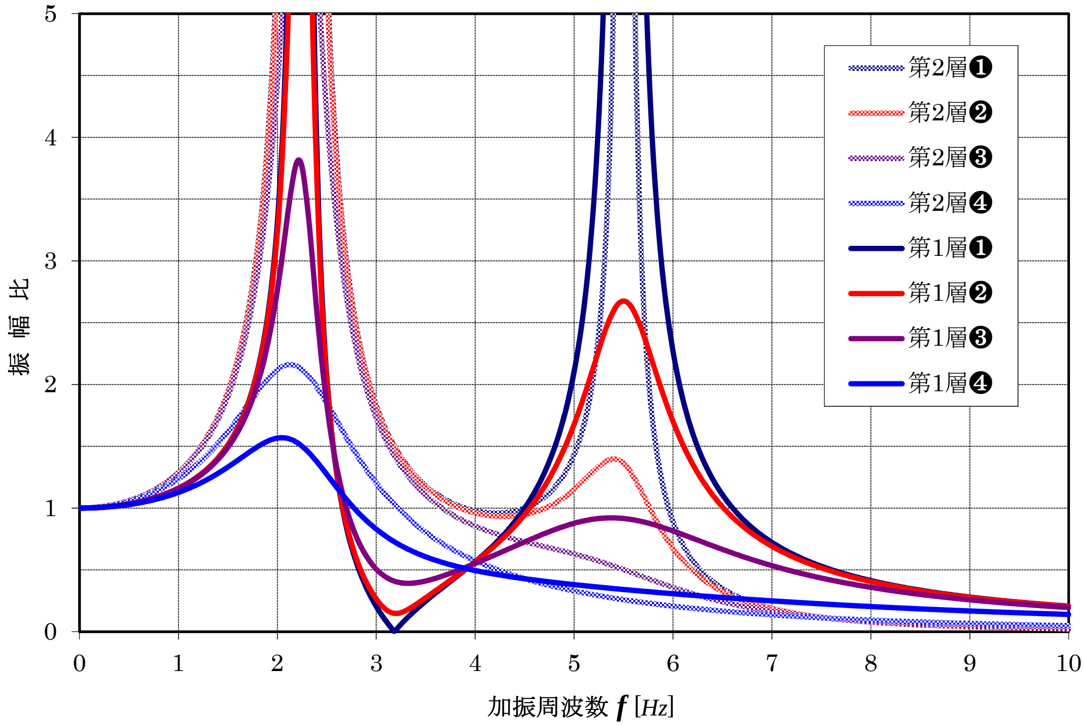
❸減衰係数　$c_1 = c_2 = 300\left[kN \cdot s/m\right]$



❹減衰係数　$c_1 = c_2 = 1000\left[kN \cdot s/m\right]$

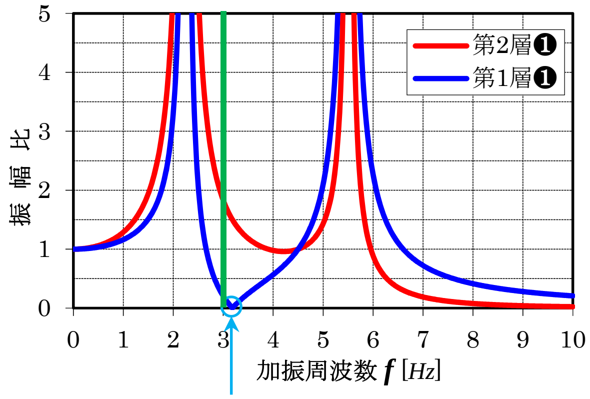


【加振周波数の違いによる振幅比】

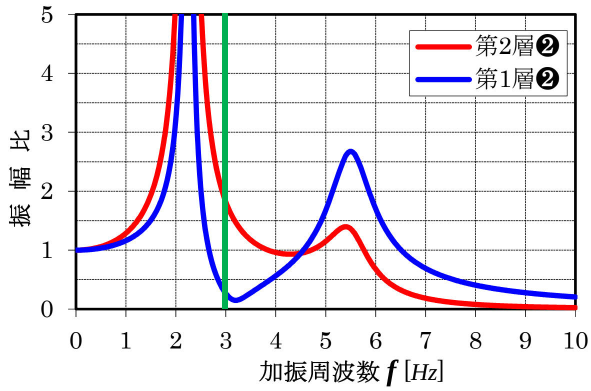


２層ラーメンの共振曲線

❶減衰係数　$c_1 = c_2 = 0\,[kN \cdot s/m]$

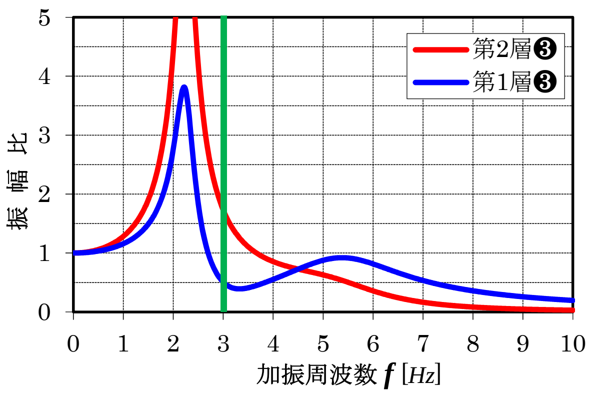


❷減衰係数　$c_1 = c_2 = 100\,[kN \cdot s/m]$

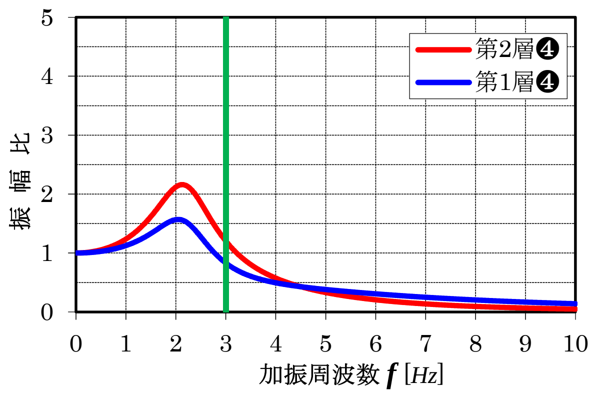


$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} = \frac{20000}{50} = 400 = 20^2 \quad \therefore f = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi} = 3.183098862\cdots \fallingdotseq 3.18\,[Hz]$$

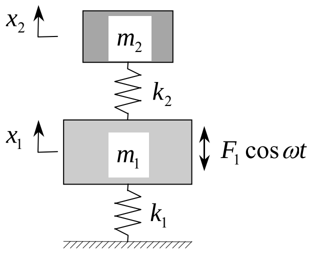
❸減衰係数　$c_1 = c_2 = 300\,[kN \cdot s/m]$



❹減衰係数　$c_1 = c_2 = 1000\,[kN \cdot s/m]$



共振曲線の図において、第１層に $F_1\cos\omega t$ のみが作用する場合に、簡単のため減衰のない場合を考えると、 $f=3.18Hz$ (※)のとき、第 1 層に外力が作用しているにもかからず第 1 層の変位は 0 となり、第２層のみが振動する。この現象は振動を発生する重要な機械の防振に利用される。右図に示すように、バネ定数 k_1 で支持される質量 m_1 の機械に外力 $F_1\cos\omega t$ が作用する場合、付加質量 m_2 をバネ定数 k_2 のバネで機械 m_1 に取り付け、 $\dfrac{k_2}{m_2}=\omega^2$ を満たすようにすれば、機械 m_1 はほとんど振動せず、付加質量 m_2 のみが振動し外力の振動エネルギーを吸収することになる。



動吸振器

このような防振機構を動吸振器(dynamic vibration absorber)という。
構造物においても橋梁などにこの理論に基づく機構が取り付けられ、制振装置として利用される。

(※)数値計算例によれば、 $m_2=50\,[ton]$, $k_2=20000\,[kN/m]$ であり、 $\omega=2\pi f$ と表されるから、

$$\omega^2=\frac{k_2}{m_2}=\frac{20000}{50}=400=20^2 \quad \therefore f=\frac{20}{2\pi}=\frac{10}{\pi}=3.183098862\cdots\cong 3.18\,[Hz]$$ となる。

３．一般座標・一般力・散逸関数

振動系の形状を表す座標のうち、独立に変わりうる量で表すとき、この座標を一般座標(generalized coordinate)あるいは広義座標という。

2 層ラーメンでは、次頁の図に示すように、一般座標として各層の水平変位 x_1, x_2 を取ってもよく、各層の相対変位 x_{01}, x_{12} を取ってもよく、各層の柱の部材角 θ_1, θ_2 を取ってもよい。

一般座標としては、変位・角度・体積変化などいろいろの表現方法があるが、その中でも振動の取り扱いができるだけ簡単になる方法を選ばなければならない。

いま、2 層ラーメンの第 1 層に水平外力 $P_1(t)$ が働く場合に、一般座標に微小な増分を与えたとき、外力 $P_1(t)$ がなす仕事を考えてみる。

水平変位 x_1, x_2 を一般座標とした場合には、一般座標 x_1 の増加 δx_1 の間に $P_1(t)$ がなす仕事は $P_1(t)\cdot\delta x_1$ であり、一般座標 x_2 の増加 δx_2 の間に $P_1(t)$ がなす仕事は 0 である。この場合、一般座標 x_1 の増加 δx_1 の間に外力によってなされる仕事を求めるために δx_1 に乗ずべき因子 P_1 を一般座標 x_1 に対する一般力(generalized force)または広義の力という。言い換えれば、〝一般座標が単位の増加をなす場合にすべての外力がなす仕事〟を〝その一般座標に対する一般力〟という。

次頁の図に、2 層ラーメンの第 1 層に $P_1(t)$，第 2 層に $P_2(t)$ が水平に作用する場合の各一般座標に対する一般力を示しておく。

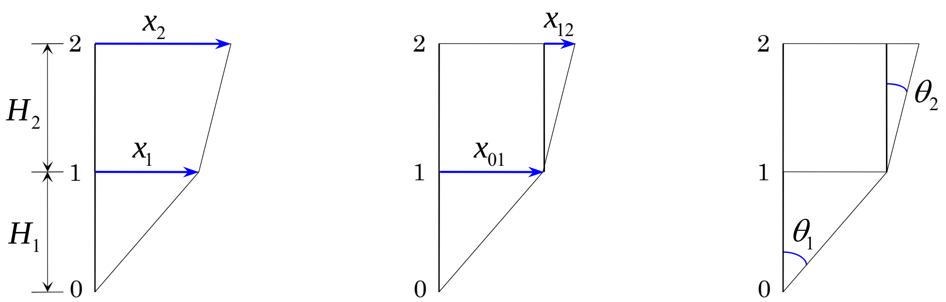
一般座標が変位・角度・体積変化など何でもよかったように、一般力も必ずしも力を意味するものでなく、一般座標に相対応して定義される。すなわち、一般座標と一般力との積が仕事の次元をもつような次元で表現される。

一般力として考慮される力は、いわゆる系の外から働く外力ばかりでなく、系の内力，減衰力あるいは慣性力でもよい。しかし、一般には純粋な外力のみが考慮されることが多い。

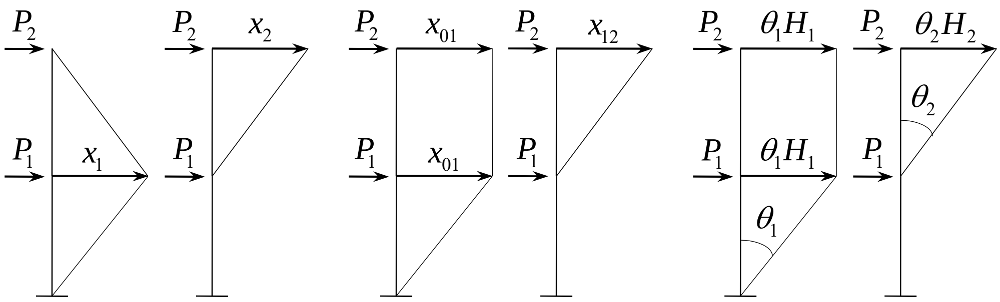
振動系には一般にいろいろの原因によって振動を妨げようとする力が働き、振動エネルギーが消散される。この抵抗力は粘性のみではなく、摩擦によるものその他いろいろであり、必ずしも系の各質点の速度に比例するものではないが、いま、仮に、速度に比例する粘性減衰力のみであるとすれば、各質点に働く抵抗力は減衰係数と速度の積によって表される。この場合、単位時間に系の振動エネルギーが失われる割合の半分を散逸関数(dissipation function)あるいは消散関数という。

例えば、2 層ラーメンに、各層の相対速度に比例する減衰力のみが作用する場合、粘性減衰係数を c_1, c_2 とすれば、一般座標における散逸関数 F がどのように表されるかを次頁の図中に示しておく。

散逸関数を厳密に知るには、構造物のどの部分からどのような形でエネルギーが散逸するかを明白にしなければならないが、現在のところ、まだ充分に解明されていない。したがって、一般には散逸関数を前もって求めることはなく、とくに振動形解析法においては各次の減衰定数を実測または同種の構造物に対する推定により求め、後で振動方程式に組み合わせるという方法が採られる。



一般座標　　水平変位　　相対変位　　部材角



$x_1=1$	$x_1=0$	$x_{01}=1$	$x_{01}=0$	$\theta_1=1$	$\theta_1=0$
$x_2=0$	$x_2=1$	$x_{12}=0$	$x_{12}=1$	$\theta_2=0$	$\theta_2=1$

一般力

$x_1 \Rightarrow P_1(t)$　　$x_{01} \Rightarrow P_1(t)+P_2(t)$　　$\theta_1 \Rightarrow H_1P_1(t)+H_1P_2(t)$

$x_2 \Rightarrow P_2(t)$　　$x_{12} \Rightarrow P_2(t)$　　$\theta_2 \Rightarrow H_2P_2(t)$

散逸関数

$$F=\frac{1}{2}\left\{c_1\dot{x}_1^2+c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)^2\right\} \qquad F=\frac{1}{2}\left\{c_1\dot{x}_{01}^2+c_2\dot{x}_{12}^2\right\} \qquad F=\frac{1}{2}\left\{c_1\left(H_1\dot{\theta}_1\right)^2+c_2\left(H_2\dot{\theta}_2\right)^2\right\}$$

４．ラグランジュ(Lagrange)の運動方程式

振動系の形状を表すのに一般座標$q_s\ (s=1,2,\cdots,m)$を用いるものとし、系の運動エネルギー(kinetic energy)をK，ひずみエネルギー(strain energy)あるいは位置エネルギー(potential energy)をV，散逸関数をF，一般座標q_sに対する一般力をQ_sとすれば、一般座標q_sに関して次のような運動方程式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_s}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial V}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,m) \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

この式をラグランジュの運動方程式(Lagrange's equation of motion)と呼び、〝一般座標で表した振動系の振動方程式の作成〟に利用される。外力が作用しない自由振動の場合には$Q_s=0$と置けばよいが、慣性力，減衰力および保存力（復元力）をも力とみなして一般力Q_sの計算に入れても全く同様の振動方程式が得られる。

$L=K-V$とおけば、ラグランジュの運動方程式は次のようにも書かれる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_s}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s}=Q_s \qquad (s=1,2,\cdots,m) \qquad \cdots\cdots\cdots(6)'$$

このLをこの系のラグランジュ関数(Lagrangean function)という。

２層ラーメンを例にとり、ラグランジュの運動方程式の利用法を以下に示す。
各層の水平変位 x_1， x_2 を一般座標にとれば、

系の運動エネルギー K は、　$K=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$

系のひずみエネルギー V は、　$V=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2\left(x_2-x_1\right)^2$

散逸関数 F は、　$F=\frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)^2$

一般力 Q_s は、一般座標 x_1 に対して、　$Q_1=P_1\cos\omega t$

一般座標 x_2 に対して、　$Q_2=P_2\cos\omega t$

となるから、これらの式を $x_1\Rightarrow q_1$， $x_2\Rightarrow q_2$ として、式(6)に代入すれば、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_1}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_1}+\frac{\partial V}{\partial q_1}=Q_1 \quad \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial K}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}+\frac{\partial V}{\partial x_1}=Q_1$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left\{\frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)^2\right\}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2\left(x_2-x_1\right)^2\right\}=P_1\cos\omega t$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(m_1\dot{x}_1\right)+\left\{c_1\dot{x}_1-c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)\right\}+\left\{k_1x_1-k_2\left(x_2-x_1\right)\right\}=P_1\cos\omega t$$

$$\therefore m_1\ddot{x}_1+c_1\dot{x}_1-c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)+k_1x_1-k_2\left(x_2-x_1\right)=P_1\cos\omega t$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_2}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_2}+\frac{\partial V}{\partial q_2}=Q_2 \quad \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial K}{\partial x_2}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}+\frac{\partial V}{\partial x_2}=Q_2$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left\{\frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)^2\right\}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2\left(x_2-x_1\right)^2\right\}=P_2\cos\omega t$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(m_2\dot{x}_2\right)+\left\{c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)\right\}+\left\{k_2\left(x_2-x_1\right)\right\}=P_2\cos\omega t$$

$$\therefore m_2\ddot{x}_2+c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)+k_2\left(x_2-x_1\right)=P_2\cos\omega t$$

となり、この運動方程式は式(1),(2)または(3)と全く同一であることがわかる。

ラグランジュの運動方程式を利用すると便利な点は、〝復元力または減衰力の方向をわざわざ考慮しなくとも自らその符号が決まってくること〟である。

エネルギーは引張でも圧縮でも同様に表されるから、いま、

$$V=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2\left(x_1-x_2\right)^2 \qquad F=\frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}c_2\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)^2$$

とおいてみても、全く同様な結果が得られる。

５．正弦波外力による強制振動（振動形解析法）

振動系の形状を決定する一般座標は種々に選ぶことができるが、ある特別な選び方をすると解析が容易になる。２層ラーメンの固有振動形を X_{is} （i は層数，s はモード次数を表す）とすれば、実際の変位 x_i は２つの固有振動形を適当な割合 ϕ_s で重ね合わせることによって得られ、次の式で表される。

$$\boxed{x_i\left(t\right)=\sum_{s=1}^{2}\phi_s\left(t\right)\cdot X_{is}} \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

ここに、$\phi_s\left(t\right)$ は時間的に変動する量であるが、X_{is} が無次元であれば ϕ_s は長さの次元をもち、X_{is} が長さの次元をもつときには ϕ_s は無次元量となる。

２層ラーメンを例にとり、このような ϕ_s を一般座標にとってラグランジュの運動方程式を立ててみる。

運動エネルギー K は次のようになる。

$$K=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2=\frac{1}{2}m_1\left(\sum_{s=1}^{2}\dot{\phi}_sX_{1s}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\sum_{s=1}^{2}\dot{\phi}_sX_{2s}\right)^2=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\phi}_1X_{11}+\dot{\phi}_2X_{12}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\phi}_1X_{21}+\dot{\phi}_2X_{22}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\phi}_1^2X_{11}^2+2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2X_{11}X_{12}+\dot{\phi}_2^2X_{12}^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\phi}_1^2X_{21}^2+2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2X_{21}X_{22}+\dot{\phi}_2^2X_{22}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\phi}_1^2X_{11}^2+\dot{\phi}_2^2X_{12}^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\phi}_1^2X_{21}^2+\dot{\phi}_2^2X_{22}^2\right)+\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\left(m_1X_{11}X_{12}+m_2X_{21}X_{22}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\dot{\phi}_1^2\left(m_1X_{11}^2+m_2X_{21}^2\right)+\dot{\phi}_2^2\left(m_1X_{12}^2+m_2X_{22}^2\right)\right]+\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\left(m_1X_{11}X_{12}+m_2X_{21}X_{22}\right)$$

ここで、 X_{is} は固有振動形であるから、基準振動の直交性の式 $m_1X_{11}X_{12}+m_2X_{21}X_{22}=0$ を用いると、運動エネルギー K は、一般速度 $\dot{\phi}_1$ または $\dot{\phi}_2$ の２乗の項のみを含む次のような式になる。

$$K=\frac{1}{2}\left[\dot{\phi}_1^2\left(m_1X_{11}^2+m_2X_{21}^2\right)+\dot{\phi}_2^2\left(m_1X_{12}^2+m_2X_{22}^2\right)\right] \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

系のひずみエネルギー V は次のようになる。

$$V=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2=\frac{1}{2}k_1\left(\sum_{s=1}^{2}\phi_sX_{1s}\right)^2+\frac{1}{2}k_2\left(\sum_{s=1}^{2}\phi_sX_{2s}-\sum_{s=1}^{2}\phi_sX_{1s}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}k_1\left(\phi_1X_{11}+\phi_2X_{12}\right)^2+\frac{1}{2}k_2\left\{\left(\phi_1X_{21}+\phi_2X_{22}\right)-\left(\phi_1X_{11}+\phi_2X_{12}\right)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}+k_1\left(\phi_1^2X_{11}^2+2\phi_1\phi_2X_{11}X_{12}+\phi_2^2X_{12}^2\right)\\+k_2\left\{\left(\phi_1X_{21}+\phi_2X_{22}\right)^2-2\left(\phi_1X_{21}+\phi_2X_{22}\right)\left(\phi_1X_{11}+\phi_2X_{12}\right)+\left(\phi_1X_{11}+\phi_2X_{12}\right)^2\right\}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left[k_1\left(\phi_1^2X_{11}^2+2\phi_1\phi_2X_{11}X_{12}+\phi_2^2X_{12}^2\right)+k_2\left\{\begin{array}{l}+\left(\phi_1^2X_{21}^2+2\phi_1\phi_2X_{21}X_{22}+\phi_2^2X_{22}^2\right)+\left(\phi_1^2X_{11}^2+2\phi_1\phi_2X_{11}X_{12}+\phi_2^2X_{12}^2\right)\\-2\left(\phi_1^2X_{11}X_{21}+\phi_1\phi_2X_{12}X_{21}+\phi_1\phi_2X_{11}X_{22}+\phi_2^2X_{12}X_{22}\right)\end{array}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\phi_1^2\left\{k_1X_{11}^2+k_2\left(X_{11}^2-2X_{21}X_{11}+X_{21}^2\right)\right\}+\phi_2^2\left\{k_1X_{12}^2+k_2\left(X_{22}^2-2X_{12}X_{22}+X_{12}^2\right)\right\}\right]$$
$$+\phi_1\phi_2\left\{k_1X_{11}X_{12}+k_2X_{21}X_{22}-k_2X_{12}X_{21}-k_2X_{11}X_{22}+k_2X_{11}X_{12}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\phi_1^2\left\{k_1X_{11}^2+k_2\left(X_{21}-X_{11}\right)^2\right\}+\phi_2^2\left\{k_1X_{12}^2+k_2\left(X_{22}-X_{12}\right)^2\right\}\right]$$
$$+\phi_1\phi_2\left\{\left(k_1+k_2\right)X_{11}X_{12}-k_2X_{21}X_{12}-k_2X_{11}X_{22}+k_2X_{21}X_{22}\right\}$$

ここで、第２項（$\phi_1\phi_2$ の項）について考えてみる。基準振動の直交性の式を書き直すと、

$$k_{11}X_{11}X_{12}+k_{12}X_{21}X_{12}+k_{21}X_{11}X_{22}+k_{22}X_{21}X_{22}=0$$

と表される。【２自由度系の自由振動に関する資料参照，式(23)】

さらに、剛性マトリクス $[K]=\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\-k_2 & k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}$ の定義より、

$$\left(k_1+k_2\right)X_{11}X_{12}-k_2X_{21}X_{12}-k_2X_{11}X_{22}+k_2X_{21}X_{22}=0$$

となり、第２項（$\phi_1\phi_2$ の項）は０となる。

したがって、ひずみエネルギー V は一般座標 ϕ_1， ϕ_2 の２乗の項のみを含む次のような式になる。

$$V=\frac{1}{2}\left[\phi_1^2\left\{k_1X_{11}^2+k_2\left(X_{21}-X_{11}\right)^2\right\}+\phi_2^2\left\{k_1X_{12}^2+k_2\left(X_{22}-X_{12}\right)^2\right\}\right] \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

運動エネルギーおよびひずみエネルギーの式において、異なる一般座標の間の積および異なる一般速度の間の積の項が消失し、２乗の項のみで表されるように選ばれた一般座標を**基準座標**(normal coordinate)という。一般に基準振動形の重ね合わせる割合 ϕ_s を一般座標にとれば必ず基準座標となる。

次に、散逸関数 F は、ひずみエネルギーの場合と同様にして次のようになる。

$$F=\frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)^2=\frac{1}{2}c_1\left(\sum_{s=1}^{2}\dot{\phi}_s X_{1s}\right)^2+\frac{1}{2}c_2\left(\sum_{s=1}^{2}\dot{\phi}_s X_{2s}-\sum_{s=1}^{2}\dot{\phi}_s X_{1s}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}c_1\left(\dot{\phi}_1X_{11}+\dot{\phi}_2X_{12}\right)^2+\frac{1}{2}c_2\left\{\left(\dot{\phi}_1X_{21}+\dot{\phi}_2X_{22}\right)-\left(\dot{\phi}_1X_{11}+\dot{\phi}_2X_{12}\right)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}+c_1\left(\dot{\phi}_1^2X_{11}^2+2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2X_{11}X_{12}+\dot{\phi}_2^2X_{12}^2\right)\\+c_2\left\{\left(\dot{\phi}_1X_{21}+\dot{\phi}_2X_{22}\right)^2-2\left(\dot{\phi}_1X_{21}+\dot{\phi}_2X_{22}\right)\left(\dot{\phi}_1X_{11}+\dot{\phi}_2X_{12}\right)+\left(\dot{\phi}_1X_{11}+\dot{\phi}_2X_{12}\right)^2\right\}\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[c_1\left(\dot{\phi}_1^2X_{11}^2+2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2X_{11}X_{12}+\dot{\phi}_2^2X_{12}^2\right)+c_2\left\{\begin{array}{l}+\left(\dot{\phi}_1^2X_{21}^2+2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2X_{21}X_{22}+\dot{\phi}_2^2X_{22}^2\right)+\left(\dot{\phi}_1^2X_{11}^2+2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2X_{11}X_{12}+\dot{\phi}_2^2X_{12}^2\right)\\-2\left(\dot{\phi}_1^2X_{11}X_{21}+\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2X_{12}X_{21}+\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2X_{11}X_{22}+\dot{\phi}_2^2X_{12}X_{22}\right)\end{array}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\dot{\phi}_1^2\left\{c_1X_{11}^2+c_2\left(X_{11}^2-2X_{21}X_{11}+X_{21}^2\right)\right\}+\dot{\phi}_2^2\left\{c_1X_{12}^2+c_2\left(X_{22}^2-2X_{12}X_{22}+X_{12}^2\right)\right\}\right]$$
$$+\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\left\{c_1X_{11}X_{12}+c_2X_{21}X_{22}-c_2X_{12}X_{21}-c_2X_{11}X_{22}+c_2X_{11}X_{12}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\dot{\phi}_1^2\left\{c_1X_{11}^2+c_2\left(X_{21}-X_{11}\right)^2\right\}+\dot{\phi}_2^2\left\{c_1X_{12}^2+c_2\left(X_{22}-X_{12}\right)^2\right\}\right]$$
$$+\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\left\{\left(c_1+c_2\right)X_{11}X_{12}-c_2X_{12}X_{21}-c_2X_{11}X_{22}+c_2X_{21}X_{22}\right\}$$

減衰係数 c_1，c_2 が任意の値の場合には、一般速度 $\dot{\phi}_1$ および $\dot{\phi}_2$ の 2 乗の項のみでなく、積 $\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2$ の項まで含まれるので、各次数の振動は減衰力によって連成され、振動形解析法の利点が失われる。
しかし、もし、減衰係数 c_1，c_2 が、質量，減衰，剛性マトリクスをそれぞれ

$[M]=\begin{bmatrix}m_1&0\\0&m_2\end{bmatrix}$，$[C]=\begin{bmatrix}c_1+c_2&-c_2\\-c_2&c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{bmatrix}$，$[K]=\begin{bmatrix}k_1+k_2&-k_2\\-k_2&k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{bmatrix}$とするとき、

$$[C]=a[M]+b[K]$$

のような関係を有する場合には、次のようになる。ここに、a，b は 0 を含む任意定数である。

$$\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1+c_2&-c_2\\-c_2&c_2\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}m_1&0\\0&m_2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}am_1+bk_{11}&bk_{12}\\bk_{21}&am_2+bk_{22}\end{bmatrix}$$

であるから、

$$\left(c_1+c_2\right)X_{11}X_{12}-c_2X_{12}X_{21}-c_2X_{11}X_{22}+c_2X_{21}X_{22}$$
$$=c_{11}X_{11}X_{12}+c_{12}X_{12}X_{21}+c_{21}X_{11}X_{22}+c_{22}X_{21}X_{22}$$
$$=\left(am_1+bk_{11}\right)X_{11}X_{12}+bk_{12}X_{12}X_{21}+bk_{21}X_{11}X_{22}+\left(am_2+bk_{22}\right)X_{21}X_{22}$$
$$=a\left(m_1X_{11}X_{12}+m_2X_{21}X_{22}\right)+b\left(k_{11}X_{11}X_{12}+k_{12}X_{12}X_{21}+k_{21}X_{11}X_{22}+k_{22}X_{21}X_{22}\right)$$

となり、ここで、基準振動の直交性の式 $m_1X_{11}X_{12}+m_2X_{21}X_{22}=0$ と
それを書き直した $k_{11}X_{11}X_{12}+k_{12}X_{21}X_{12}+k_{21}X_{11}X_{22}+k_{22}X_{21}X_{22}=0$ を用いると、

$$\left(c_1+c_2\right)X_{11}X_{12}-c_2X_{12}X_{21}-c_2X_{11}X_{22}+c_2X_{21}X_{22}=0$$

となり、第 2 項（積 $\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2$ の項）は消失し、散逸関数は一般速度 $\dot{\phi}_1$ または $\dot{\phi}_2$ の 2 乗の項のみを含む次のような式になる。

$$F=\frac{1}{2}\left[\dot{\phi}_1^2\left\{c_1X_{11}^2+c_2\left(X_{21}-X_{11}\right)^2\right\}+\dot{\phi}_2^2\left\{c_1X_{12}^2+c_2\left(X_{22}-X_{12}\right)^2\right\}\right]\qquad\cdots\cdots\cdots(10)$$

さらに、一般力 Q_s は基準座標 ϕ_1 に対して、

$$Q_1=X_{11}P_1\cos\omega t+X_{21}P_2\cos\omega t=\left(X_{11}P_1+X_{21}P_2\right)\cos\omega t\qquad\cdots\cdots\cdots(11)$$

基準座標 ϕ_2 に対して、

$$Q_2=X_{12}P_1\cos\omega t+X_{22}P_2\cos\omega t=\left(X_{12}P_1+X_{22}P_2\right)\cos\omega t\qquad\cdots\cdots\cdots(11)'$$

となる。

このの K,V,F,Q の値をラグランジュの運動方程式に代入すれば、基準座標 ϕ_s に関する次のような振動方程式が得られる。*)

$$\left(m_1X_{1s}^2+m_2X_{2s}^2\right)\ddot{\phi}_s+\left\{c_1X_{1s}^2+c_2\left(X_{2s}-X_{1s}\right)^2\right\}\dot{\phi}_s+\left\{k_1X_{1s}^2+k_2\left(X_{2s}-X_{1s}\right)^2\right\}\phi_s$$
$$=\left(X_{1s}P_1+X_{2s}P_2\right)\cos\omega t\quad\left(s=1,2\right)\qquad\cdots\cdots\cdots(12)$$

この式は、基準座標ϕ_sに対して独立の振動方程式であり、各次数の振動が 1 質点系の振動方程式と全く同様に解かれることを示している。ここに振動形解析法の利点がある。

式(12)において、一般加速度$\ddot{\phi}_s$の係数（M_sとおく）を s 次の基準座標に対する**換算質量**(equivalent mass)，一般速度$\dot{\phi}_s$の係数（C_sとおく）を s 次の基準座標に対する**換算減衰係数**(equivalent damping coefficient)，一般座標ϕ_sの係数（K_sとおく）を s 次の基準座標に対する**換算バネ定数**(equivalent spring constant)，右辺（Q_sとおく）を s 次の基準座標に対する**換算外力**(equivalent external force)と呼ぶ。換算質量，換算減衰係数，換算バネ定数，換算外力は振動形の選び方で異なってくるもので、振動形の正規化とは、換算質量が単位の大きさになるように振動形を選ぶことである。しかし、振動形をどのように選んでも基準振動の減衰定数h_s，固有円振動数ω_sおよび応答値は変わらない。

式(12)の両辺をM_sで除し、整理すれば次の式が得られる。

$$M_s\ddot{\phi}_s + C_s\dot{\phi}_s + K_s\phi_s = Q_s\cos\omega t \quad (s=1,2) \qquad \cdots\cdots\cdots(13)$$

$$\therefore \boxed{\ddot{\phi}_s + 2h_s\omega_s\dot{\phi}_s + \omega_s^2\phi_s = p_s\cos\omega t \quad (s=1,2)} \qquad \cdots\cdots\cdots(13)'$$

ここに、

$$\left\{\begin{aligned}
\omega_s^2 &= \frac{K_s}{M_s} = \frac{k_1X_{1s}^2 + k_2\left(X_{2s}-X_{1s}\right)^2}{m_1X_{1s}^2 + m_2X_{2s}^2} \\
h_s &= \frac{C_s}{2\sqrt{M_sK_s}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{c_1X_{1s}^2 + c_2\left(X_{2s}-X_{1s}\right)^2}{\sqrt{\left(m_1X_{1s}^2 + m_2X_{2s}^2\right)\left\{k_1X_{1s}^2 + k_2\left(X_{2s}-X_{1s}\right)^2\right\}}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{C_s}{M_s\omega_s} = \frac{1}{2}\cdot\frac{c_1X_{1s}^2 + c_2\left(X_{2s}-X_{1s}\right)^2}{\left(m_1X_{1s}^2 + m_2X_{2s}^2\right)\omega_s} \qquad \left(\because K_s = M_s\omega_s^2\right) \\
p_s &= \frac{Q_s}{M_s} = \frac{X_{1s}P_1 + X_{2s}P_2}{m_1X_{1s}^2 + m_2X_{2s}^2}
\end{aligned}\right. \quad (s=1,2) \qquad \cdots\cdots\cdots(14)$$

ω_sはこの系の s 次の固有円振動数，h_sは s 次の減衰定数である。式(14)は s 次の基準振動の減衰定数h_sが減衰係数c_1，c_2を用いて計算できることを示しているが、実際問題ではh_sは実物に対する振動実験から得られることが多く、式(14)はむしろ実測されたh_sに合致するようにc_1，c_2を決定する場合に利用される。

さて、式(13)の解は、1 自由度系振動の結果を参照して次のように得られる。

$$\begin{aligned}
\phi_s &= e^{-h_s\omega_s t}\left(\bar{A}_s\cos\omega_s' t + \bar{B}_s\sin\omega_s' t\right) \\
&\quad + \frac{p_s}{\omega_s^2}\cdot\frac{\cos\left(\omega t-\varphi_s\right)}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_s^2}\right)^2 + 4h_s^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_s}\right)^2}}
\end{aligned}
\qquad
\left\{\begin{aligned}
\tan\varphi_s &= \frac{2h_s\left(\dfrac{\omega}{\omega_s}\right)}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_s^2}} \\
\omega_s' &= \omega_s\sqrt{1-h_s^2}
\end{aligned}\right. \quad (s=1,2) \qquad \cdots\cdots\cdots(15)$$

したがって、ラーメンの第 i 層の水平変位は次のようになる。

$$x_i(t) = \sum_{s=1}^{2}\left\{\begin{aligned}
&e^{-h_s\omega_s t}\left(\bar{A}_s\cos\omega_s' t + \bar{B}_s\sin\omega_s' t\right) \\
&\qquad + \frac{p_s}{\omega_s^2}\cdot\frac{\cos\left(\omega t-\varphi_s\right)}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_s^2}\right)^2 + 4h_s^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_s}\right)^2}}
\end{aligned}\right\}\cdot X_{is} \qquad \cdots\cdots\cdots(16)$$

任意定数$\bar{A}_s$，$\bar{B}_s$は初期条件によって決定されるが、〝2 自由度系の自由振動〟の定数とは異なる。式(16)の第 1 項は自由振動の項であり、十分時間が経過すればなくなり、第 2 項の強制項のみとなる。また、外力の振動数が系の固有振動数の 1 つに近づけば、その振動数の振動が増大し共振することがわ

かる。本法は基準振動の大きさを各次独立に求め、それらを重ね合わせることによって系の応答を求めるものであるから、**振動形解析法（モード解析法）**(method of modal analysis)と呼ばれる。振動形解析法においては、基準座標 ϕ_s に関する微分方程式の形は必ず式(13)の左辺の形となるから、換算外力 Q_s および換算質量 M_s のみを計算すれば、基準座標 ϕ_s に関する微分方程式が直ちに得られる。

*)「この K,V,F,Q の値をラグランジュの運動方程式に代入すれば、基準座標 ϕ_s に関する次のような振動方程式が得られる。」の証明

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_s}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial V}{\partial q_s}=Q_s\ (s=1,2,\cdots,m) \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

$$K=\frac{1}{2}\left[\dot{\phi}_1^2\left(m_1X_{11}^2+m_2X_{21}^2\right)+\dot{\phi}_2^2\left(m_1X_{12}^2+m_2X_{22}^2\right)\right] \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

$$V=\frac{1}{2}\left[\phi_1^2\left\{k_1X_{11}^2+k_2\left(X_{21}-X_{11}\right)^2\right\}+\phi_2^2\left\{k_1X_{12}^2+k_2\left(X_{22}-X_{12}\right)^2\right\}\right] \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

$$F=\frac{1}{2}\left[\dot{\phi}_1^2\left\{c_1X_{11}^2+c_2\left(X_{21}-X_{11}\right)^2\right\}+\dot{\phi}_2^2\left\{c_1X_{12}^2+c_2\left(X_{22}-X_{12}\right)^2\right\}\right] \qquad \cdots\cdots\cdots(10)$$

$$Q_1=X_{11}P_1\cos\omega t+X_{21}P_2\cos\omega t=\left(X_{11}P_1+X_{21}P_2\right)\cos\omega t \qquad \cdots\cdots\cdots(11)$$

$$Q_2=X_{12}P_1\cos\omega t+X_{22}P_2\cos\omega t=\left(X_{12}P_1+X_{22}P_2\right)\cos\omega t \qquad \cdots\cdots\cdots(11)'$$

基準座標 ϕ_1 について、(8)(9)(10)式を(6)式に代入すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}_1}\right)=\frac{d}{dt}\left\{\dot{\phi}_1\left(m_1X_{11}^2+m_2X_{21}^2\right)\right\}=\ddot{\phi}_1\left(m_1X_{11}^2+m_2X_{21}^2\right) \qquad \frac{\partial K}{\partial \phi_1}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}_1}=\dot{\phi}_1\left\{c_1X_{11}^2+c_2\left(X_{21}-X_{11}\right)^2\right\} \qquad \frac{\partial V}{\partial \phi_1}=\phi_1\left\{k_1X_{11}^2+k_2\left(X_{21}-X_{11}\right)^2\right\}$$

だから、これらと(11)式より、次のような振動方程式が得られる。

$$\ddot{\phi}_1\left(m_1X_{11}^2+m_2X_{21}^2\right)+\dot{\phi}_1\left\{c_1X_{11}^2+c_2\left(X_{21}-X_{11}\right)^2\right\}+\phi_1\left\{k_1X_{11}^2+k_2\left(X_{21}-X_{11}\right)^2\right\}$$
$$=\left(X_{11}P_1+X_{21}P_2\right)\cos\omega t$$

基準座標 ϕ_2 について、(8)(9)(10)式を(6)式に代入すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\phi}_2}\right)=\frac{d}{dt}\left\{\dot{\phi}_2\left(m_1X_{12}^2+m_2X_{22}^2\right)\right\}=\ddot{\phi}_2\left(m_1X_{12}^2+m_2X_{22}^2\right) \qquad \frac{\partial K}{\partial \phi_2}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}_2}=\dot{\phi}_2\left\{c_1X_{12}^2+c_2\left(X_{22}-X_{12}\right)^2\right\} \qquad \frac{\partial V}{\partial \phi_2}=\phi_2\left\{k_1X_{12}^2+k_2\left(X_{22}-X_{12}\right)^2\right\}$$

だから、これらと(11)'式より、次のような振動方程式が得られる。

$$\ddot{\phi}_2\left(m_1X_{12}^2+m_2X_{22}^2\right)+\dot{\phi}_2\left\{c_1X_{12}^2+c_2\left(X_{22}-X_{12}\right)^2\right\}+\phi_2\left\{k_1X_{12}^2+k_2\left(X_{22}-X_{12}\right)^2\right\}$$
$$=\left(X_{12}P_1+X_{22}P_2\right)\cos\omega t$$

基準座標 ϕ_s に関してまとめると、次のような振動方程式が得られる。

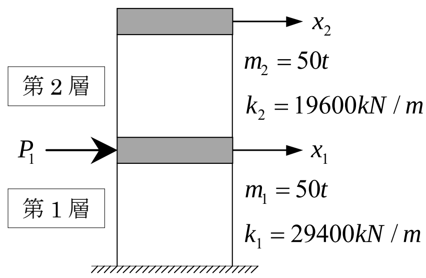
$$\left(m_1X_{1s}^2+m_2X_{2s}^2\right)\ddot{\phi}_s+\left\{c_1X_{1s}^2+c_2\left(X_{2s}-X_{1s}\right)^2\right\}\dot{\phi}_s+\left\{k_1X_{1s}^2+k_2\left(X_{2s}-X_{1s}\right)^2\right\}\phi_s$$
$$=\left(X_{1s}P_1+X_{2s}P_2\right)\cos\omega t \quad \left(s=1,2\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(12)$$

【振動形解析法の例題】

右図に示すような〝2 自由度系の自由振動の例題〟（資料／2 自由度系の自由振動№.6，№.7）を対象とする。

この 2 層ラーメンの第１層にのみ $P_1 = 98\cos(10t)\ (kN)$ の外力が水平に作用するとき、時間が充分経過した後の各層の水平変位および各層のせん断力の最大値を求めよ。

ただし、減衰定数 h_s は 1 次，2 次モード共に 10%すなわち $h_1 = h_2 = 0.1$ とする。



≪ 解 答 例 ≫

資料／2 自由度系の自由振動№.6，№.7 より、この系の固有円振動数は、

$$1次：\omega_1^2 = 196，\quad \omega_1 = \sqrt{196} = 14.00 \qquad 2次：\omega_2^2 = 1176，\quad \omega_2 = \sqrt{1176} = 14\sqrt{6} \cong 34.29$$

であり、固有振動モードは、第１層を１とした場合、

$$1次：\frac{X_{21}}{X_{11}} = 2 \Rightarrow X_{11} = 1，\quad X_{21} = 2 \qquad 2次：\frac{X_{22}}{X_{12}} = -0.5 \Rightarrow X_{12} = 1，\quad X_{22} = -0.5$$

であるから、

まず、(14)式で表される換算外力 p_s は、次のように計算される。

$$p_1 = \frac{X_{11}P_1 + X_{21}P_2}{m_1X_{11}^2 + m_2X_{21}^2} = \frac{1\times98 + 2\times0}{50\times1^2 + 50\times2^2} = \frac{98}{250} = 0.392$$

$$p_2 = \frac{X_{12}P_1 + X_{22}P_2}{m_1X_{12}^2 + m_2X_{22}^2} = \frac{1\times98 + (-0.5)\times0}{50\times1^2 + 50\times(-0.5)^2} = \frac{98}{62.5} = 1.568$$

次に、(15)式で表される位相差 φ_s は、次のように計算される。

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\left\{\frac{2h_1(\omega/\omega_1)}{1-(\omega^2/\omega_1^2)}\right\} = \tan^{-1}\left\{\frac{2\times0.1\times(10/14)}{1-(10^2/196)}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{0.142857\cdots}{0.489796\cdots}\right)$$

$$= \tan^{-1}(0.291666\cdots) = 0.283794109\cdots \cong 0.284$$

$$\varphi_2 = \tan^{-1}\left\{\frac{2h_2(\omega/\omega_2)}{1-(\omega^2/\omega_2^2)}\right\} = \tan^{-1}\left\{\frac{2\times0.1\times(10/34.29)}{1-(10^2/1176)}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{0.058321\cdots}{0.914965\cdots}\right)$$

$$= \tan^{-1}(0.063741369\cdots) = 0.063655252\cdots \cong 0.064$$

よって、(15)式で表される一般座標 ϕ_s は、時間が充分経過した後なので、減衰自由振動項（第 1 項）はゼロに収束し、強制振動項（第２項）のみとなるから、次のように計算される。

$$\phi_1 = \frac{p_1}{\omega_1^2}\cdot\frac{\cos(\omega t-\varphi_1)}{\sqrt{(1-\omega^2/\omega_1^2)^2 + 4h_1^2(\omega/\omega_1)^2}} = \frac{0.392}{196}\cdot\frac{\cos(10t-0.284)}{\sqrt{(1-10^2/196)^2 + 4\times0.1^2\times(10^2/196)}}$$

$$= 0.00392\cos(10t-0.284)$$

$$\phi_2 = \frac{p_2}{\omega_2^2}\cdot\frac{\cos(\omega t-\varphi_2)}{\sqrt{(1-\omega^2/\omega_2^2)^2 + 4h_2^2(\omega/\omega_2)^2}} = \frac{1.568}{1176}\cdot\frac{\cos(10t-0.064)}{\sqrt{(1-10^2/1176)^2 + 4\times0.1^2\times(10^2/1176)}}$$

$$= 0.001454297\cdots\cos(10t-0.064) \cong 0.001454\cos(10t-0.064)$$

したがって、時間が充分経過した後の各層の水平変位 $x_i(t)$ は、(16)式から、次のように計算される。

$$x_1(t) = \phi_1X_{11} + \phi_2X_{12}$$
$$= 0.00392\cos(10t-0.284)\times1 + 0.001454\cos(10t-0.064)\times1$$
$$= 0.00392\cos(10t-0.284) + 0.001454\cos(10t-0.064)$$

$$x_2(t) = \phi_1X_{21} + \phi_2X_{22}$$
$$= 0.00392\cos(10t-0.284)\times2 + 0.001454\cos(10t-0.064)\times(-0.5)$$
$$= 0.00784\cos(10t-0.284) - 0.00073\cos(10t-0.064)$$

これを図示すると、次頁の下図のようになる。

ところで、問題は、各層の水平変位 $x_i(t)$ の最大値を求めることを要求しているので、上記の式のような場合の最大値の求め方を以下に示す。

まず、三角関数の係数を A, B とおいて、変形すると次のようになる。

$$A\cos(\omega t-\varphi_1)\pm B\cos(\omega t-\varphi_2)=A\left\{\cos\omega t\cdot\cos\varphi_1+\sin\omega t\cdot\sin\varphi_1\right\}\pm B\left\{\cos\omega t\cdot\cos\varphi_2+\sin\omega t\cdot\sin\varphi_2\right\}$$

$$=\left(A\cdot\cos\varphi_1\pm B\cdot\cos\varphi_2\right)\cos\omega t+\left(A\cdot\sin\varphi_1\pm B\cdot\sin\varphi_2\right)\sin\omega t$$

$$=\sqrt{\left(A\cdot\cos\varphi_1\pm B\cdot\cos\varphi_2\right)^2+\left(A\cdot\sin\varphi_1\pm B\cdot\sin\varphi_2\right)^2}\cos\left(\omega t-\delta\right)=\sqrt{C}\cos\left(\omega t-\delta\right)$$

なお、ここで、以下のように表す。

$$C=\left(A\cdot\cos\varphi_1\pm B\cdot\cos\varphi_2\right)^2+\left(A\cdot\sin\varphi_1\pm B\cdot\sin\varphi_2\right)^2$$

$$\cos\delta=\frac{A\cdot\cos\varphi_1\pm B\cdot\cos\varphi_2}{\sqrt{C}},\quad \sin\delta=\frac{A\cdot\sin\varphi_1\pm B\cdot\sin\varphi_2}{\sqrt{C}}$$

次に、根号内 C を変形すると、以下のようになる。

$$C=\left(A\cdot\cos\varphi_1\pm B\cdot\cos\varphi_2\right)^2+\left(A\cdot\sin\varphi_1\pm B\cdot\sin\varphi_2\right)^2$$

$$=A^2\left(\cos^2\varphi_1+\sin^2\varphi_1\right)+B^2\left(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2\right)\pm 2AB\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)$$

$$=A^2+B^2\pm 2AB\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)$$

よって、 $A\cos(\omega t-\varphi_1)\pm B\cos(\omega t-\varphi_2)=\sqrt{A^2+B^2\pm 2AB\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)}\cos\left(\omega t-\delta\right)$ となり、最大値は、$\sqrt{A^2+B^2\pm 2AB\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)}$ と表される。

ゆえに、各層の水平変位 $x_i(t)$ の最大値は、次のように計算される。

$$x_{1\max}=\sqrt{0.00392^2+0.001454^2+2\times 0.0392\times 0.001454\times\cos\left(0.283794109-0.063655252\right)}$$

$$=0.005348637\cong 0.00535\,(m)$$

$$x_{2\max}=\sqrt{0.00784^2+0.00073^2-2\times 0.00784\times 0.00073\times\cos\left(0.283794109-0.063655252\right)}$$

$$=0.007132167\cong 0.00713\,(m)$$

次に、各層に作用するせん断力 $Q_i(t)$ の最大値は、次のような式で表される。

$$Q_{1\max}=k_1x_{1\max}\qquad Q_{2\max}=k_2\left(x_2-x_1\right)_{\max}$$

そこで、第１層と第２層の相対変位を求めると、次のようになる。

$$x_2(t)-x_1(t)=\phi_1X_{21}+\phi_2X_{22}-\left(\phi_1X_{11}+\phi_2X_{12}\right)=\phi_1\left(X_{21}-X_{11}\right)+\phi_2\left(X_{22}-X_{12}\right)$$

$$=0.00392\cos\left(10t-0.284\right)\times\left(2-1\right)+0.00145\cos\left(10t-0.064\right)\times\left(-0.5-1\right)$$

$$=0.00392\cos\left(10t-0.284\right)-0.00218\cos\left(10t-0.064\right)$$

したがって、相対変位の最大値は、水平変位の最大値と同様に、次のように計算される。

$$\left(x_2-x_1\right)_{\max}=\sqrt{0.00392^2+0.00218^2-2\times 0.00392\times 0.00218\times\cos\left(0.283794109-0.063655252\right)}$$

$$=0.001853457\cong 0.00185\,(m)$$

ゆえに、各層に作用するせん断力 $Q_i(t)$ の最大値は、次のように計算される。

$$Q_{1\max}=k_1x_{1\max}=29400\times 0.005348637=157.2499343\cong 157.2\,(kN)$$

$$Q_{2\max}=k_2\left(x_2-x_1\right)_{\max}=19600\times 0.001853457=36.32774971\cong 36.3\,(kN)$$

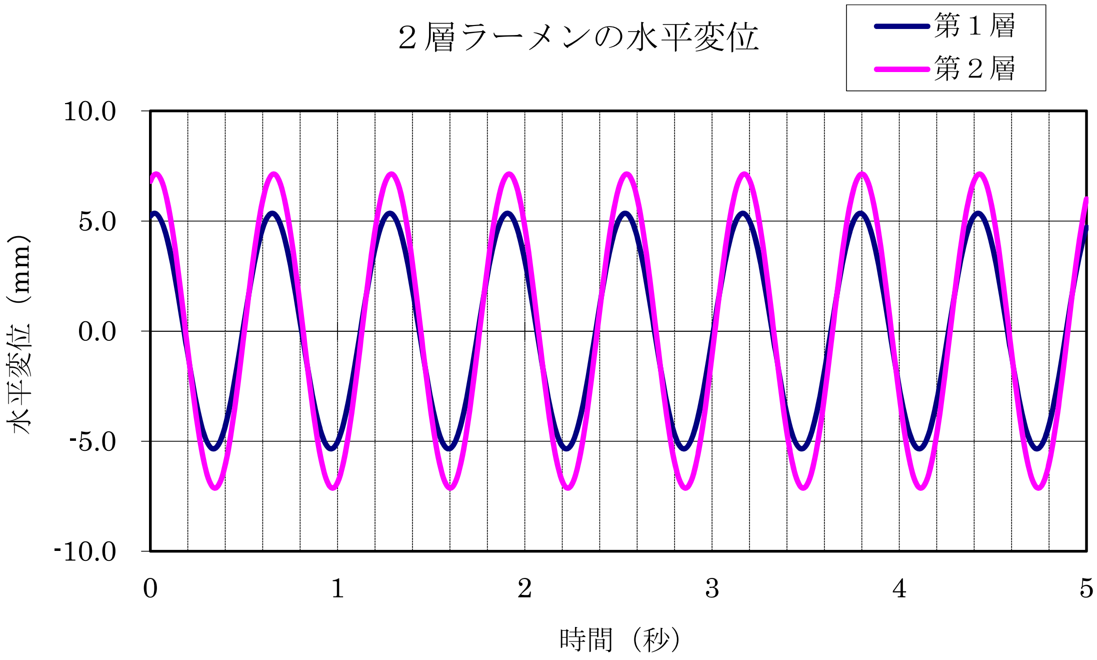
【答】

各層の水平変位 $x_i(t)$ の最大値：

$\boxed{x_{1\max}\cong 0.00535\,(m)}$,　　　$\boxed{x_{2\max}\cong 0.00713\,(m)}$

各層に作用するせん断力 $Q_i(t)$ の最大値：

$\boxed{Q_{1\max}\cong 157.2\,(kN)}$,　　　$\boxed{Q_{2\max}\cong 36.3\,(kN)}$


２層ラーメンの水平変位
第１層
第２層
10.0
5.0
0.0
-5.0
-10.0
水平変位（mm）
0
1
2
3
4
5
時間（秒）

まず、a_1，b_1を〝陽の形〟で求める。

式⑨を変形して、α，β，$\alpha^2+\beta^2$を代入すると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_1=\left\{m_2F_1\omega^2-\left(F_1+F_2\right)k_2\right\}\alpha-\left(F_1+F_2\right)c_2\beta\,\omega=m_2F_1\alpha\,\omega^2-\left(F_1+F_2\right)k_2\alpha-\left(F_1+F_2\right)c_2\beta\,\omega\\
&=m_2F_1\left\{-m_1m_2\omega^4+\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\omega^2-k_1k_2\right\}\omega^2-\left(F_1+F_2\right)k_2\left\{-m_1m_2\omega^4+\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\omega^2-k_1k_2\right\}\\
&\quad-\left(F_1+F_2\right)c_2\left\{\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\omega^3-\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\omega\right\}\omega\\
&=-m_1m_2^2F_1\omega^6+\left\{m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1+m_1m_2k_2\left(F_1+F_2\right)-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^4\\
&\quad+\left\{-m_2k_1k_2F_1-\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)k_2\left(F_1+F_2\right)+\left(k_1c_2+k_2c_1\right)c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^2+k_1k_2^2\left(F_1+F_2\right)
\end{aligned}
$$

同様に、式⑩を変形して、α，β，$\alpha^2+\beta^2$を代入すると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_1=\left\{m_2F_1\omega^2-\left(F_1+F_2\right)k_2\right\}\beta+\left(F_1+F_2\right)c_2\alpha\,\omega=m_2F_1\,\beta\omega^2-\left(F_1+F_2\right)k_2\beta+\left(F_1+F_2\right)c_2\alpha\,\omega\\
&=m_2F_1\left\{\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\omega^3-\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\omega\right\}\omega^2-\left(F_1+F_2\right)k_2\left\{\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\omega^3-\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\omega\right\}\\
&\quad+\left(F_1+F_2\right)c_2\left\{-m_1m_2\omega^4+\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\omega^2-k_1k_2\right\}\omega\\
&=\left\{m_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1-m_1m_2c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^5\\
&\quad+\left\{-m_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1-k_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^3\\
&\quad+\left\{k_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-k_1k_2c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega
\end{aligned}
$$

次に、a_2，b_2を〝陽の形〟で求める。

まず、式⑤を変形して、α，β，$\alpha^2+\beta^2$を代入すると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&m_2\omega^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_2=\left(k_1-m_1\omega^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_1+c_1\omega\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_1-\left(F_1+F_2\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)\\
&=k_1\cdot\left[\begin{array}{l}
-m_1m_2^2F_1\omega^6+k_1k_2^2\left(F_1+F_2\right)\\
+\left\{+m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1+m_1m_2k_2\left(F_1+F_2\right)-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)c_2(F_1+F_2)\right\}\omega^4\\
+\left\{-m_2k_1k_2F_1-\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)k_2\left(F_1+F_2\right)+\left(k_1c_2+k_2c_1\right)c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^2
\end{array}\right]\\
&\quad-m_1\omega^2\cdot\left[\begin{array}{l}
-m_1m_2^2F_1\omega^6+k_1k_2^2\left(F_1+F_2\right)\\
+\left\{+m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1+m_1m_2k_2\left(F_1+F_2\right)-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^4\\
+\left\{-m_2k_1k_2F_1-\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)k_2\left(F_1+F_2\right)+\left(k_1c_2+k_2c_1\right)c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^2
\end{array}\right]\\
&\quad+c_1\omega\cdot\left[\begin{array}{l}
\left\{+m_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1-m_1m_2c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^5\\
+\left\{-m_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1-k_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^3\\
+\left\{+k_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-k_1k_2c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega
\end{array}\right]\\
&\quad-\left(F_1+F_2\right)\cdot\left[\begin{array}{l}
+m_1^2m_2^2\omega^8+k_1^2k_2^2+\left\{+\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)^2-2m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\right\}\omega^6\\
+\left\{+\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)^2-2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(k_1c_2+k_2c_1\right)+2m_1m_2k_1k_2\right\}\omega^4\\
+\left\{+\left(k_1c_2+k_2c_1\right)^2-2k_1k_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\right\}\omega^2
\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

これを、ωのべき数で整理すると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&m_2\omega^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_2=\left\{m_1^2m_2^2F_1-m_1^2m_2^2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^8\\
&\quad+\left\{\begin{array}{l}
-m_1m_2^2k_1F_1-m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1-m_1^2m_2k_2\left(F_1+F_2\right)+m_1c_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\\
+m_2c_1\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1-m_1m_2c_1c_2\left(F_1+F_2\right)-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)^2\left(F_1+F_2\right)\\
+2m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)
\end{array}\right\}\omega^6\\
&\quad+\left\{\begin{array}{l}
+m_2k_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1+m_1m_2k_1k_2\left(F_1+F_2\right)-k_1c_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+m_1m_2k_1k_2F_1\\
+m_1k_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)-m_1c_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-m_2c_1\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1\\
-k_2c_1\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+c_1c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\\
-\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)^2\left(F_1+F_2\right)+2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-2m_1m_2k_1k_2\left(F_1+F_2\right)
\end{array}\right\}\omega^4\\
&\quad+\left\{\begin{array}{l}
-m_2k_1^2k_2F_1-k_1k_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+k_1c_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-m_1k_1k_2^2\left(F_1+F_2\right)\\
+k_2c_1\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-k_1k_2c_1c_2\left(F_1+F_2\right)-\left(k_1c_2+k_2c_1\right)^2\left(F_1+F_2\right)\\
+2k_1k_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)
\end{array}\right\}\omega^2\\
&\quad+\left\{k_1^2k_2^2\left(F_1+F_2\right)-k_1^2k_2^2\left(F_1+F_2\right)\right\}
\end{aligned}
$$

さらに、ω のべき数項ごとに整理すると、次のようになる。

$$\left\{m_1^2m_2^2F_1-m_1^2m_2^2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^8=-m_1^2m_2^2F_2\omega^8$$

$$\left\{\begin{aligned}&-m_1m_2^2k_1F_1-m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1-m_1^2m_2k_2\left(F_1+F_2\right)+m_1c_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\\&+m_2c_1\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1-m_1m_2c_1c_2\left(F_1+F_2\right)-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)^2\left(F_1+F_2\right)\\&+2m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\end{aligned}\right\}\omega^6$$

$$=\left\{\begin{aligned}&-m_1m_2^2k_1F_1-m_1^2m_2k_2F_1-m_1m_2c_1c_2F_1-m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1+m_1c_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1\\&+m_2c_1\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)^2F_1+2m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1\\&-m_1^2m_2k_2F_2-m_1m_2c_1c_2F_2+m_1c_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_2-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)^2F_2+2m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_2\end{aligned}\right\}\omega^6$$

$$=\left\{\begin{aligned}&+m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1-m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+c_1c_2\right)F_1\\&+\left(m_1c_2+m_2c_1\right)\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)^2F_1\\&+2m_1m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_2-m_1m_2\left(m_1k_2+c_1c_2\right)F_2\\&+m_1c_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_2-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)^2F_2\end{aligned}\right\}\omega^6$$

$$=\left\{\begin{aligned}&+m_1m_2^2k_2F_1-m_2c_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1\\&+m_1m_2\left(m_1k_2+2m_2k_1+2m_2k_2+c_1c_2\right)F_2-\left(m_2c_1+m_2c_2\right)\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_2\end{aligned}\right\}\omega^6$$

$$=m_2\left\{m_1m_2k_2F_1-c_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1+m_1\left(m_1k_2+2m_2k_1+2m_2k_2+c_1c_2\right)F_2-\left(c_1+c_2\right)\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_2\right\}\omega^6$$

$$=m_2\left[m_1\left\{m_2k_2F_1+\left(m_1k_2+2m_2k_1+2m_2k_2+c_1c_2\right)F_2\right\}-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(c_2F_1+c_1F_2+c_2F_2\right)\right]\omega^6$$

$$=m_2\left[m_1\left\{m_2k_2F_1+m_2k_1F_2+m_2k_2F_2+\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_2\right\}-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left\{c_1F_2+c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\right]\omega^6$$

$$=m_2\left[m_1m_2\left\{k_1F_2+k_2\left(F_1+F_2\right)\right\}+m_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_2-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left\{c_1F_2+c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\right]\omega^6$$

$$\left\{\begin{aligned}&+m_2k_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1+m_1m_2k_1k_2\left(F_1+F_2\right)-k_1c_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+m_1m_2k_1k_2F_1\\&+m_1k_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)-m_1c_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-m_2c_1\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1\\&-k_2c_1\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+c_1c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)-\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)^2\left(F_1+F_2\right)\\&+2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-2m_1m_2k_1k_2\left(F_1+F_2\right)\end{aligned}\right\}\omega^4$$

$$=\left\{\begin{aligned}&+m_2k_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1+m_1m_2k_1k_2F_1-m_2c_1\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1\\&+m_1m_2k_1k_2\left(F_1+F_2\right)-2m_1m_2k_1k_2\left(F_1+F_2\right)-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)\\&+2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-m_1c_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)\\&+\left(m_1k_2+c_1c_2\right)\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)-\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)^2\left(F_1+F_2\right)\end{aligned}\right\}\omega^4$$

$$=\left\{\begin{aligned}&+m_2k_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1+m_1m_2k_1k_2F_1-m_2c_1\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1\\&+\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-m_1c_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)\\&-\left(m_2k_1+m_2k_2\right)\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)-m_1m_2k_1k_2\left(F_1+F_2\right)\end{aligned}\right\}\omega^4$$

$$=\left\{\begin{aligned}&+m_2k_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1+m_1m_2k_1k_2F_1-m_2c_1\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1\\&+m_2\left(c_1+c_2\right)\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-m_2\left(k_1+k_2\right)\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)-m_1m_2k_1k_2\left(F_1+F_2\right)\end{aligned}\right\}\omega^4$$

$$=m_2\left\{\begin{aligned}&k_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1+m_1k_1k_2F_1-c_1\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1\\&+\left(c_1+c_2\right)\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-\left(k_1+k_2\right)\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)-m_1k_1k_2\left(F_1+F_2\right)\end{aligned}\right\}\omega^4$$

$$=m_2\left\{\begin{aligned}&k_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1-\left(k_1+k_2\right)\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\\&+\left(c_1+c_2\right)\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-c_1\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1+m_1k_1k_2F_1-m_1k_1k_2\left(F_1+F_2\right)\end{aligned}\right\}\omega^4$$

$$=m_2\left[\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left\{k_1F_1-\left(k_1+k_2\right)\left(F_1+F_2\right)\right\}+\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left\{\left(c_1+c_2\right)\left(F_1+F_2\right)-c_1F_1\right\}-m_1k_1k_2F_2\right]\omega^4$$

$$=m_2\left[-\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left\{k_1F_2+k_2\left(F_1+F_2\right)\right\}+\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left\{c_1F_2+c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}-m_1k_1k_2F_2\right]\omega^4$$

$$\left\{\begin{array}{l}-m_2k_1^2k_2F_1-k_1k_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+k_1c_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-m_1k_1k_2^2\left(F_1+F_2\right)\\+k_2c_1\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-k_1k_2c_1c_2\left(F_1+F_2\right)-\left(k_1c_2+k_2c_1\right)^2\left(F_1+F_2\right)+2k_1k_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\end{array}\right\}\omega^2$$

$$=\left[\begin{array}{l}+k_1k_2\left\{-m_2k_1F_1-m_1k_2\left(F_1+F_2\right)-c_1c_2\left(F_1+F_2\right)+\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\right\}\\+k_1c_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)+k_2c_1\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-\left(k_1c_2+k_2c_1\right)^2\left(F_1+F_2\right)\end{array}\right]\omega^2$$

$$=k_1k_2\left\{-m_2k_1F_1-m_1k_2\left(F_1+F_2\right)-c_1c_2\left(F_1+F_2\right)+\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^2$$

$$=k_1k_2\left[-m_2k_1F_1+\left(F_1+F_2\right)\left\{\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)-m_1k_2-c_1c_2\right\}\right]\omega^2=k_1k_2\left\{-m_2k_1F_1+\left(F_1+F_2\right)\left(m_2k_1+m_2k_2\right)\right\}\omega^2$$

$$=m_2k_1k_2\left\{-k_1F_1+\left(F_1+F_2\right)\left(k_1+k_2\right)\right\}\omega^2=m_2k_1k_2\left\{k_1F_2+k_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^2$$

$$\left\{k_1^2k_2^2\left(F_1+F_2\right)-k_1^2k_2^2\left(F_1+F_2\right)\right\}=0$$

したがって、式⑤は次のようになる。

$$\begin{aligned}m_2\omega^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_2&=-m_1^2m_2^2F_2\omega^8\\&+m_2\left[m_1m_2\left\{k_1F_2+k_2\left(F_1+F_2\right)\right\}+m_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_2-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left\{c_1F_2+c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\right]\omega^6\\&+m_2\left[-\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left\{k_1F_2+k_2\left(F_1+F_2\right)\right\}+\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left\{c_1F_2+c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}-m_1k_1k_2F_2\right]\omega^4\\&+m_2k_1k_2\left\{k_1F_2+k_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_2&=-m_1^2m_2F_2\omega^6\\&+\left[m_1m_2\left\{k_1F_2+k_2\left(F_1+F_2\right)\right\}+m_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_2-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left\{c_1F_2+c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\right]\omega^4\\&+\left[-\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left\{k_1F_2+k_2\left(F_1+F_2\right)\right\}+\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left\{c_1F_2+c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}-m_1k_1k_2F_2\right]\omega^2\\&+k_1k_2\left\{k_1F_2+k_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\end{aligned}$$

次に、同様に、式⑥を変形して、α，β，$\alpha^2+\beta^2$ を代入すると、次のようになる。

$$m_2\omega^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_2=\left(k_1-m_1\omega^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_1-c_1\omega\left(\alpha^2+\beta^2\right)a_1$$

$$=k_1\cdot\left[\begin{array}{l}\left\{m_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1-m_1m_2c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^5+\left\{k_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-k_1k_2c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega\\+\left\{-m_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1-k_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^3\end{array}\right]$$

$$-m_1\omega^2\cdot\left[\begin{array}{l}\left\{m_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1-m_1m_2c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^5+\left\{k_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-k_1k_2c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega\\+\left\{-m_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1-k_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^3\end{array}\right]$$

$$-c_1\omega\cdot\left[\begin{array}{l}-m_1m_2^2F_1\omega^6+k_1k_2^2\left(F_1+F_2\right)\\+\left\{m_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1+m_1m_2k_2\left(F_1+F_2\right)-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^4\\+\left\{-m_2k_1k_2F_1-\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)k_2\left(F_1+F_2\right)+\left(k_1c_2+k_2c_1\right)c_2\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^2\end{array}\right]$$

これを、ω のべき数で整理すると、次のようになる。

$$m_2\omega^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_2=\left\{-m_1m_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1+m_1^2m_2c_2\left(F_1+F_2\right)+m_1m_2^2c_1F_1\right\}\omega^7$$

$$+\left\{\begin{array}{l}+m_2k_1\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1-m_1m_2k_1c_2\left(F_1+F_2\right)+m_1m_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1+m_1k_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\\-m_1c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)-m_2c_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1-m_1m_2k_2c_1\left(F_1+F_2\right)\\+c_1c_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\end{array}\right\}\omega^5$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-m_2k_1\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1-k_1k_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+k_1c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\\-m_1k_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)+m_1k_1k_2c_2\left(F_1+F_2\right)+m_2k_1k_2c_1F_1\\+k_2c_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)-c_1c_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)\end{array}\right\}\omega^3$$

$$+\left\{k_1k_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-k_1^2k_2c_2\left(F_1+F_2\right)-k_1k_2^2c_1\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega$$

さらに、ω のべき数項ごとに整理すると、次のようになる。

$$\left\{-m_1m_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1+m_1^2m_2c_2\left(F_1+F_2\right)+m_1m_2^2c_1F_1\right\}\omega^7$$

$$=m_1m_2\left\{-\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1+m_1c_2\left(F_1+F_2\right)+m_2c_1F_1\right\}\omega^7=m_1m_2\left\{m_1c_2F_2-m_2c_2F_1\right\}\omega^7=m_1m_2c_2\left\{m_1F_2-m_2F_1\right\}\omega^7$$

$$\left\{\begin{array}{l} +m_2k_1\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1-m_1m_2k_1c_2\left(F_1+F_2\right)+m_1m_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1+m_1k_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\\ -m_1c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)-m_2c_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1-m_1m_2k_2c_1\left(F_1+F_2\right)\\ +c_1c_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right) \end{array}\right\}\omega^5$$

$$=\left\{\begin{array}{l} +m_2k_1\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)F_1+m_1m_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1-m_1m_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)\\ +m_1k_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+c_1c_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\\ -m_2c_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1-m_1c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right) \end{array}\right\}\omega^5$$

$$=\left[\begin{array}{l} +\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left\{m_2k_1F_1+\left(m_1k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\right\}-m_1m_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_2\\ -\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left\{m_2c_1F_1+m_1c_2\left(F_1+F_2\right)\right\} \end{array}\right]\omega^5$$

$$=\left[\begin{array}{l} +\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(m_1k_2+m_2k_1+c_1c_2\right)F_1-\left(m_1c_2+m_2c_1\right)\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_1\\ +\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(m_1k_2+c_1c_2\right)F_2-m_1c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)F_2-m_1m_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_2 \end{array}\right]\omega^5$$

$$=\left[\begin{array}{l} +m_2c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+c_1c_2\right)F_1-m_2k_2\left(m_1c_2+m_2c_1\right)F_1\\ +\left(m_2c_1+m_2c_2\right)\left(m_1k_2+c_1c_2\right)F_2-m_1c_2\left(m_2k_1+m_2k_2\right)F_2-m_1m_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_2 \end{array}\right]\omega^5$$

$$=m_2\left[+\left\{c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+c_1c_2\right)-k_2\left(m_1c_2+m_2c_1\right)\right\}F_1+\left\{\left(c_1+c_2\right)\left(m_1k_2+c_1c_2\right)-m_1c_2\left(k_1+k_2\right)-m_1\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\right\}F_2\right]\omega^5$$

$$=m_2\left[\left\{m_2k_1c_2+c_1c_2^2-m_2k_2c_1\right\}F_1+\left\{c_1c_2\left(c_1+c_2\right)-m_1k_1c_2-m_1k_1c_2\right\}F_2\right]\omega^5$$

$$=m_2\left[\left\{m_2\left(k_1c_2-k_2c_1\right)+c_1c_2^2\right\}F_1+\left(c_1+c_2\right)\left(c_1c_2-m_1k_1\right)F_2\right]\omega^5$$

$$\left\{\begin{array}{l} -m_2k_1\left(k_1c_2+k_2c_1\right)F_1-k_1k_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+k_1c_2\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)\\ -m_1k_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)+m_1k_1k_2c_2\left(F_1+F_2\right)+m_2k_1k_2c_1F_1\\ +k_2c_1\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)-c_1c_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right) \end{array}\right\}\omega^3$$

$$=\left\{\begin{array}{l} -m_2k_1^2c_2F_1-k_1k_2\left(m_1c_2+m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+m_1k_1k_2c_2\left(F_1+F_2\right)\\ +\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(m_1k_2+m_2k_1+m_2k_2+c_1c_2\right)\left(F_1+F_2\right)-\left(m_1k_2+c_1c_2\right)\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right) \end{array}\right\}\omega^3$$

$$=\left\{-m_2k_1^2c_2F_1-k_1k_2\left(m_2c_1+m_2c_2\right)\left(F_1+F_2\right)+\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(m_2k_1+m_2k_2\right)\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega^3$$

$$=m_2\left[-k_1^2c_2F_1+\left\{\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(k_1+k_2\right)-k_1k_2\left(c_1+c_2\right)\right\}\left(F_1+F_2\right)\right]\omega^3$$

$$=m_2\left[\left(k_1^2c_2+k_2^2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-k_1^2c_2F_1\right]\omega^3=m_2\left[k_2^2c_1F_1+\left(k_1^2c_2+k_2^2c_1\right)F_2\right]\omega^3=m_2\left[k_1^2c_2F_2+k_2^2c_1\left(F_1+F_2\right)\right]\omega^3$$

$$\left\{k_1k_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-k_1^2k_2c_2\left(F_1+F_2\right)-k_1k_2^2c_1\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega$$

$$=\left\{k_1k_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-k_1k_2\cdot k_1c_2\left(F_1+F_2\right)-k_1k_2\cdot k_2c_1\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega$$

$$=\left\{k_1k_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)-k_1k_2\left(k_1c_2+k_2c_1\right)\left(F_1+F_2\right)\right\}\omega=0$$

したがって、式⑥は次のようになる。

$$m_2\omega^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_2=m_1m_2c_2\left\{m_1F_2-m_2F_1\right\}\omega^7+m_2\left[\left\{m_2\left(k_1c_2-k_2c_1\right)+c_1c_2^2\right\}F_1+\left(c_1+c_2\right)\left(c_1c_2-m_1k_1\right)F_2\right]\omega^5$$
$$+m_2\left[k_1^2c_2F_2+k_2^2c_1\left(F_1+F_2\right)\right]\omega^3$$

$$\therefore\left(\alpha^2+\beta^2\right)b_2=m_1c_2\left\{m_1F_2-m_2F_1\right\}\omega^5+\left[\left\{m_2\left(k_1c_2-k_2c_1\right)+c_1c_2^2\right\}F_1+\left(c_1+c_2\right)\left(c_1c_2-m_1k_1\right)F_2\right]\omega^3+\left[k_1^2c_2F_2+k_2^2c_1\left(F_1+F_2\right)\right]\omega$$