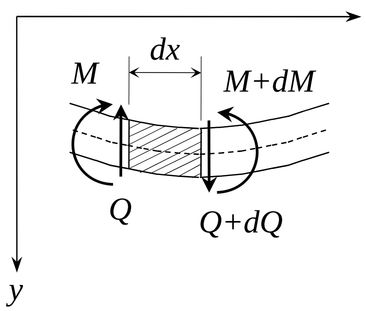
はりの曲げ振動(bending vibration)

１．はりの曲げ振動の方程式とその一般解

はりの振動はその１つの主軸を含む面内に起こり、断面寸法の長さに比して微小であり、主軸と直角方向の並行運動のみを行うものとする。このような場合、はりの変形は曲げモーメントのみにより起こり、せん断変形は無視できる。このようなはりをベルヌーイ･オイラーばり(Bernoulli-Euler beam)という。

はりの断面積を A，曲げ剛性を EI，単位体積質量を w とする。右下図において、右向きに x 軸，下向きに変位 y をとれば、dx 部分に働く慣性力は、$-wA\cdot dx\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ であり、これと釣り合う復元力は、x および $x+dx$ 点において働くせん断力 Q の y 方向の分力の和である。



x 点におけるせん断力 Q の y 方向の分力は、$-Q\dfrac{\partial y}{\partial x}$ で、$x+dx$ 点におけるせん断力 Q の y 方向の分力は、$Q\dfrac{\partial y}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(Q\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)dx$ であるから、dx 部分の y 方向の運動を起こさせる力は、両式の和で、

$$-Q\frac{\partial y}{\partial x}+Q\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx=\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx=Q\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$ となる。

ところで、断面 x におけるせん断力 Q は次の式で与えられる。

$$Q=\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

一方、断面 $x+dx$ におけるせん断力 $Q+dQ$ は、

$$Q+dQ=\frac{\partial}{\partial x}\left(-EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(-EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right\}dx=\frac{\partial}{\partial x}\left(-EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx$$

であるから、dx 部分の y 方向の運動を起こさせる力は、両式の和で次のようになる。

$$-Q+(Q+dQ)=dQ=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx$$

したがって、dx 部分の運動方程式は、

$$-wA\cdot dx\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx=0 \text{ すなわち、} \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{EI}{wA}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=0} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

となる。この式は変断面ばりの曲げ振動の微分方程式であるが、断面が一様であれば次のようになる。

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+v^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0} \quad \text{ここに、} \boxed{v^2=\frac{EI}{wA}} \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

式(2)の解は、$y=X(x)\cdot e^{i\omega t}$ の形で与えられるから、これを式(2)に代入して、

$$-\omega^2 X+v^2\frac{d^4 X}{dx^4}=0 \quad \therefore \frac{d^4 X}{dx^4}-\frac{\omega^2}{v^2}X=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

が得られる。いま、$\boxed{\dfrac{\omega^2}{v^2}=\lambda^4}$ とおけば、$\dfrac{d^4 X}{dx^4}-\lambda^4 X=0$ ………(3)’

となり、式(3)’の特性方程式の４根が $\pm\lambda$，$\pm i\lambda$ となるから、式(3)’の一般解が次の式で与えられる。

$$\boxed{X=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x+C_3\cosh\lambda x+C_4\sinh\lambda x} \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

ここに、C_1，C_2，C_3，C_4 は任意定数で、λ の値および C_1，C_2，C_3，C_4 の大きさの比は境界条件より決定される。

==========《式(2)の解についての詳細》==

式(2)の解 $y(x,t)$ が、いま、座標 x のみの関数 $X(x)$ と時間 t のみの関数 $T(t)$ との積 $y(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ で表されるものと仮定する。この方法は、偏微分方程式を解く一般的な手法であることが知られている。

これを式(2)に代入し、両辺を $y = X\cdot T$ で除し、さらに、変形すると、

$$X\frac{d^2T}{dt^2} + v^2\frac{d^4X}{dx^4}T = 0 \quad \therefore \frac{\frac{d^2T}{dt^2}}{T} + v^2\frac{\frac{d^4X}{dx^4}}{X} = 0 \quad \therefore -\frac{\frac{d^2T}{dt^2}}{T} = v^2\frac{\frac{d^4X}{dx^4}}{X} = \omega^2 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

が得られる。式①の左辺は t に関する関数で、右辺（中の項）は x のみの関数である。この両者が等しいということは、ともに一定の値であることを意味している。そこで、この値を ω^2 とおく。
この式①から、次の 2 つの微分方程式が得られる。

（左辺より）　$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

（右辺より）　$$v^2\frac{d^4X}{dx^4} - \omega^2 X = 0 \qquad \therefore \frac{d^4X}{dx^4} - \frac{\omega^2}{v^2}X = 0$$

すなわち、$$\frac{d^4X}{dx^4} - \lambda^4 X = 0$$ ここに、$$\frac{\omega^2}{v^2} = \lambda^4 \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

これらの式②，③は、2 つの変数 x と t について、独立な常微分方程式である。このような展開が数学でいう〝変数分離〟である。

まず、式②は、1 自由度系の振動方程式と全く同様な形をしている。
したがって、その一般解は、A，B を任意定数として、次のように表される。

$$T(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

次に、式③は、空間座標にのみ関係する方程式であり、はりの変形形状について表現するものである。4 階の常微分方程式であるため、一般解は次の方法で得られる。

式③の解は、演算子 D を導入して、$X = e^{Dx}$ とおくと、$(D^4 - \lambda^4)X = 0$ となり、D の 4 次方程式 $D^4 - \lambda^4 = 0$ が得られる。これを変形すると、$(D^2 + \lambda^2)(D+\lambda)(D-\lambda) = 0$ となり、D の 4 根として、$D = \pm\lambda$，$D = \pm i\lambda$ が得られる。

これらの 4 根を式③に代入し、次の関係を用いて、

$$e^{i\lambda x} = \cos\lambda x + i\sin\lambda x \qquad e^{-i\lambda x} = \cos\lambda x - i\sin\lambda x$$

$$\frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2} = \cosh\lambda x \qquad \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2} = \sinh\lambda x$$

$$e^{\lambda x} = \cosh\lambda x + \sinh\lambda x \qquad e^{-\lambda x} = \cosh\lambda x - \sinh\lambda x$$

三角関数および双曲線関数に置き換えて整理すると、

$$\begin{aligned} X &= D_1 e^{\lambda x} + D_2 e^{-\lambda x} + D_3 e^{i\lambda x} + D_4 e^{-i\lambda x} \\ &= D_1(\cosh\lambda x + \sinh\lambda x) + D_2(\cosh\lambda x - \sinh\lambda x) + D_3(\cos\lambda x + i\sin\lambda x) + D_4(\cos\lambda x - i\sin\lambda x) \\ &= (D_3 + D_4)\cos\lambda x + i(D_3 - D_4)\sin\lambda x + (D_1 + D_2)\cosh\lambda x + (D_1 - D_2)\sinh\lambda x \end{aligned}$$

$$\therefore X(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x + C_3\cosh\lambda x + C_4\sinh\lambda x \qquad \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここに、C_1，C_2，C_3，C_4 は任意定数で、λ の値および C_1，C_2，C_3，C_4 の大きさの比は境界条件より決定される。

したがって、式(2)の一般解は、式④，⑤より、次のように表される。

$$\begin{aligned} y(x,t) &= X(x)\cdot T(t) \\ &= \{C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x + C_3\cosh\lambda x + C_4\sinh\lambda x\}\cdot\{A\cos\omega t + B\sin\omega t\} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots⑥$$

==

２．種々の境界条件に対する解

(1)両端単純支持ばり

両端でたわみおよび曲げモーメントが 0 であるから、境界条件は次のようになる。

$$\begin{cases} x=0: \quad X=0, \quad \dfrac{d^2X}{dx^2}=0 \\ x=\ell: \quad X=0, \quad \dfrac{d^2X}{dx^2}=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

式(4)より、$\dfrac{d^2X}{dx^2}=-\lambda^2C_1\cos\lambda x-\lambda^2C_2\sin\lambda x+\lambda^2C_3\cosh\lambda x+\lambda^2C_4\sinh\lambda x$ であるから、

$x=0$ のとき、$X=0$ だから、　$C_1+C_3=0$

$x=0$ のとき、$\dfrac{d^2X}{dx^2}=0$ だから、　$C_1-C_3=0$

よって、$C_1=C_3=0$ となる。

これにより、式(4)は、$X=C_2\sin\lambda x+C_4\sinh\lambda x$, $\dfrac{d^2X}{dx^2}=-\lambda^2C_2\sin\lambda x+\lambda^2C_4\sinh\lambda x$ となるから、

$x=\ell$ のとき、$X=0$ だから、　$C_2\sin\lambda\ell+C_4\sinh\lambda\ell=0$

$x=\ell$ のとき、$\dfrac{d^2X}{dx^2}=0$ だから、　$C_2\sin\lambda\ell-C_4\sinh\lambda\ell=0$

よって、$C_4=0$ となる。

故に、振動数方程式(frequency equation)は次のようになる。

$$\boxed{\sin\lambda\ell=0} \quad \text{すなわち、} \quad \boxed{\lambda\ell=s\pi \quad (s=1,2,\cdots)} \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

よって、s 次の固有円振動数 ω_s は、$\dfrac{\omega_s^2}{v^2}=\lambda^4$ より $\omega_s^2=\lambda^4v^2$、また、$v^2=\dfrac{EI}{wA}$ だから、

$$\boxed{\omega_s=\lambda^2v=\frac{s^2\pi^2v}{\ell^2}=\frac{s^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{wA}}} \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

となり、s 次の基準振動の振動形は次のようになる。

$$X_s=D_s\sin\frac{s\pi}{\ell}x \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

したがって、境界条件を満足する式(2)の解は、各基準振動の和として次の式で与えられる。

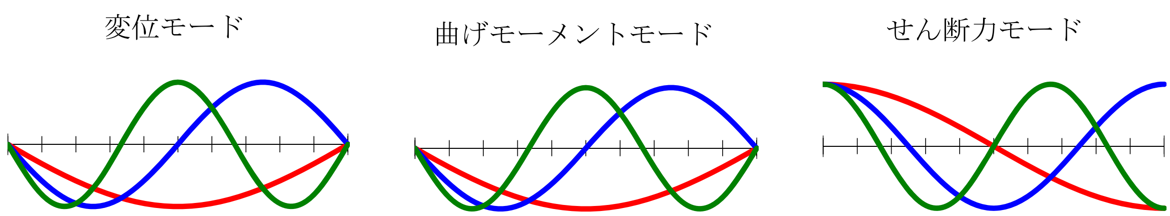
$$y(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\{A_s\cos\omega_st+B_s\sin\omega_st\}\cdot\sin\frac{s\pi}{\ell}x \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

変位モードの式(8)より、曲げモーメントモード $M_s(x)$ およびせん断力モード $Q_s(x)$ を求めると、次のようになる。

$$M_s(x)=D_s\left\{EI\frac{s^2\pi^2}{\ell^2}\right\}\cdot\sin\frac{s\pi}{\ell}x \qquad \cdots\cdots\cdots(10)$$

$$Q_s(x)=D_s\left\{EI\frac{s^3\pi^3}{\ell^3}\right\}\cdot\cos\frac{s\pi}{\ell}x \qquad \cdots\cdots\cdots(10)'$$

下図は、$D_s=1$ として、変位・曲げモーメント・せん断力モードを図示したものである。



10 頁に両端単純支持ばりの 1 次～3 次の変位モードを示す。

(2)片持ばり

固定端でたわみとたわみ角が 0，自由端で曲げモーメントとせん断力が 0 であるから、境界条件は次のようになる。

$$\begin{cases} x=0: & X=0, \quad \dfrac{dX}{dx}=0 \\ x=\ell: & \dfrac{d^2X}{dx^2}=0, \quad \dfrac{d^3X}{dx^3}=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(11)$$

式(4)より、

$$\frac{dX}{dx}=-\lambda C_1\sin\lambda x+\lambda C_2\cos\lambda x+\lambda C_3\sinh\lambda x+\lambda C_4\cosh\lambda x$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}=-\lambda^2C_1\cos\lambda x-\lambda^2C_2\sin\lambda x+\lambda^2C_3\cosh\lambda x+\lambda^2C_4\sinh\lambda x$$

$$\frac{d^3X}{dx^3}=\lambda^3C_1\sin\lambda x-\lambda^3C_2\cos\lambda x+\lambda^3C_3\sinh\lambda x+\lambda^3C_4\cosh\lambda x$$

であるから、

$x=0$ のとき、$X=0$ だから、　$C_1+C_3=0$　………①

$x=0$ のとき、$\dfrac{dX}{dx}=0$ だから、　$C_2+C_4=0$　………②

$x=\ell$ のとき、$\dfrac{d^2X}{dx^2}=0$ だから、$-C_1\cos\lambda\ell-C_2\sin\lambda\ell+C_3\cosh\lambda\ell+C_4\sinh\lambda\ell=0$　………③

$x=\ell$ のとき、$\dfrac{d^3X}{dx^3}=0$ だから、　$C_1\sin\lambda\ell-C_2\cos\lambda\ell+C_3\sinh\lambda\ell+C_4\cosh\lambda\ell=0$　………④

式①，②より、$C_3=-C_1$，$C_4=-C_2$ だから、これを式③，④に代入して整理すると、

$$(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)C_1+(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)C_2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots③'$$

$$(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)C_1-(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)C_2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots④'$$

《解法Ⅰ》式①～④の連立方程式から、C_2，C_3，C_4 を消去する方法

③'×$(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)$＋④'×$(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)$ を計算すると、

$$\left\{(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)^2+(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)\cdot(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)\right\}C_1=0$$

ここで、C_1 は任意定数だから、

$$(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)^2+(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)\cdot(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)=0$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \cos^2\lambda\ell+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell+\cosh^2\lambda\ell+\sin^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell \\
&=(\cos^2\lambda\ell+\sin^2\lambda\ell)+(\cosh^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell)+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell \\
&=1+(\cosh\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)(\cosh\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell \\
&=1+e^{-\lambda\ell}\cdot e^{\lambda\ell}+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=2+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0
\end{aligned}$$

よって、**振動数方程式**は次のようになる。

$$\boxed{\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=-1} \qquad \cdots\cdots\cdots(12)$$

==

《解法Ⅱ》式③',④'の連立方程式をマトリックス表示し、係数行列式を 0 に等置する方法

式③',④' の連立方程式をマトリックス表示すると、

$$\begin{bmatrix}\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell & \sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell \\ \sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell & -(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

すべての定数 C_1，C_2，C_3，C_4 が 0 でない値（有義解）をもつためには、次に示す係数行列式が 0 となることが必要十分条件である。

$$\begin{vmatrix}\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell & \sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell \\ \sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell & -(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)\end{vmatrix}=0$$

これを展開すると、次のようになる。

$$-(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)^2-(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)=0$$

$$\therefore(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)^2+(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)$$

$$=\cos^2\lambda\ell+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell+\cosh^2\lambda\ell+\sin^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell$$

$$=(\cos^2\lambda\ell+\sin^2\lambda\ell)+(\cosh^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell)+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell$$

$$=1+(\cosh\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)(\cosh\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell$$

$$=1+e^{-\lambda\ell}\cdot e^{\lambda\ell}+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=2+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0$$

よって、**振動数方程式**は次のようになる。

$$\boxed{\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=-1} \quad \cdots\cdots\cdots(12)$$

==

《解法Ⅲ》式①～④の連立方程式をマトリックス表示し、係数行列式を 0 に等置する方法

式①～④の連立方程式をマトリックス表示すると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\cos\lambda\ell & -\sin\lambda\ell & \cosh\lambda\ell & \sinh\lambda\ell \\ \sin\lambda\ell & -\cos\lambda\ell & \sinh\lambda\ell & \cosh\lambda\ell \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

この式は、定数 C_1，C_2，C_3，C_4 を求めるための式であるが、右辺が 0 のベクトルになっている。このため、すべての定数 C_1，C_2，C_3，C_4 が 0 でない値（有義解）をもつためには、次に示す係数行列式が 0 となることが必要十分条件である。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\cos\lambda\ell & -\sin\lambda\ell & \cosh\lambda\ell & \sinh\lambda\ell \\ \sin\lambda\ell & -\cos\lambda\ell & \sinh\lambda\ell & \cosh\lambda\ell \end{vmatrix}=0$$

そこで、係数行列式を以下のように変形する。

まず、4 行 4 列の係数行列式において、第 3 行に対して、(第 1 行)× $\cos\lambda\ell$ を加え、第 4 行に対して、(第 1 行)×$(-\sin\lambda\ell)$を加えると、3 行 3 列の係数行列式になる。次に、3 行 3 列の係数行列式において、第 2 行に対して、(第 1 行)× $\sin\lambda\ell$ を加え、第 4 行に対して、(第 1 行)× $\cos\lambda\ell$ を加えると、2 行 2 列の係数行列式になる。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\cos\lambda\ell & -\sin\lambda\ell & \cosh\lambda\ell & \sinh\lambda\ell \\ \sin\lambda\ell & -\cos\lambda\ell & \sinh\lambda\ell & \cosh\lambda\ell \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sin\lambda\ell & \cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell & \sinh\lambda\ell \\ 0 & -\cos\lambda\ell & -\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell & \cosh\lambda\ell \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\sin\lambda\ell & \cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell & \sinh\lambda\ell \\ -\cos\lambda\ell & -\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell & \cosh\lambda\ell \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell & \sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell \\ 0 & -\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell & \cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell & \sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell \\ -\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell & \cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell \end{vmatrix}=0$$

これを展開すると、次のようになる。

$$(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)^2-(-\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)\cdot(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)=0$$

$$\therefore(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)^2+(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)\cdot(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)$$

$$=\cos^2\lambda\ell+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell+\cosh^2\lambda\ell+\sin^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell$$

$$=(\cos^2\lambda\ell+\sin^2\lambda\ell)+(\cosh^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell)+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell$$

$$=1+(\cosh\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)\cdot(\cosh\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell$$

$$=1+e^{-\lambda\ell}\cdot e^{\lambda\ell}+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=2+2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0$$

よって、**振動数方程式**は次のようになる。

$$\boxed{\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=-1} \qquad \cdots\cdots\cdots(12)$$

==

式(12)を満足する $\lambda\ell$ の値を求めると、次の表のようになる。

片持ばりの曲げ振動の固有値

s	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次
$\lambda_s\ell$	1.875103	4.6941001	7.8547574	10.99554	14.1371701

s 次の固有円振動数 ω_s は、次の式で与えられる。

$$\boxed{\omega_s=\lambda_s^2 v=\frac{1}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{wA}}\left(\lambda_s\ell\right)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots(13)$$

また、境界条件式①，②，④'から、

$$C_2=\frac{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}{\cos\lambda_s\ell+\cosh\lambda_s\ell}C_1=-C_4, \qquad C_3=-C_1$$

であるから、s 次の基準振動の振動形は次のようになる。

$$X_s=D_s\cos\lambda_s x+D_s\frac{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}{\cos\lambda_s\ell+\cosh\lambda_s\ell}\sin\lambda_s x-D_s\cosh\lambda_s x-D_s\frac{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}{\cos\lambda_s\ell+\cosh\lambda_s\ell}\sinh\lambda_s x$$

$$X_s=D_s\left\{(\cos\lambda_s x-\cosh\lambda_s x)+\frac{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}{\cos\lambda_s\ell+\cosh\lambda_s\ell}(\sin\lambda_s x-\sinh\lambda_s x)\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(14)$$

10 頁に片持ばりの 1 次～3 次の変位モードを示す。

(3)両端固定ばり

両端でたわみとたわみ角が 0 であるから、境界条件は次のようになる。

$$\begin{cases} x=0: & X=0,\quad \dfrac{dX}{dx}=0 \\ x=\ell: & X=0,\quad \dfrac{dX}{dx}=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(15)$$

したがって、次の 4 式が得られる。

$$C_1+C_3=0 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

$$C_2+C_4=0 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

$$C_1\cos\lambda\ell+C_2\sin\lambda\ell+C_3\cosh\lambda\ell+C_4\sinh\lambda\ell=0 \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

$$-C_1\sin\lambda\ell+C_2\cos\lambda\ell+C_3\sinh\lambda\ell+C_4\cosh\lambda\ell=0 \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

式①，②より、$C_3=-C_1$，$C_4=-C_2$ だから、これを式③，④に代入して整理すると、

$$(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)C_1+(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)C_2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots③'$$

$$(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)C_1-(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)C_2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots④'$$

③'$\times(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)+$④'$\times(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)$を計算すると、

$$\left\{(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)^2+(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)\cdot(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)\right\}C_1=0$$

ここで、C_1は任意定数だから、

$$(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)^2+(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)\cdot(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)=0$$

$$\begin{aligned}\therefore \cos^2\lambda\ell-2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell+\cosh^2\lambda\ell+\sin^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell \\ =(\cos^2\lambda\ell+\sin^2\lambda\ell)+(\cosh^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell)-2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell \\ =1+(\cosh\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)(\cosh\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)-2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell \\ =1+e^{-\lambda\ell}\cdot e^{\lambda\ell}-2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=2-2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0\end{aligned}$$

よって、**振動数方程式**は次のようになる。

$$\boxed{\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=1} \qquad \cdots\cdots\cdots(16)$$

式(16)を満足する $\lambda\ell$ の値を求めると、次の表のようになる。

両端固定ばりの曲げ振動の固有値

s	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次
$\lambda_s\ell$	4.7300407	7.8532046	10.99560784	14.13716549	17.27875966

s 次の固有円振動数 ω_s は、次の式で与えられる。

$$\boxed{\omega_s=\lambda_s^2 v=\frac{1}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{wA}}(\lambda_s\ell)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots(17)$$

また、境界条件式①，②，③'から、

$$C_2=-\frac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}C_1=-C_4,\qquad C_3=-C_1$$

であるから、s 次の基準振動の振動形は次のようになる。

$$X_s=D_s\cos\lambda_s x-D_s\frac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}\sin\lambda_s x-D_s\cosh\lambda_s x+D_s\frac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}\sinh\lambda_s x$$

$$X_s=D_s\left\{(\cos\lambda_s x-\cosh\lambda_s x)-\frac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}(\sin\lambda_s x-\sinh\lambda_s x)\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(18)$$

10 頁に両端固定ばりの 1 次～3 次の変位モードを示す。

(4)一端固定，他端単純支持ばり

固定端でたわみとたわみ角が 0，単純支持端でたわみおよび曲げモーメントが 0 であるから、境界条件は次のようになる。

$$\begin{cases} x=0: \quad X=0, \quad \dfrac{dX}{dx}=0 \\ x=\ell: \quad X=0, \quad \dfrac{d^2X}{dx^2}=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(19)$$

したがって、次の 4 式が得られる。

$$C_1+C_3=0 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

$$C_2+C_4=0 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

$$C_1\cos\lambda\ell+C_2\sin\lambda\ell+C_3\cosh\lambda\ell+C_4\sinh\lambda\ell=0 \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

$$-C_1\cos\lambda\ell-C_2\sin\lambda\ell+C_3\cosh\lambda\ell+C_4\sinh\lambda\ell=0 \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

式①，②より、$C_3=-C_1$，$C_4=-C_2$ だから、これを式③，④に代入して整理すると、

$$(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)C_1+(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)C_2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots③'$$

$$(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)C_1+(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)C_2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots④'$$

③'×$(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)$－④'×$(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)$を計算すると、

$$\{(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)\cdot(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)-(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)\cdot(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)\}C_1=0$$

ここで、C_1 は任意定数だから、

$$(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)\cdot(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)-(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)\cdot(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)=0$$

$$\begin{aligned}\therefore &\cos\lambda\ell\cdot\sin\lambda\ell+\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell \\ &-\cos\lambda\ell\cdot\sin\lambda\ell+\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell \\ &=2(\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell)=0\end{aligned}$$

よって、**振動数方程式**は次のようになる。

$$\boxed{\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0} \qquad \cdots\cdots\cdots(20)$$

式(20)を満足する $\lambda\ell$ の値を求めると、次の表のようになる。

一端固定，他端単純支持ばりの曲げ振動の固有値

s	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次
$\lambda_s\ell$	3.9266023	7.068582746	10.21017612	13.3517688	16.49336143

s 次の固有円振動数 ω_s は、次の式で与えられる。

$$\boxed{\omega_s=\lambda_s^2 v=\frac{1}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{wA}}(\lambda_s\ell)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots(21)$$

また、境界条件式①，②，③'から、

$$C_2=-\frac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}C_1=-C_4, \qquad C_3=-C_1$$

であるから、s 次の基準振動の振動形は次のようになる。【式(18)と全く同様】

$$X_s=D_s\cos\lambda_s x-D_s\frac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}\sin\lambda_s x-D_s\cosh\lambda_s x+D_s\frac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}\sinh\lambda_s x$$

$$X_s=D_s\left\{(\cos\lambda_s x-\cosh\lambda_s x)-\frac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}(\sin\lambda_s x-\sinh\lambda_s x)\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(22)$$

10 頁に一端固定，他端単純支持ばりの 1 次～3 次の変位モードを示す。

(5)<u>両端自由ばり</u>

両端で曲げモーメントとせん断力が 0 であるから、境界条件は次のようになる。

$$\begin{cases} x=0: & \dfrac{d^2X}{dx^2}=0, \quad \dfrac{d^3X}{dx^3}=0 \\ x=\ell: & \dfrac{d^2X}{dx^2}=0, \quad \dfrac{d^3X}{dx^3}=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(23)$$

したがって、次の 4 式が得られる。

$$-C_1+C_3=0 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

$$-C_2+C_4=0 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

$$-C_1\cos\lambda\ell-C_2\sin\lambda\ell+C_3\cosh\lambda\ell+C_4\sinh\lambda\ell=0 \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

$$C_1\sin\lambda\ell-C_2\cos\lambda\ell+C_3\sin\lambda\ell+C_4\cosh\lambda\ell=0 \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

式①，②より、$C_3=C_1$，$C_4=C_2$ だから、これを式③，④に代入して整理すると、

$$(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)C_1+(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)C_2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots③'$$

$$(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)C_1-(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)C_2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots④'$$

③'$\times(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)+$④'$\times(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)$を計算すると、【両端固定ばりと全く同様】

$$\left\{(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)^2+(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)\cdot(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)\right\}C_1=0$$

ここで、C_1は任意定数だから、

$$(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)^2+(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)\cdot(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)=0$$

$$\therefore \cos^2\lambda\ell-2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell+\cosh^2\lambda\ell+\sin^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell$$

$$=(\cos^2\lambda\ell+\sin^2\lambda\ell)+(\cosh^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell)-2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell$$

$$=1+(\cosh\lambda\ell-\sinh\lambda\ell)(\cosh\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)-2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell$$

$$=1+e^{-\lambda\ell}\cdot e^{\lambda\ell}-2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=2-2\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0$$

よって、**振動数方程式**は次のようになる。【両端固定ばりと全く同様】

$$\boxed{\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=1} \qquad \cdots\cdots\cdots(24)$$

式(24)を満足する $\lambda\ell$ の値を求めると、次の表のようになる。【両端固定ばりと全く同様】

両端自由ばりの曲げ振動の固有値

s	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次
$\lambda_s\ell$	4.7300407	7.8532046	10.99560784	14.13716549	17.27875966

s 次の固有円振動数 ω_s は、次の式で与えられる。

$$\boxed{\omega_s=\lambda_s^2 v=\frac{1}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{wA}}(\lambda_s\ell)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots(25)$$

また、境界条件式①，②，③'から、

$$C_2=-\frac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}C_1=C_4, \qquad C_3=C_1$$

であるから、s 次の基準振動の振動形は次のようになる。

$$X_s=D_s\cos\lambda_s x-D_s\frac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}\sin\lambda_s x+D_s\cosh\lambda_s x-D_s\frac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}\sinh\lambda_s x$$

$$X_s=D_s\left\{(\cos\lambda_s x+\cosh\lambda_s x)-\frac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}(\sin\lambda_s x+\sinh\lambda_s x)\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(26)$$

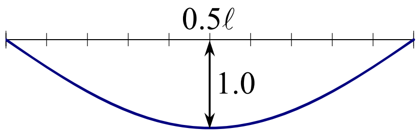
10 頁に両端自由ばりの 1 次～3 次の変位モードを示す。

また、11 頁には、種々の境界条件をもつはりの曲げ振動についてまとめたものを「表」で示す。

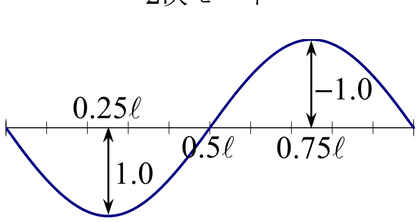
固 有 変 形 モ ー ド 図

【両端単純支持ばり】

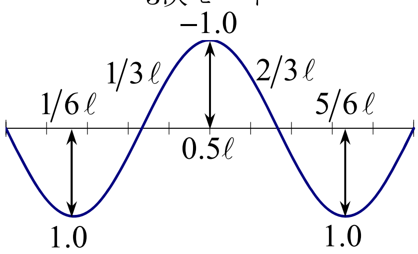
1次モード



2次モード

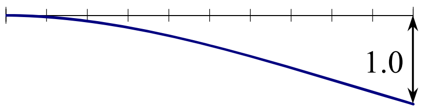


3次モード

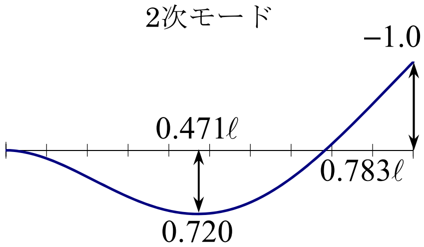


【片持ばり】

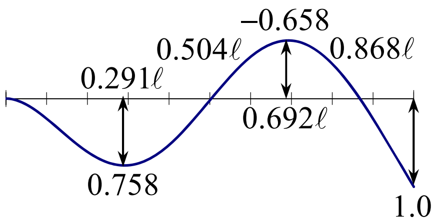
1次モード



2次モード

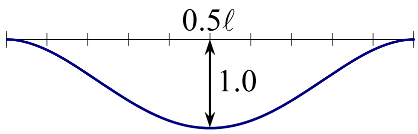


3次モード

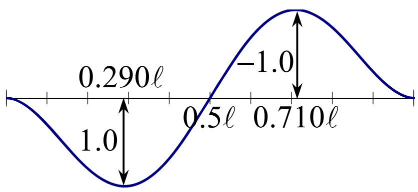


【両端固定ばり】

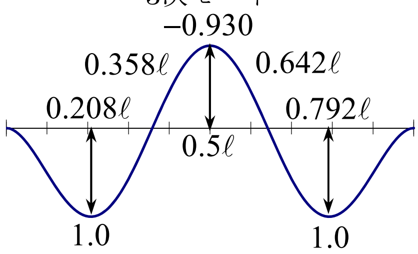
1次モード



2次モード

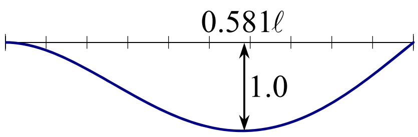


3次モード

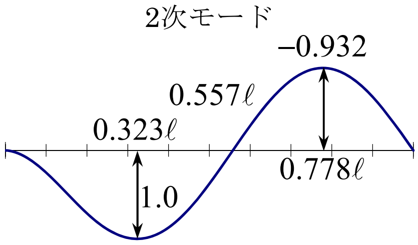


【一端固定，他端単純支持ばり】

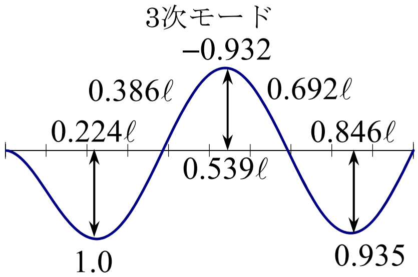
1次モード



2次モード

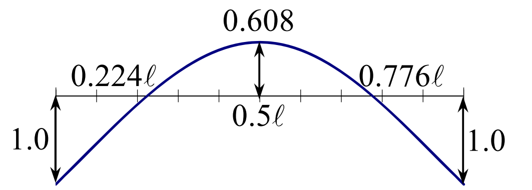


3次モード

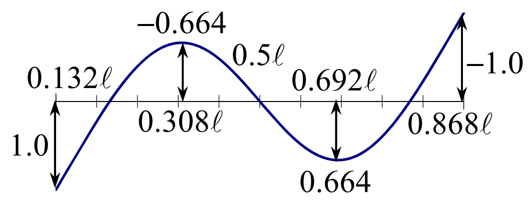


【両端自由ばり】

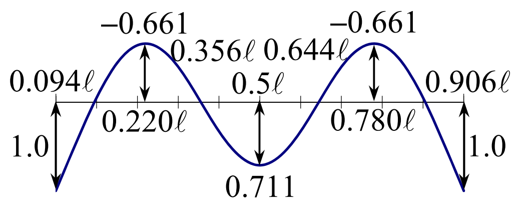
1次モード



2次モード



3次モード



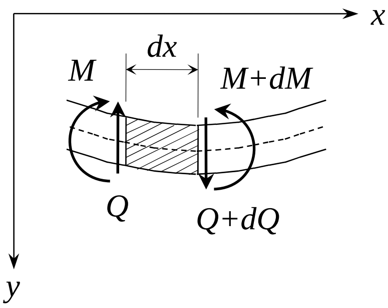
各種の境界条件をもつはりの曲げ振動

はりの種類		両端単純支持ばり	片持ばり	両端固定ばり	一端固定，他端単純支持ばり	両端自由ばり
境界条件	$x=0$	$X=0,\ \dfrac{d^2X}{dx^2}=0$	$X=0,\ \dfrac{dX}{dx}=0$	$X=0,\ \dfrac{dX}{dx}=0$	$X=0,\ \dfrac{dX}{dx}=0$	$\dfrac{d^2X}{dx^2}=0,\ \dfrac{d^3X}{dx^3}=0$
	$x=\ell$	$X=0,\ \dfrac{d^2X}{dx^2}=0$	$\dfrac{d^2X}{dx^2}=0,\ \dfrac{d^3X}{dx^3}=0$	$X=0,\ \dfrac{dX}{dx}=0$	$X=0,\ \dfrac{d^2X}{dx^2}=0$	$\dfrac{d^2X}{dx^2}=0,\ \dfrac{d^3X}{dx^3}=0$
振動数方程式		$\sin\lambda\ell=0$ $\lambda\ell=s\pi\ (s=1,2,\cdots)$	$\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=-1$	$\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=1$	$\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0$	$\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=1$
固有値 $\lambda_s\ell$	1 次	π	1.875104068711961	4.730040744862704	3.926602312047919	4.730040744862704
	2 次	2π	4.694091132974174	7.853204624095838	7.068582745628731	7.853204624095838
	3 次	3π	7.854757438237613	10.99560783800167	10.21017612281303	10.99560783800167
	4 次	4π	10.99554073487547	14.13716549125746	13.35176877775409	14.13716549125746
	5 次	5π	14.13716839104647	17.27875965739948	16.49336143134641	17.27875965739948
s 次の固有円振動数 ω_s		$\omega_s=\dfrac{s^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EI}{wA}}$	$\omega_s=\dfrac{1}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EI}{wA}}\left(\lambda_s\ell\right)^2$			
s 次の変形モード式 $X_s=D_s\{f(x)\}$		$\sin\dfrac{s\pi}{\ell}x$	$(\cos\lambda_s x-\cosh\lambda_s x)$ $+\dfrac{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}{\cos\lambda_s\ell+\cosh\lambda_s\ell}$ $\times(\sin\lambda_s x-\sinh\lambda_s x)$	$(\cos\lambda_s x-\cosh\lambda_s x)-\dfrac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}(\sin\lambda_s x-\sinh\lambda_s x)$		$(\cos\lambda_s x+\cosh\lambda_s x)$ $-\dfrac{\cos\lambda_s\ell-\cosh\lambda_s\ell}{\sin\lambda_s\ell-\sinh\lambda_s\ell}$ $\times(\sin\lambda_s x+\sinh\lambda_s x)$

3．はりの固有振動数に及ぼすせん断変形および回転慣性の影響

今までは、はりの長さに比して断面が小さく、したがって曲げ変形が主で、せん断変形は無視しうるほど小さく、また、運動エネルギーは主軸直角方向の往復運動によるもののみで、回転運動によるものは小さいと仮定したが、はりの断面が大きくなると、これらの影響を無視できなくなる。このように、変形については、曲げの他にせん断による変形を考え、慣性抵抗については、往復運動の他にたわみ角による回転運動を考える場合をチモシェンコばり(Timoshenko Beam)といい、いずれの影響も固有振動数を減少させる。

はりのたわみは、曲げモーメントによるたわみとせん断力によるたわみとの和として表されるから、曲げモーメントによるたわみ角をθ，せん断力によるたわみ角をβとすれば、はりの合成たわみ角は、



$$\frac{\partial y}{\partial x}=\theta+\beta \qquad \cdots\cdots\cdots(27)$$

となる。一方、x点の曲げモーメントMおよびせん断力Qは次の式で表される。

$$M=-EI\frac{\partial \theta}{\partial x},\quad Q=\kappa GA\beta=\kappa GA\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\theta\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(28)$$

右図より、dx部分のx軸直角方向の運動方程式は、上式(28)を用いて、

$$wA\cdot dx\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=dQ=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\kappa GA\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\theta\right)\right\}\ \text{すなわち、}\ w\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\kappa G\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(29)$$

次に、dx部分の回転方向の運動方程式は、上式(28)を用いて、

$$wI\cdot dx\cdot\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}=-dM+Qdx \qquad \text{すなわち、}\ wI\cdot\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}=EI\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\kappa GA\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\theta\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(30)$$

式(29)と式(30)より、次のようにしてθを消去する。

式(30)をxで1回偏微分すると、$wI\cdot\frac{\partial^3 \theta}{\partial x\partial t^2}=EI\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}+\kappa GA\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)$ ………(30)'

式(29)を変形すると、$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{w}{\kappa G}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ ………(29)'

式(29)'をtで2回偏微分すると、$\frac{\partial^3 \theta}{\partial x\partial t^2}=\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}-\frac{w}{\kappa G}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}$ ………(29)"

式(29)'をxで2回偏微分すると、$\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}=\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\frac{w}{\kappa G}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}$ ………(29)'''

これらの式(29)',(29)",(29)'''を式(30)'に代入すると、

$$wI\cdot\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}-\frac{w}{\kappa G}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}\right)=EI\cdot\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\frac{w}{\kappa G}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}\right)+\kappa GA\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{w}{\kappa G}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\right\}$$

$$\therefore EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\kappa GA\cdot\frac{w}{\kappa G}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\left(wI+EI\cdot\frac{w}{\kappa G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+wI\cdot\frac{w}{\kappa G}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0$$

よって、

$$\boxed{EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+wA\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\left(wI+\frac{EIw}{\kappa G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+wI\cdot\frac{w}{\kappa G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0} \qquad \cdots\cdots\cdots(31)$$

が得られる。この式(31)は、せん断変形および回転慣性の影響を考慮した一様断面ばりの振動方程式である。両辺をwAで除し、$\frac{I}{A}=r^2$とおけば、

$$\frac{EI}{wA}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{wI}{wA}\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{wI}{wA}\cdot\frac{w}{\kappa G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0$$

$$\boxed{v^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-r^2\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+r^2\frac{w}{\kappa G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0} \qquad \cdots\cdots\cdots(31)'$$

一例として、両端単純支持ばりの場合を考える。

両端単純支持ばりの境界条件は $x=0$ および $x=\ell$ において、$y=0$，$\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=0$ ………(32)

であるが、式(29)と式(32)の第 1 条件を用いると、上記第 2 条件は、$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$ すなわち、$\dfrac{d^2 y}{dx^2}=0$

と同等になる。したがって、微分方程式(31)'の解として、$y=D\sin\dfrac{s\pi x}{\ell}e^{i\omega t}$ ………(33)

とおけば、この y は境界条件を満足する。ここに、D は任意定数である。

ここで、$\theta=\Theta e^{i\omega t}$ として、式(33)を式(29)に代入すると、

$$\frac{d\,\Theta}{dx}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{w}{\kappa G}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\left\{\left(\frac{s\pi}{\ell}\right)^2-\frac{w}{\kappa G}\omega^2\right\}D\sin\frac{s\pi x}{\ell}$$

であるから、曲げモーメントとせん断力によるたわみをそれぞれ X_m，X_q とすると、X_m については、上式を 2 回積分して、X_q については、$X_q=X-X_m$ より、次のようになる。

$$X_m=\frac{\left(\dfrac{s\pi}{\ell}\right)^2-\dfrac{w}{\kappa G}\omega^2}{\left(\dfrac{s\pi}{\ell}\right)^2}D\sin\frac{s\pi x}{\ell},\qquad X_q=X-X_m=\frac{\dfrac{w}{\kappa G}\omega^2}{\left(\dfrac{s\pi}{\ell}\right)^2}D\sin\frac{s\pi x}{\ell}$$

式(33)を式(31)'に代入すると、次のような振動数方程式が得られる。

$$v^2\frac{s^4\pi^4}{\ell^4}-\omega_s^2-\frac{s^2\pi^2r^2}{\ell^2}\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\omega_s^2+\omega_s^4\frac{r^2w}{\kappa G}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(34)$$

この式(34)の第 2 項までをとれば曲げ振動のみの固有円振動数が得られ、第 3 項までをとれば回転慣性を考慮した場合の固有円振動数が得られる。

ここで、曲げ振動のみの固有円振動数を $\omega_{ms}^2=\dfrac{s^4\pi^4}{\ell^4}v^2=\dfrac{v^2\pi^4}{L^4}$，$L=\dfrac{\ell}{s}$ （半波長） ………(35)

さらに、$\omega_s'=\dfrac{\omega_s}{\omega_{ms}}$ とおくと、式(34)は、

$$\omega_{ms}^2-\left\{1+\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^2\right\}\omega_s^2+\frac{r^2w}{\kappa G}\omega_s^4=0$$

$$\therefore 1-\left\{1+\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^2\right\}\left(\frac{\omega_s}{\omega_{ms}}\right)^2+\frac{r^2w}{\kappa G}\cdot\left(\frac{\pi}{L}\right)^4v^2\cdot\left(\frac{\omega_s}{\omega_{ms}}\right)^4=0$$

$$\therefore 1-\left\{1+\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^2\right\}\omega_s'^2+\frac{r^2w}{\kappa G}\cdot\frac{EI}{wA}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\omega_s'^4=0$$

$$1-\left\{1+\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^2\right\}\omega_s'^2+\frac{E}{\kappa G}\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^4\omega_s'^4=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(34)'$$

のようになり、この式の判別式を求めると、次のようになる。

$$D=\left\{1+\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^2\right\}^2-4\times\frac{E}{\kappa G}\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^4=1+2\cdot\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^2+\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)^2\left(\frac{\pi r}{L}\right)^4-4\times\frac{E}{\kappa G}\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^4$$

$$=1+2\cdot\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi r}{L}\right)^4\left\{\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)^2-4\frac{E}{\kappa G}\right\}=1+2\cdot\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi r}{L}\right)^4\left(1-\frac{E}{\kappa G}\right)^2$$

$$=\left\{1+\left(1-\frac{E}{\kappa G}\right)\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^2\right\}^2+4\times\frac{E}{\kappa G}\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^2\quad\therefore 0<D<\left\{1+\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\cdot\left(\frac{\pi r}{L}\right)^2\right\}^2$$

したがって、式(34)'を解くと、$\omega_s'^2$ すなわち、ω_s^2 の値として 2 個の正数が得られる。

例えば、およそ 50kg レール断面に相当する $A = 64.33\,[cm^2]$, $I = 1744.0\,[cm^4]$, $w = 7.9 \times 10^{-3}\,[kg / cm^3]$, $\kappa = 1.2$, $E = 2.1 \times 10^6\,[kgf / cm^2] = 20.58 \times 10^8\,[N / cm^2]$, $G = 0.81 \times 10^6\,[kgf / cm^2] = 7.938 \times 10^8\,[N / cm^2]$ とおいて、$\ell = 50\,[cm]$ と $\ell = 100\,[cm]$ の場合について、Bernoulli-Euler ばりと Timoshenko ばりの 1 次 (s=1)の固有円振動数を計算すると、次のようになる。

Bernoulli-Euler ばりの場合、

$$\omega_{ms} = \frac{\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{wA}} = \frac{\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{20.58\times10^8\times1744.0}{7.9\times10^{-3}\times64.33}} = 2657514.264\frac{\pi^2}{\ell^2} = \begin{cases}10491.44579\\2622.861447\end{cases} \cong \begin{cases}1.049\times10^4 (50cm)\\0.262\times10^4 (100cm)\end{cases}$$

Timoshenko ばりの場合、式(34)'から計算すると、以下のようになる。

$\ell = 50\,[cm]$のとき, $0.024747901 \cdot \omega_s'^4 - 1.338257638 \cdot \omega_s'^2 + 1 = 0$

$$\therefore \omega_s'^2 = \begin{cases}0.757861589\\53.31774119\end{cases} \quad \therefore \frac{\omega_s}{\omega_{ms}} = \begin{cases}0.870552462\\7.301899835\end{cases} \quad \therefore \omega_s = \begin{cases}9133.353961\\76607.48627\end{cases}$$

$\ell = 100\ \ [cm]$のとき, $0.001546744 \cdot \omega_s'^4 - 1.08456441 \cdot \omega_s'^2 + 1 = 0$

$$\therefore \omega_s'^2 = \begin{cases}0.923244766\\700.2687831\end{cases} \quad \therefore \frac{\omega_s}{\omega_{ms}} = \begin{cases}0.960856267\\26.46259215\end{cases} \quad \therefore \omega_s = \begin{cases}2520.19286\\69407.71273\end{cases}$$

以上を比較すると、次の表のようになる。

ℓ [cm]	Bernoulli-Euler ばり			Timoshenko ばり			
	固有円振動数 [$1/s$]	固有振動数 [Hz]	固有周期 [s]	振動数比	固有円振動数 [$1/s$]	固有振動数 [Hz]	固有周期 [s]
50	1.049×10⁴	1669.8	5.989×10⁻⁴	0.871 7.302	0.913×10⁴ 7.661×10⁴	1453.6 12192.5	6.879×10⁻⁴ 0.820×10⁻⁴
100	0.262×10⁴	417.4	23.96×10⁻⁴	0.961 26.46	0.252×10⁴ 6.941×10⁴	401.1 11046.6	24.93×10⁻⁴ 0.905×10⁻⁴

すなわち、Timoshenko ばりの固有振動周期には 2 種類あり、1 つは曲げ変形を主とした振動によるもので、Bernoulli-Euler ばりの周期よりもわずかに長く、その差は短支間のはりほど大きい。ほかの 1 つの固有振動周期はせん断変形を主とした振動によるもので、この例では、はりのせん断剛性が大きいから、その固有振動周期が非常に短くなっている。

いま、式(34)'の $\omega_s'^2$ の項 $1+\left(1+\dfrac{E}{\kappa G}\right)\cdot\left(\dfrac{\pi r}{L}\right)^2$ と $\omega_s'^4$ の項 $\dfrac{E}{\kappa G}\cdot\left(\dfrac{\pi r}{L}\right)^4$ を比較すると、$\omega_s'^4$ の項は $\dfrac{\pi^2 r^2}{L^2}$ に比して、2 次の微小量であるから、省略すると、s 次の $\omega_s'^2$ すなわち、ω_s^2 が次の式で与えられる。

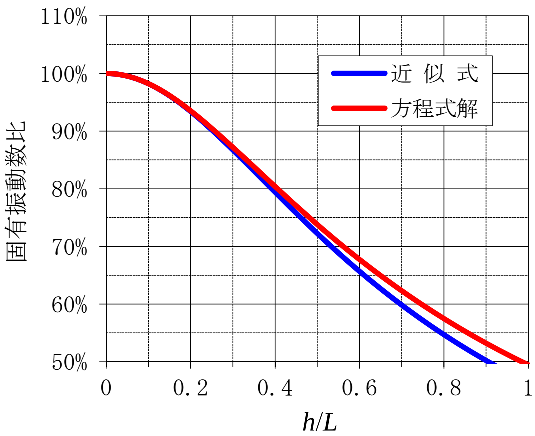
$$\omega_s'^2 = \frac{\omega_s^2}{\omega_{ms}^2} = \frac{1}{1+\dfrac{\pi^2 r^2}{L^2}\left(1+\dfrac{E}{\kappa G}\right)} \qquad \omega_s^2 = \frac{v^2\pi^4}{L^4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{\pi^2 r^2}{L^2}\left(1+\dfrac{E}{\kappa G}\right)} \qquad \cdots\cdots\cdots(35)$$

長方形断面の場合、はりの高さを h とすれば、$r^2 = \dfrac{h^2}{12}$, $\kappa = \dfrac{2}{3}$ となるから、ω_s^2 は次の式で与えられる。

$$\omega_s^2 = \frac{v^2\pi^4}{L^4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{\pi^2 h^2}{12L^2}\left(1+\dfrac{3E}{2G}\right)} \qquad \cdots\cdots\cdots(36)$$

右図は、$\dfrac{E}{G} = 2.3$ として、種々の $\dfrac{h}{L}$ に対して、Timoshenko ばりとして計算した固有振動数が、Bernoulli-Euler ばりとして計算した固有振動数よりどれだけ小さくなるかを固有振動数比 ω_s' で示したものである。

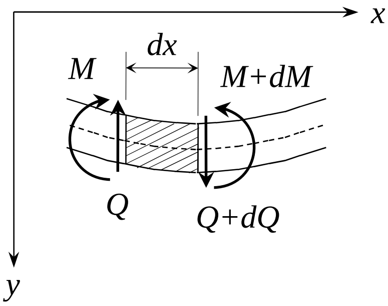
図中で、〝近似式〟とは、式(36)から求めたものであり、〝方程式解〟とは、式(34)'から直接求めたものである。



オイラーばりとチモシェンコばりの関係

オイラーばりとチモシェンコばりの関係について、整理してみる。

一様断面のはりを対象として考え、はりの断面積を A，曲げ剛性を EI，単位体積質量を w とする。また、右図に示すような微小要素について考える。



このとき、はりのたわみは、曲げモーメントによるたわみとせん断力によるたわみとの和として表されると考えると、曲げモーメントによるたわみ角を θ，せん断力によるたわみ角を β とすれば、はりの合成たわみ角は、$\dfrac{\partial y}{\partial x} = \theta + \beta$　となる。

一方、x 点の曲げモーメント M およびせん断力 Q は次の式で表される。

Bernoulli-Euler beam : せん断変形は無視するので、$\beta = 0$ であり、

また、せん断力 Q は、曲げモーメント M によってのみ生ずると考えるから、

$$M = -EI\frac{\partial \theta}{\partial x} = -EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad Q = \frac{\partial M}{\partial x} = -EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \qquad \cdots\cdots\cdots(\text{b-1})$$

Timoshenko Beam　:

$$M = -EI\frac{\partial \theta}{\partial x}, \qquad Q = k'GA\beta = k'GA\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \theta\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(\text{t-1})$$

ここで、k' は、断面形状のみで決まる最大せん断応力度と平均せん断応力度の比 k の逆数である。

まず、dx 部分の <u>x 軸直角方向の運動方程式</u>は、上式(28)を用いて、

Bernoulli-Euler beam : 上式(b-1)を用いて、

$$wA\cdot dx\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = dQ = \frac{\partial}{\partial x}\left(-EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)dx = -EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}dx \qquad \therefore\ wA\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \qquad \cdots\cdots\cdots(\text{b-2})$$

Timoshenko Beam　: 上式(t-1)を用いて、

$$wA\cdot dx\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = dQ = \frac{\partial}{\partial x}\left\{k'GA\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \theta\right)\right\}dx \qquad \therefore\ w\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = k'G\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(\text{t-2})$$

次に、dx 部分の<u>回転方向の運動方程式</u>は、

Bernoulli-Euler beam : はりの振動は、主軸と直角方向の並行運動のみと考えるので、回転方向の運動方程式は考慮しない。

Timoshenko Beam　: 上式(t-1)を用いて、

$$wI\cdot dx\cdot\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -dM + Qdx \qquad \therefore\ wI\cdot\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = EI\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k'GA\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \theta\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(\text{t-3})$$

したがって、dx 部分の運動方程式は、

Bernoulli-Euler beam : $wA\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$

Timoshenko Beam　: (t-2), (t-3)から、$wA\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} - wI\left(1 + \dfrac{E}{k'G}\right)\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \dfrac{w^2 I}{k'G}\cdot\dfrac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0$

ここで、$\boxed{v^2 = \dfrac{EI}{wA}}$, $\boxed{r^2 = \dfrac{I}{A}}$ とおけば、

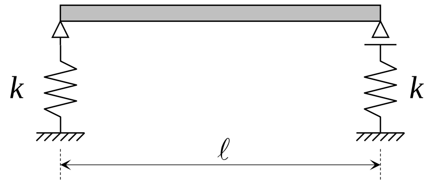
Bernoulli-Euler beam : $\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + v^2\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0}$

Timoshenko Beam　: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + v^2\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} - r^2\left(1 + \dfrac{E}{k'G}\right)\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + r^2\dfrac{w}{k'G}\cdot\dfrac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0$

または、$\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + v^2\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} + r^2\left\{\dfrac{w}{k'G}\cdot\dfrac{\partial^4 y}{\partial t^4} - \left(1 + \dfrac{E}{k'G}\right)\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2}\right\} = 0}$

【例題】弾性支持ばりの曲げ振動の振動数方程式

右図に示すように、曲げ剛性が EI，長さが ℓ，単位体積質量 w，断面積が A の単純ばりの両端がバネ定数 k の質量のないバネで支持されているとき、このはりの曲げ振動の振動数方程式を導け。



【解答例】

はりの曲げ振動の振動形の一般解は、$X = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x + C_3 \cosh\lambda x + C_4 \sinh\lambda x$ で与えられる。ここに、C_1，C_2，C_3，C_4 は積分定数である。

<u>境界条件</u>としては、以下の 4 条件がある。

(1) $x=0$ のとき、$X''=0$（曲げモーメントがゼロ）より、

$$-\lambda^2 C_1 + \lambda^2 C_3 = 0 \qquad \therefore -C_1 + C_3 = 0 \qquad \therefore C_3 = C_1 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

(2) $x=\ell$ のとき、$X''=0$（曲げモーメントがゼロ）より、

$$-\lambda^2 C_1 \cos\lambda\ell - \lambda^2 C_2 \sin\lambda\ell + \lambda^2 C_3 \cosh\lambda\ell + \lambda^2 C_4 \sinh\lambda\ell = 0$$

$$\therefore -C_1 \cos\lambda\ell - C_2 \sin\lambda\ell + C_3 \cosh\lambda\ell + C_4 \sinh\lambda\ell = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

(3) $x=0$ のとき、たわみを δ_1 とすると、$X=\delta_1$ より、$C_1 + C_3 = \delta_1$

また、このとき、せん断力 Q は、$Q=-EIX'''$ で表され、これはバネによる支持力 $k\delta_1$ に等しいから、

$$Q = -EIX''' = -EI\left(-\lambda^3 C_2 + \lambda^3 C_4\right) = k\delta_1$$

ここで、$\gamma = EI\lambda^3$ とおき、δ_1 を消去すると、次のようになる。

$$\gamma\left(C_2 - C_4\right) = k\left(C_1 + C_3\right) \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

(4) $x=\ell$ のとき、たわみを δ_2 とすると、$X=\delta_2$ より、

$$C_1 \cos\lambda\ell + C_2 \sin\lambda\ell + C_3 \cosh\lambda\ell + C_4 \sinh\lambda\ell = \delta_2$$

また、このとき、せん断力 Q は、バネによる支持力 $k\delta_2$ と逆向きで大きさが等しいから、

$$Q + k\delta_2 = -EIX''' + k\delta_2$$

$$= -EI\left(\lambda^3 C_1 \sin\lambda\ell - \lambda^3 C_2 \cos\lambda\ell + \lambda^3 C_3 \sinh\lambda\ell + \lambda^3 C_4 \cosh\lambda\ell\right) + k\delta_2 = 0$$

ここで、$\gamma = EI\lambda^3$ とおき、δ_2 を消去すると、次のようになる。

$$-\gamma\left(C_1 \sin\lambda\ell - C_2 \cos\lambda\ell + C_3 \sinh\lambda\ell + C_4 \cosh\lambda\ell\right)$$
$$+k\left(C_1 \cos\lambda\ell + C_2 \sin\lambda\ell + C_3 \cosh\lambda\ell + C_4 \sinh\lambda\ell\right) = 0$$

$$\therefore \gamma\left(C_1 \sin\lambda\ell - C_2 \cos\lambda\ell + C_3 \sinh\lambda\ell + C_4 \cosh\lambda\ell\right)$$
$$= k\left(C_1 \cos\lambda\ell + C_2 \sin\lambda\ell + C_3 \cosh\lambda\ell + C_4 \sinh\lambda\ell\right) \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

【解法 I 】

まず、C_1 を消去して、C_2, C_3, C_4 の連立方程式をマトリックス・ベクトル表示する。次に、C_2, C_3, C_4 が有義解を持つための必要十分条件である係数行列式＝0 から、振動数方程式を導く。

②より、C_1 を C_3 で表すと、$-C_3 \cos\lambda\ell - C_2 \sin\lambda\ell + C_3 \cosh\lambda\ell + C_4 \sinh\lambda\ell = 0$

$$\therefore -C_2 \sin\lambda\ell + C_3\left(-\cos\lambda\ell + \cosh\lambda\ell\right) + C_4 \sinh\lambda\ell = 0$$

③より、C_1 を C_3 で表すと、$\gamma\left(C_2 - C_4\right) = k\left(C_3 + C_3\right)$

$$\therefore \gamma C_2 - 2kC_3 - \gamma C_4 = 0$$

④より、C_1 を C_3 で表すと、
$$\gamma\left(C_3 \sin\lambda\ell - C_2 \cos\lambda\ell + C_3 \sinh\lambda\ell + C_4 \cosh\lambda\ell\right)$$
$$= k\left(C_3 \cos\lambda\ell + C_2 \sin\lambda\ell + C_3 \cosh\lambda\ell + C_4 \sinh\lambda\ell\right)$$

$$\therefore C_2\left(-\gamma\cos\lambda\ell - k\sin\lambda\ell\right) + C_3\left\{\gamma\left(\sin\lambda\ell + \sinh\lambda\ell\right) - k\left(\cos\lambda\ell + \cosh\lambda\ell\right)\right\} + C_4\left(\gamma\cosh\lambda\ell - k\sinh\lambda\ell\right) = 0$$

これらをマトリックス・ベクトル表示すると、

$$\begin{bmatrix} -\sin\lambda\ell & (-\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell) & \sinh\lambda\ell \\ \gamma & -2k & -\gamma \\ (-\gamma\cos\lambda\ell-k\sin\lambda\ell) & \{\gamma(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)-k(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)\} & (\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

このとき、C_2，C_3，C_4が有義解を持つための必要十分条件は、次のように表される。

$$\begin{vmatrix} -\sin\lambda\ell & (-\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell) & \sinh\lambda\ell \\ \gamma & -2k & -\gamma \\ (-\gamma\cos\lambda\ell-k\sin\lambda\ell) & \{\gamma(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)-k(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)\} & (\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell) \end{vmatrix}=0$$

これを展開すると、

$$\begin{aligned}&(-\sin\lambda\ell)(-2k)(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell)+(-\gamma\cos\lambda\ell-k\sin\lambda\ell)(-\gamma)(-\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)\\&+(\sinh\lambda\ell)(\gamma)\{\gamma(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)-k(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)\}-(\sinh\lambda\ell)(-2k)(-\gamma\cos\lambda\ell-k\sin\lambda\ell)\\&-(-\sin\lambda\ell)(-\gamma)\{\gamma(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)-k(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)\}-(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell)(\gamma)(-\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2k\sin\lambda\ell(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell)-\gamma(\gamma\cos\lambda\ell+k\sin\lambda\ell)(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)\\&+\gamma\sinh\lambda\ell\{\gamma(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)-k(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)\}-2k\sinh\lambda\ell(\gamma\cos\lambda\ell+k\sin\lambda\ell)\\&-\gamma\sin\lambda\ell\{\gamma(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)-k(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell)\}+\gamma(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell)(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2k\gamma\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell-2k^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\gamma^2\cos^2\lambda\ell+\gamma^2\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell-k\gamma\sin\lambda\ell\cos\lambda\ell+k\gamma\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\\&+\gamma^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell+\gamma^2\sinh^2\lambda\ell-k\gamma\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-k\gamma\sinh\lambda\ell\cosh\lambda\ell-2k\gamma\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-2k^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell\\&-\gamma^2\sin^2\lambda\ell-\gamma^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell+k\gamma\sin\lambda\ell\cos\lambda\ell+k\gamma\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell+\gamma^2\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell-\gamma^2\cosh^2\lambda\ell\\&-k\gamma\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell+k\gamma\sinh\lambda\ell\cosh\lambda\ell=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&4k\gamma(\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell-\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell)-4k^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell\\&+2\gamma^2\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell-\gamma^2(\sin^2\lambda\ell+\cos^2\lambda\ell)-\gamma^2(\cosh^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell)=0\end{aligned}$$

ここで、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1$の関係を用いて、

$$4k\gamma(\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell-\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell)-4k^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell+2\gamma^2(\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell-1)=0$$

$$\therefore -2k\gamma(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell)-2k^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\gamma^2(1-\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell)=0$$

$$\therefore \gamma^2(1-\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell)+2k\gamma(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell)+2k^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell=0$$

よって、弾性支持ばりの曲げ振動に関する振動数方程式は、以下のように表される。

$$\boxed{\gamma^2(1-\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell)+2k\gamma(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell)+2k^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell=0}$$

【解法 II】

解法の方針としては、C_2，C_3，C_4をC_1で表すようにする。

①より、C_3はC_1で表されている。

③より、C_3をC_1で表すと、$\gamma(C_2-C_4)=k(C_1+C_1)=2kC_1$

$$\therefore \gamma C_2-\gamma C_4=2kC_1 \qquad \cdots\cdots\cdots③'$$

④より、C_3をC_1で表すと、

$$\gamma(C_1\sin\lambda\ell-C_2\cos\lambda\ell+C_1\sinh\lambda\ell+C_4\cosh\lambda\ell)$$
$$=k(C_1\cos\lambda\ell+C_2\sin\lambda\ell+C_1\cosh\lambda\ell+C_4\sinh\lambda\ell)$$

$$\begin{aligned}&\therefore -(\gamma\cos\lambda\ell+k\sin\lambda\ell)C_2+(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell)C_4\\&\quad=(-\gamma\sin\lambda\ell-\gamma\sinh\lambda\ell+k\cos\lambda\ell+k\cosh\lambda\ell)C_1\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots④'$$

③'と④'から、C_2を消去すると、

$$
\begin{array}{rl}
& \gamma\left(\gamma\cos\lambda\ell+k\sin\lambda\ell\right)C_2-\gamma\left(\gamma\cos\lambda\ell+k\sin\lambda\ell\right)C_4 \quad =2k\left(\gamma\cos\lambda\ell+k\sin\lambda\ell\right)C_1 \\
+) & -\gamma\left(\gamma\cos\lambda\ell+k\sin\lambda\ell\right)C_2+\gamma\left(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell\right)C_4=\gamma\left(-\gamma\sin\lambda\ell-\gamma\sinh\lambda\ell+k\cos\lambda\ell+k\cosh\lambda\ell\right)C_1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma\left\{\left(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell\right)-\left(\gamma\cos\lambda\ell+k\sin\lambda\ell\right)\right\}C_4\\
&\qquad=\left\{2k\left(\gamma\cos\lambda\ell+k\sin\lambda\ell\right)+\gamma\left(-\gamma\sin\lambda\ell-\gamma\sinh\lambda\ell+k\cos\lambda\ell+k\cosh\lambda\ell\right)\right\}C_1\\
&\qquad=\left\{2k\gamma\cos\lambda\ell+2k^2\sin\lambda\ell-\gamma^2\sin\lambda\ell-\gamma^2\sinh\lambda\ell+k\gamma\cos\lambda\ell+k\gamma\cosh\lambda\ell\right\}C_1\\
&\qquad=\left\{3k\gamma\cos\lambda\ell+\left(2k^2-\gamma^2\right)\sin\lambda\ell-\gamma^2\sinh\lambda\ell+k\gamma\cosh\lambda\ell\right\}C_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\therefore\gamma\left(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell-\gamma\cos\lambda\ell-k\sin\lambda\ell\right)C_4\\
&\qquad=\left\{3k\gamma\cos\lambda\ell+\left(2k^2-\gamma^2\right)\sin\lambda\ell-\gamma^2\sinh\lambda\ell+k\gamma\cosh\lambda\ell\right\}C_1
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots\cdots⑤
$$

同様に、③'と④'から、C_4を消去すると、

$$
\begin{aligned}
&\gamma\left(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell-\gamma\cos\lambda\ell-k\sin\lambda\ell\right)C_2\\
&=\gamma\left(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell-\gamma\cos\lambda\ell-k\sin\lambda\ell\right)C_4+2k\left(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell-\gamma\cos\lambda\ell-k\sin\lambda\ell\right)C_1
\end{aligned}
$$

これを変形すると、

$$
\begin{aligned}
&\gamma\left(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell-\gamma\cos\lambda\ell-k\sin\lambda\ell\right)C_2\\
&=\left\{3k\gamma\cos\lambda\ell+\left(2k^2-\gamma^2\right)\sin\lambda\ell-\gamma^2\sinh\lambda\ell+k\gamma\cosh\lambda\ell\right\}C_1\\
&\qquad+2k\left(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell-\gamma\cos\lambda\ell-k\sin\lambda\ell\right)C_1\\
&=\left\{\begin{array}{l}3k\gamma\cos\lambda\ell+\left(2k^2-\gamma^2\right)\sin\lambda\ell-\gamma^2\sinh\lambda\ell+k\gamma\cosh\lambda\ell\\+2k\gamma\cosh\lambda\ell-2k^2\sinh\lambda\ell-2k\gamma\cos\lambda\ell-2k^2\sin\lambda\ell\end{array}\right\}C_1\\
&=\left\{k\gamma\cos\lambda\ell-\gamma^2\sin\lambda\ell-\gamma^2\sinh\lambda\ell+3k\gamma\cosh\lambda\ell-2k^2\sinh\lambda\ell\right\}C_1\\
&=\left\{-\left(2k^2+\gamma^2\right)\sinh\lambda\ell+k\gamma\cos\lambda\ell+3k\gamma\cosh\lambda\ell-\gamma^2\sin\lambda\ell\right\}C_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\therefore\gamma\left(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell-\gamma\cos\lambda\ell-k\sin\lambda\ell\right)C_2\\
&\qquad=\left\{-\left(2k^2+\gamma^2\right)\sinh\lambda\ell+k\gamma\cos\lambda\ell+3k\gamma\cosh\lambda\ell-\gamma^2\sin\lambda\ell\right\}C_1
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots\cdots⑥
$$

①，⑤，⑥の関係を②に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&-C_1\cos\lambda\ell-C_2\sin\lambda\ell+C_1\cosh\lambda\ell+C_4\sinh\lambda\ell=0\\
&\therefore-C_2\sin\lambda\ell+C_1\left(\cosh\lambda\ell-\cos\lambda\ell\right)+C_4\sinh\lambda\ell=0\\
&\therefore-\left\{-\left(2k^2+\gamma^2\right)\sinh\lambda\ell+k\gamma\cos\lambda\ell+3k\gamma\cosh\lambda\ell-\gamma^2\sin\lambda\ell\right\}C_1\sin\lambda\ell\\
&\qquad+\gamma\left(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell-\gamma\cos\lambda\ell-k\sin\lambda\ell\right)\left(\cosh\lambda\ell-\cos\lambda\ell\right)C_1\\
&\qquad+\left\{-\gamma^2\sinh\lambda\ell+3k\gamma\cos\lambda\ell+k\gamma\cosh\lambda\ell+\left(2k^2-\gamma^2\right)\sin\lambda\ell\right\}C_1\sinh\lambda\ell=0
\end{aligned}
$$

ここで、$C_1\neq0$だから、

$$
\begin{aligned}
&-\left\{-\left(2k^2+\gamma^2\right)\sinh\lambda\ell+k\gamma\cos\lambda\ell+3k\gamma\cosh\lambda\ell-\gamma^2\sin\lambda\ell\right\}\sin\lambda\ell\\
&\quad+\gamma\left(\gamma\cosh\lambda\ell-k\sinh\lambda\ell-\gamma\cos\lambda\ell-k\sin\lambda\ell\right)\left(\cosh\lambda\ell-\cos\lambda\ell\right)\\
&\quad+\left\{-\gamma^2\sinh\lambda\ell+3k\gamma\cos\lambda\ell+k\gamma\cosh\lambda\ell+\left(2k^2-\gamma^2\right)\sin\lambda\ell\right\}\sinh\lambda\ell=0\\
&\therefore\left(2k^2+\gamma^2\right)\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell-k\gamma\sin\lambda\ell\cos\lambda\ell-3k\gamma\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell+\gamma^2\sin^2\lambda\ell\\
&\qquad+\left(\gamma^2\cosh\lambda\ell-k\gamma\sinh\lambda\ell-\gamma^2\cos\lambda\ell-k\gamma\sin\lambda\ell\right)\left(\cosh\lambda\ell-\cos\lambda\ell\right)\\
&\qquad-\gamma^2\sinh^2\lambda\ell+3k\gamma\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell+k\gamma\sinh\lambda\ell\cosh\lambda\ell+\left(2k^2-\gamma^2\right)\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell=0
\end{aligned}
$$

$$\therefore \left(2k^2+\gamma^2\right)\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell - k\gamma\sin\lambda\ell\cos\lambda\ell - 3k\gamma\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell + \gamma^2\sin^2\lambda\ell$$
$$+\gamma^2\cosh^2\lambda\ell - k\gamma\sinh\lambda\ell\cosh\lambda\ell - \gamma^2\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell - k\gamma\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell$$
$$-\gamma^2\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell + k\gamma\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell + \gamma^2\cos^2\lambda\ell + k\gamma\sin\lambda\ell\cos\lambda\ell$$
$$-\gamma^2\sinh^2\lambda\ell + 3k\gamma\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell + k\gamma\sinh\lambda\ell\cosh\lambda\ell + \left(2k^2-\gamma^2\right)\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell = 0$$
$$\therefore 4k^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell - 4k\gamma\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell + \gamma^2\left(\sin^2\lambda\ell+\cos^2\lambda\ell\right)$$
$$+\gamma^2\left(\cosh^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell\right) - 2\gamma^2\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell + 4k\gamma\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell = 0$$

ここで、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$， $\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1$の関係を用いて、

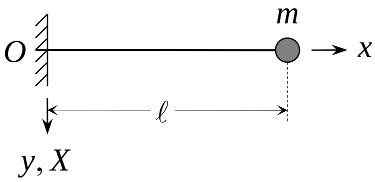
$$4k^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell - 4k\gamma\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell + 2\gamma^2 - 2\gamma^2\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell + 4k\gamma\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell = 0$$
$$\therefore 2k^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell - 2k\gamma\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell + \gamma^2 - \gamma^2\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell + 2k\gamma\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell = 0$$
$$\therefore \gamma^2\left(1-\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right) + 2k\gamma\left(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell - \sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right) + 2k^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell = 0$$

よって、弾性支持ばりの曲げ振動に関する振動数方程式は、以下のように表される。

$$\boxed{\gamma^2\left(1-\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right) + 2k\gamma\left(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell - \sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right) + 2k^2\sin\lambda\ell\sinh\lambda\ell = 0}$$

【例題】自由端に集中質量をもつ片持ばりの曲げ振動の振動数方程式

右図のように、はりの曲げ剛性 EI，単位体積質量 w，断面積 A が一定で、長さ ℓ の片持ばりの自由端に集中質量 m をもつはりの曲げ振動の振動数方程式を求める。



このとき、はりの曲げ振動による変位の一般解は、〝変数分離〟の形で次のように表される。

$$y(x,t)=X(x)\cdot T(t)$$
$$=\left\{C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x+C_3\cosh\lambda x+C_4\sinh\lambda x\right\}\cdot\left\{A\cos\omega t+B\sin\omega t\right\}$$

ここで、固定端でたわみとたわみ角が 0，自由端で曲げモーメントが 0 であり、かつ、自由端では集中質量による慣性力と復元力（せん断力）が釣合っている（**ダランベールの原理**）から、境界条件は次のようになる。

$$\begin{cases} x=0: \quad X=0, \qquad \dfrac{dX}{dx}=0 \\ x=\ell: \quad \dfrac{d^2X}{dx^2}=0, \quad -EI\dfrac{d^3X}{dx^3}=-\left(m\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \end{cases}$$

また、

$$\frac{dX}{dx}=-\lambda C_1\sin\lambda x+\lambda C_2\cos\lambda x+\lambda C_3\sinh\lambda x+\lambda C_4\cosh\lambda x$$
$$\frac{d^2X}{dx^2}=-\lambda^2C_1\cos\lambda x-\lambda^2C_2\sin\lambda x+\lambda^2C_3\cosh\lambda x+\lambda^2C_4\sinh\lambda x$$
$$\frac{d^3X}{dx^3}=\lambda^3C_1\sin\lambda x-\lambda^3C_2\cos\lambda x+\lambda^3C_3\sinh\lambda x+\lambda^3C_4\cosh\lambda x$$

であるから、

$x=0$ のとき、$X=0$ だから、　$C_1+C_3=0$ ………①

$x=0$ のとき、$\dfrac{dX}{dx}=0$ だから、　$C_2+C_4=0$ ………②

$x=\ell$ のとき、$\dfrac{d^2X}{dx^2}=0$ だから、$-C_1\cos\lambda\ell-C_2\sin\lambda\ell+C_3\cosh\lambda\ell+C_4\sinh\lambda\ell=0$ ………③

$x=\ell$ のとき、$-EI\dfrac{d^3X}{dx^3}=-\left(m\dfrac{\partial^2y}{\partial t^2}\right)=-\left(-m\omega^2X\right)$ だから、

$$-EI\lambda^3\left\{C_1\sin\lambda\ell-C_2\cos\lambda\ell+C_3\sinh\lambda\ell+C_4\cosh\lambda\ell\right\}$$
$$=m\omega^2\left\{C_1\cos\lambda\ell+C_2\sin\lambda\ell+C_3\cosh\lambda\ell+C_4\sinh\lambda\ell\right\} \quad \text{………④}$$

方針：式①～④の連立方程式から、C_2，C_3，C_4 を消去する方法で振動数方程式を求める。

式①，②より、$C_3=-C_1$，$C_4=-C_2$ だから、これを式③に代入して整理すると、

$$\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)C_1+\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)C_2=0 \quad \text{………③'}$$

式①，②より、$C_3=-C_1$，$C_4=-C_2$ だから、これを式④に代入して整理すると、

$$-EI\lambda^3\left\{C_1\sin\lambda\ell-C_2\cos\lambda\ell-C_1\sinh\lambda\ell-C_2\cosh\lambda\ell\right\}$$
$$=m\omega^2\left\{C_1\cos\lambda\ell+C_2\sin\lambda\ell-C_1\cosh\lambda\ell-C_2\sinh\lambda\ell\right\}$$
$$EI\lambda^3\left\{C_1\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)-C_2\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)\right\}$$
$$=-m\omega^2\left\{C_1\left(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)+C_2\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)\right\}$$

$$\therefore \begin{aligned}&\left\{EI\lambda^3\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)+m\omega^2\left(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)\right\}C_1\\&-\left\{EI\lambda^3\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)-m\omega^2\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)\right\}C_2=0\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots④'$$

次に、③'×$\left\{EI\lambda^3\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)-m\omega^2\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)\right\}$ +④'×$\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)$を計算すると、

$$\left[\begin{aligned}&\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)\left\{EI\lambda^3\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)-m\omega^2\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)\right\}\\&+\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)\left\{EI\lambda^3\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)+m\omega^2\left(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)\right\}\end{aligned}\right]C_1=0$$

ここで、$C_1\neq0$だから、

$$\begin{aligned}&\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)\left\{EI\lambda^3\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)-m\omega^2\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)\right\}\\&\quad+\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)\left\{EI\lambda^3\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)+m\omega^2\left(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)\right\}=0\end{aligned}$$

これを変形すると、

$$\begin{aligned}&EI\lambda^3\left\{\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)^2+\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)\right\}\\&\quad-m\omega^2\left\{\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)-\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)\left(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)\right\}=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&EI\lambda^3\left\{\cos^2\lambda\ell+2\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell+\cosh^2\lambda\ell+\sin^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell\right\}\\&\quad-m\omega^2\left\{\begin{aligned}&\cos\lambda\ell\sin\lambda\ell-\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell+\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\cosh\lambda\ell\\&-\sin\lambda\ell\cos\lambda\ell+\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell-\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\cosh\lambda\ell\end{aligned}\right\}=0\end{aligned}$$

ここで、$\sin^2\lambda\ell+\cos^2\lambda\ell=1$，$\cosh^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell=1$だから、

$$EI\lambda^3\left\{2+2\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right\}-m\omega^2\left\{-2\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell+2\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right\}=0$$

よって、このはりの曲げ振動の振動数方程式は、次のように表される。

$$\boxed{EI\lambda^3\left(1+\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)+m\omega^2\left(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)=0}$$

ここで、$\dfrac{\omega^2}{v^2}=\lambda^4$より$\omega^2=\lambda^4v^2$、また、$v^2=\dfrac{EI}{wA}$だから、$\omega^2=\lambda^4\dfrac{EI}{wA}$

さらに、集中質量mを〝はりの質量$wA\ell$〟のk倍、即ち、$m=k\times wA\ell$で表すと、

$$EI\lambda^3\left(1+\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)+k\times wA\ell\cdot\lambda^4\frac{EI}{wA}\left(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)=0$$

$$EI\lambda^3\left(1+\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)+k\ell\cdot EI\lambda^4\left(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)=0$$

したがって、このはりの曲げ振動の振動数方程式は、次のように表される。

$$\boxed{\left(1+\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)+k\cdot\lambda\ell\left(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)=0}$$

【例】自由端に集中質量をもつ片持ばりの１次固有振動数

自由端に集中質量がない場合の片持ばりの曲げ振動の 1 次固有振動数の厳密解 ω_0 は、

$$\omega_0 = \left(\frac{1.875104068711961\cdots}{\ell}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{wA}} \cong \frac{3.516}{\ell^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{wA}}$$

と表される。

自由端の集中質量 m を〝はりの質量 $wA\ell$〟の k 倍、即ち、$m = k \times wA\ell$ で表すとき、はりの曲げ振動の振動数方程式は、次のように表される。

$$\left(1+\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)+k\cdot\lambda\ell\left(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)=0$$

これから質量比 k をパラメータとして、$\lambda\ell$ を得ると、$\omega^2 = \lambda^4 \dfrac{EI}{wA}$ より、$\omega_C = \lambda^2\sqrt{\dfrac{EI}{wA}} = \dfrac{\left(\lambda\ell\right)^2}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EI}{wA}}$

となり、1 次固有振動数の比 $\dfrac{\omega_C}{\omega_0} = \dfrac{\left(\lambda\ell\right)^2}{\left(1.875104068711961\cdots\right)^2}$ が求まる。

この 1 次固有振動数の比 $\dfrac{\omega_C}{\omega_0}$ と質量比 k の関係を「集中質量の 1 次固有振動数に及ぼす影響」として図-1 に示す。この図から、集中質量が〝はりの質量〟と同程度の場合、1 次固有振動数は半分（周期が倍）程度に変化することがわかる。

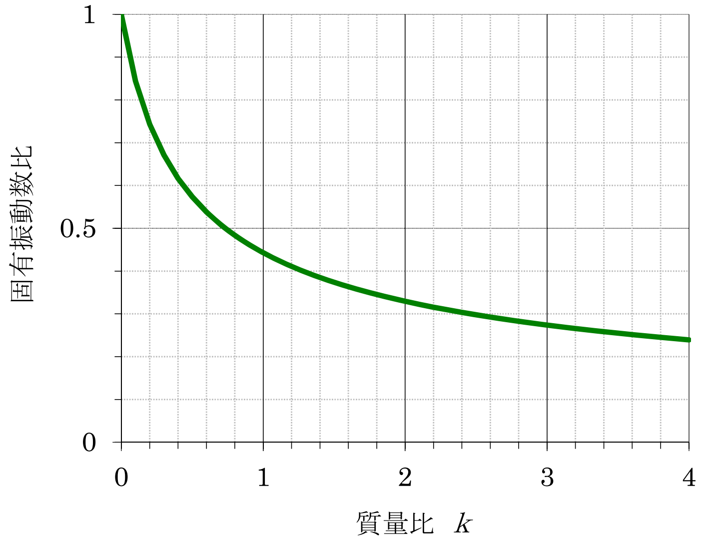
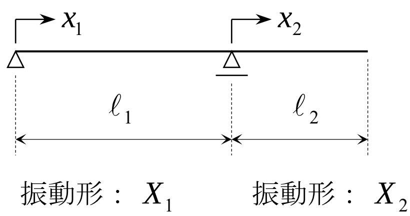


図-1　集中質量の 1 次固有振動数に及ぼす影響

【例題】張出ばりの曲げ振動の振動数方程式



右図のように、支持スパンℓ_1，張出スパンℓ_2の張出ばりの振動数方程式を導け。ただし、はりの曲げ剛性はEI，単位体積質量はw，断面積はAで一定とする。

【解答例】

はりの曲げ振動の微分方程式は、$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}+v^2\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0$と表される。ここに、$v^2=\dfrac{EI}{wA}$である。

この微分方程式の解は、$y=X(x)\cdot e^{i\omega t}$の形で与えられるから、$-\omega^2 X+v^2\dfrac{d^4X}{dx^4}=0$　即ち、$\dfrac{d^4X}{dx^4}-\dfrac{\omega^2}{v^2}X=0$　が得られる。いま、$\dfrac{\omega^2}{v^2}=\lambda^4$とおけば、$\dfrac{d^4X}{dx^4}-\lambda^4X=0$となり、その特性方程式の4根は$\pm\lambda$，$\pm i\lambda$となるから、振動形の一般解は、$X=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x+C_3\cosh\lambda x+C_4\sinh\lambda x$で与えられる。ここに、$C_1$，$C_2$，$C_3$，$C_4$は任意定数で、$\lambda$の値および$C_1$，$C_2$，$C_3$，$C_4$の大きさの比は境界条件より決定される。

そこで、支持スパンと張出スパンの振動形をそれぞれX_1，X_2として、次のように表すことにする。

$$X_1=C_1\cos\lambda x_1+C_2\sin\lambda x_1+C_3\cosh\lambda x_1+C_4\sinh\lambda x_1$$
$$X_2=D_1\cos\lambda x_2+D_2\sin\lambda x_2+D_3\cosh\lambda x_2+D_4\sinh\lambda x_2$$

X_1，X_2は同じ形なので、X_1についてだけ逐次微分したものを以下に示す。

$$X_1'=\frac{dX_1}{dx_1}=-\lambda C_1\sin\lambda x_1+\lambda C_2\cos\lambda x_1+\lambda C_3\sinh\lambda x_1+\lambda C_4\cosh\lambda x_1$$
$$X_1''=\frac{d^2X_1}{dx_1^2}=-\lambda^2C_1\cos\lambda x_1-\lambda^2C_2\sin\lambda x_1+\lambda^2C_3\cosh\lambda x_1+\lambda^2C_4\sinh\lambda x_1$$
$$X_1'''=\frac{d^3X_1}{dx_1^3}=\lambda^3C_1\sin\lambda x_1-\lambda^3C_2\cos\lambda x_1+\lambda^3C_3\sinh\lambda x_1+\lambda^3C_4\cosh\lambda x_1$$

<u>境界条件</u>としては、以下の6条件がある。

(1) $x_1=0$のとき、$X_1=0$（たわみがゼロ）より、　$C_1+C_3=0$　………①

(2) $x_1=0$のとき、$X_1''=0$（曲げモーメントがゼロ）より、$-\lambda^2C_1+\lambda^2C_3=0$

　ここで、$\lambda\neq 0$だから、$-C_1+C_3=0$　………②

上記の条件①，②より、$\boxed{C_1=C_3=0}$だから、$X_1=C_2\sin\lambda x_1+C_4\sinh\lambda x_1$となる。

(3) $x_1=\ell_1$のとき、$X_1=0$（たわみがゼロ）より、$C_2\sin\lambda\ell_1+C_4\sinh\lambda\ell_1=0$　………③

(4) $x_2=0$のとき、$X_2=0$（たわみがゼロ）より、$D_1+D_3=0$　　$\therefore\boxed{D_3=-D_1}$　………④

(5) $x_2=\ell_2$のとき、$X_2'''=0$（せん断力がゼロ）より、

$$\lambda^3D_1\sin\lambda\ell_2-\lambda^3D_2\cos\lambda\ell_2+\lambda^3D_3\sinh\lambda\ell_2+\lambda^3D_4\cosh\lambda\ell_2=0$$

　ここで、$\lambda\neq 0$と④から、$D_1\sin\lambda\ell_2-D_2\cos\lambda\ell_2-D_1\sinh\lambda\ell_2+D_4\cosh\lambda\ell_2=0$

$$\therefore D_1\cdot\left(\sin\lambda\ell_2-\sinh\lambda\ell_2\right)-D_2\cos\lambda\ell_2+D_4\cosh\lambda\ell_2=0\qquad\text{………⑤}$$

(6) $x_2=\ell_2$のとき、$X_2''=0$（曲げモーメントがゼロ）より、

$$-\lambda^2D_1\cos\lambda\ell_2-\lambda^2D_2\sin\lambda\ell_2+\lambda^2D_3\cosh\lambda\ell_2+\lambda^2D_4\sinh\lambda\ell_2=0$$

　ここで、$\lambda\neq 0$と④から、$-D_1\cos\lambda\ell_2-D_2\sin\lambda\ell_2-D_1\cosh\lambda\ell_2+D_4\sinh\lambda\ell_2=0$

$$\therefore -D_1\cdot\left(\cos\lambda\ell_2+\cosh\lambda\ell_2\right)-D_2\sin\lambda\ell_2+D_4\sinh\lambda\ell_2=0\qquad\text{………⑥}$$

<u>連続条件</u>としては、以下の2条件がある。

(7) $x_1 = \ell_1$ かつ $x_2 = 0$ のとき、$X_1' = X_2'$（たわみ角が連続）より、

$$\lambda C_2 \cos\lambda\ell_1 + \lambda C_4 \cosh\lambda\ell_1 = \lambda D_2 + \lambda D_4$$

ここで、$\lambda \neq 0$ だから、$C_2 \cos\lambda\ell_1 + C_4 \cosh\lambda\ell_1 = D_2 + D_4$ ………⑦

(8) $x_1 = \ell_1$ かつ $x_2 = 0$ のとき、$X_1'' = X_2''$（曲げモーメントが連続）より、

$$-\lambda^2 C_2 \sin\lambda\ell_1 + \lambda^2 C_4 \sinh\lambda\ell_1 = -\lambda^2 D_1 + \lambda^2 D_3$$

ここで、$\lambda \neq 0$ だから、$-C_2 \sin\lambda\ell_1 + C_4 \sinh\lambda\ell_1 = -D_1 + D_3$ ………⑧

以上より、積分定数に関して、既に利用した①，②，④を除く条件をまとめると、以下の通りである。

$C_2 \sin\lambda\ell_1 + C_4 \sinh\lambda\ell_1 = 0$ ………③

$D_1 \cdot \left(\sin\lambda\ell_2 - \sinh\lambda\ell_2\right) - D_2 \cos\lambda\ell_2 + D_4 \cosh\lambda\ell_2 = 0$ ………⑤

$-D_1 \cdot \left(\cos\lambda\ell_2 + \cosh\lambda\ell_2\right) - D_2 \sin\lambda\ell_2 + D_4 \sinh\lambda\ell_2 = 0$ ………⑥

$C_2 \cos\lambda\ell_1 + C_4 \cosh\lambda\ell_1 = D_2 + D_4$ ………⑦

$-C_2 \sin\lambda\ell_1 + C_4 \sinh\lambda\ell_1 = -2D_1$ ………⑧

振動数方程式を求める方針としては、C_2，C_4 を消去して、D_1，D_2，D_4 のみに関する 3 元連立方程式を導出し、有義解をもつための必要十分条件である D_1，D_2，D_4 に関する係数行列式＝0 を使用する。

まず、⑦，⑧より、C_2，C_4 を消去する。

⑦×$\sin\lambda\ell_1$＋⑧×$\cos\lambda\ell_1$ より、C_2 を消去する。

$$C_2 \sin\lambda\ell_1 \cos\lambda\ell_1 + C_4 \sin\lambda\ell_1 \cosh\lambda\ell_1 = \left(D_2 + D_4\right) \cdot \sin\lambda\ell_1$$

$$-C_2 \sin\lambda\ell_1 \cos\lambda\ell_1 + C_4 \cos\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1 = -2D_1 \cdot \cos\lambda\ell_1$$

$\therefore C_4 \cdot \left(\sin\lambda\ell_1 \cosh\lambda\ell_1 + \cos\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1\right) = \left(D_2 + D_4\right) \cdot \sin\lambda\ell_1 - 2D_1 \cdot \cos\lambda\ell_1$ ………⑦’

⑦×$\sinh\lambda\ell_1$－⑧×$\cosh\lambda\ell_1$ より、C_4 を消去する。

$$C_2 \cos\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1 + C_4 \sinh\lambda\ell_1 \cosh\lambda\ell_1 = \left(D_2 + D_4\right) \cdot \sinh\lambda\ell_1$$

$$-C_2 \sin\lambda\ell_1 \cosh\lambda\ell_1 + C_4 \sinh\lambda\ell_1 \cosh\lambda\ell_1 = -2D_1 \cdot \cosh\lambda\ell_1$$

$\therefore C_2 \cdot \left(\sin\lambda\ell_1 \cosh\lambda\ell_1 + \cos\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1\right) = \left(D_2 + D_4\right) \cdot \sinh\lambda\ell_1 + 2D_1 \cdot \cosh\lambda\ell_1$ ………⑧’

⑦’，⑧’を③に代入して、C_2，C_4 を消去し、D_1，D_2，D_4 のみの式を求める。

③式に $\left(\sin\lambda\ell_1 \cosh\lambda\ell_1 + \cos\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1\right)$ を乗ずる。

$$C_2 \cdot \sin\lambda\ell_1 \cdot \left(\sin\lambda\ell_1 \cosh\lambda\ell_1 + \cos\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1\right) + C_4 \cdot \sinh\lambda\ell_1 \cdot \left(\sin\lambda\ell_1 \cosh\lambda\ell_1 + \cos\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1\right) = 0$$

これに⑦’，⑧’を代入すると、

$$\sin\lambda\ell_1 \cdot \left\{\left(D_2 + D_4\right) \cdot \sinh\lambda\ell_1 + 2D_1 \cdot \cosh\lambda\ell_1\right\} + \sinh\lambda\ell_1 \cdot \left\{\left(D_2 + D_4\right) \cdot \sin\lambda\ell_1 - 2D_1 \cdot \cos\lambda\ell_1\right\} = 0$$

$$\therefore 2\sin\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1 \cdot \left(D_2 + D_4\right) + \left(\sin\lambda\ell_1 \cosh\lambda\ell_1 - \cos\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1\right) \cdot 2D_1 = 0$$

$\therefore \sin\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1 \cdot \left(D_2 + D_4\right) + \left(\sin\lambda\ell_1 \cosh\lambda\ell_1 - \cos\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1\right) \cdot D_1 = 0$ ………③’

⑤，⑥，③’は、次のような D_1，D_2，D_4 のみの式である。

$$D_1 \cdot \left(\sin\lambda\ell_2 - \sinh\lambda\ell_2\right) - D_2 \cos\lambda\ell_2 + D_4 \cosh\lambda\ell_2 = 0$$

$$-D_1 \cdot \left(\cos\lambda\ell_2 + \cosh\lambda\ell_2\right) - D_2 \sin\lambda\ell_2 + D_4 \sinh\lambda\ell_2 = 0$$

$$\left(\sin\lambda\ell_1 \cosh\lambda\ell_1 - \cos\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1\right) \cdot D_1 + \sin\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1 \cdot \left(D_2 + D_4\right) = 0$$

これをマトリクス・ベクトル表示すると、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} \left(\sin\lambda\ell_2 - \sinh\lambda\ell_2\right) & -\cos\lambda\ell_2 & \cosh\lambda\ell_2 \\ \left(\cos\lambda\ell_2 + \cosh\lambda\ell_2\right) & \sin\lambda\ell_2 & -\sinh\lambda\ell_2 \\ \left(\sin\lambda\ell_1 \cosh\lambda\ell_1 - \cos\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1\right) & \sin\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1 & \sin\lambda\ell_1 \sinh\lambda\ell_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

この式が、有義解をもつための必要十分条件は、係数行列式がゼロとなることであるから、

$$\begin{vmatrix} (\sin\lambda\ell_2-\sinh\lambda\ell_2) & -\cos\lambda\ell_2 & \cosh\lambda\ell_2 \\ (\cos\lambda\ell_2+\cosh\lambda\ell_2) & \sin\lambda\ell_2 & -\sinh\lambda\ell_2 \\ (\sin\lambda\ell_1\cosh\lambda\ell_1-\cos\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1) & \sin\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1 & \sin\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1 \end{vmatrix}=0$$

これを展開すると、

$$\begin{aligned}&(\sin\lambda\ell_2-\sinh\lambda\ell_2)\sin\lambda\ell_2\sin\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1\\&+(\sin\lambda\ell_1\cosh\lambda\ell_1-\cos\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1)\cos\lambda\ell_2\sinh\lambda\ell_2\\&+(\cos\lambda\ell_2+\cosh\lambda\ell_2)\sin\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1\cosh\lambda\ell_2\\&-(\sin\lambda\ell_1\cosh\lambda\ell_1-\cos\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1)\sin\lambda\ell_2\cosh\lambda\ell_2\\&-(\sin\lambda\ell_2-\sinh\lambda\ell_2)\sin\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1(-\sinh\lambda\ell_2)\\&-(\cos\lambda\ell_2+\cosh\lambda\ell_2)(-\cos\lambda\ell_2)\sin\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\sin\lambda\ell_1\cosh\lambda\ell_1-\cos\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1)\cdot(\cos\lambda\ell_2\sinh\lambda\ell_2-\sin\lambda\ell_2\cosh\lambda\ell_2)\\&+\sin\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1\left\{\begin{aligned}&(\sin\lambda\ell_2-\sinh\lambda\ell_2)\sin\lambda\ell_2+(\cos\lambda\ell_2+\cosh\lambda\ell_2)\cosh\lambda\ell_2\\&+(\sin\lambda\ell_2-\sinh\lambda\ell_2)\sinh\lambda\ell_2+(\cos\lambda\ell_2+\cosh\lambda\ell_2)\cos\lambda\ell_2\end{aligned}\right\}=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sin\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1\left\{(\sin\lambda\ell_2-\sinh\lambda\ell_2)\cdot(\sin\lambda\ell_2+\sinh\lambda\ell_2)+(\cos\lambda\ell_2+\cosh\lambda\ell_2)^2\right\}\\&-(\sin\lambda\ell_1\cosh\lambda\ell_1-\cos\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1)\cdot(\sin\lambda\ell_2\cosh\lambda\ell_2-\cos\lambda\ell_2\sinh\lambda\ell_2)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sin\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1\left\{(\sin^2\lambda\ell_2+\cos^2\lambda\ell_2)+(\cosh^2\lambda\ell_2-\sinh^2\lambda\ell_2)+2\cos\lambda\ell_2\cosh\lambda\ell_2\right\}\\&-(\sin\lambda\ell_1\cosh\lambda\ell_1-\cos\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1)\cdot(\sin\lambda\ell_2\cosh\lambda\ell_2-\cos\lambda\ell_2\sinh\lambda\ell_2)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\sin\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1\cdot(1+\cos\lambda\ell_2\cosh\lambda\ell_2)\\&-(\sin\lambda\ell_1\cosh\lambda\ell_1-\cos\lambda\ell_1\sinh\lambda\ell_1)\cdot(\sin\lambda\ell_2\cosh\lambda\ell_2-\cos\lambda\ell_2\sinh\lambda\ell_2)=0\end{aligned}$$

したがって、張出ばりの振動数方程式は次のようになる。

$$\boxed{\begin{aligned}&(\sin\lambda\ell_1\cdot\cosh\lambda\ell_1-\cos\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1)\cdot(\sin\lambda\ell_2\cdot\cosh\lambda\ell_2-\cos\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2)\\&\quad-2\cdot\sin\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1\cdot(1+\cos\lambda\ell_2\cdot\cosh\lambda\ell_2)=0\end{aligned}}$$

==

いま、$\ell_1=\ell_2\equiv\ell$ とすると、次のようになる。

$$\begin{aligned}&(\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell-\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell)\cdot(\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell-\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell)\\&-2\sin\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell\cdot(1+\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell)=0\\&\therefore(\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell-\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell)^2-2\sin\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell\cdot(1+\cos\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell)=0\\&\sin^2\lambda\ell\cdot\cosh^2\lambda\ell-2\sin\lambda\ell\cdot\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell+\cos^2\lambda\ell\cdot\sinh^2\lambda\ell\\&-2\sin\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-2\sin\lambda\ell\cdot\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0\\&\therefore\sin^2\lambda\ell\cdot\cosh^2\lambda\ell+\cos^2\lambda\ell\cdot\sinh^2\lambda\ell-2\sin\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-4\sin\lambda\ell\cdot\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0\\&\therefore\begin{aligned}&\sin^2\lambda\ell\cdot(1+\sinh^2\lambda\ell)+(1-\sin^2\lambda\ell)\cdot\sinh^2\lambda\ell\\&\quad-2\sin\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-4\sin\lambda\ell\cdot\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0\end{aligned}\\&\therefore\sin^2\lambda\ell+\sinh^2\lambda\ell-2\sin\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-4\sin\lambda\ell\cdot\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0\end{aligned}$$

$$\therefore \left(\sin\lambda\ell - \sinh\lambda\ell\right)^2 - 4\sin\lambda\ell\cdot\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell = 0$$

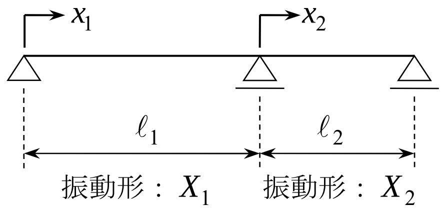
ここで、$2\sin\lambda\ell\cdot\cos\lambda\ell = \sin 2\lambda\ell$，$2\sinh\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell = \sinh 2\lambda\ell$ であるから、

$$\left(\sin\lambda\ell - \sinh\lambda\ell\right)^2 - \sin 2\lambda\ell\cdot\sinh 2\lambda\ell = 0$$

したがって、$\ell_1 = \ell_2 \equiv \ell$ のときの、張出ばりの振動数方程式は次のようになる。

$\boxed{\left(\sin\lambda\ell - \sinh\lambda\ell\right)^2 - \sin 2\lambda\ell\cdot\sinh 2\lambda\ell = 0}$ または、$\boxed{\left(\sin\lambda\ell - \sinh\lambda\ell\right)^2 = \sin 2\lambda\ell\cdot\sinh 2\lambda\ell}$

【例題】連続ばりの曲げ振動の振動数方程式



右図のように、左スパンℓ_1，右スパンℓ_2の連続ばりの振動数方程式を導け。ただし､はりの曲げ剛性はEI, 単位体積質量はw, 断面積はAで一定とする。

【解答例】

はりの曲げ振動の微分方程式は、$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}+v^2\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0$と表される。ここに、$v^2=\dfrac{EI}{wA}$である。

この微分方程式の解は、$y=X\left(x\right)\cdot e^{i\omega t}$の形で与えられるから、$-\omega^2 X+v^2\dfrac{d^4X}{dx^4}=0$　即ち、$\dfrac{d^4X}{dx^4}-\dfrac{\omega^2}{v^2}X=0$ が得られる。いま、$\dfrac{\omega^2}{v^2}=\lambda^4$とおけば、$\dfrac{d^4X}{dx^4}-\lambda^4X=0$となり、その特性方程式の4根は$\pm\lambda$，$\pm i\lambda$となるから、振動形の一般解は、$X=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x+C_3\cosh\lambda x+C_4\sinh\lambda x$で与えられる。ここに、$C_1$，$C_2$，$C_3$，$C_4$は任意定数で、$\lambda$の値および$C_1$，$C_2$，$C_3$，$C_4$の大きさの比は境界条件より決定される。

そこで、左スパンと右スパンの振動形をそれぞれX_1，X_2として、次のように表すことにする。

$$X_1=C_1\cos\lambda x_1+C_2\sin\lambda x_1+C_3\cosh\lambda x_1+C_4\sinh\lambda x_1$$

$$X_2=D_1\cos\lambda x_2+D_2\sin\lambda x_2+D_3\cosh\lambda x_2+D_4\sinh\lambda x_2$$

X_1，X_2は同じ形なので、X_1についてだけ逐次微分したものを以下に示す。

$$X_1'=\frac{dX_1}{dx_1}=-\lambda C_1\sin\lambda x_1+\lambda C_2\cos\lambda x_1+\lambda C_3\sinh\lambda x_1+\lambda C_4\cosh\lambda x_1$$

$$X_1''=\frac{d^2X_1}{dx_1^2}=-\lambda^2C_1\cos\lambda x_1-\lambda^2C_2\sin\lambda x_1+\lambda^2C_3\cosh\lambda x_1+\lambda^2C_4\sinh\lambda x_1$$

$$X_1'''=\frac{d^3X_1}{dx_1^3}=\lambda^3C_1\sin\lambda x_1-\lambda^3C_2\cos\lambda x_1+\lambda^3C_3\sinh\lambda x_1+\lambda^3C_4\cosh\lambda x_1$$

<u>境界条件</u>としては、以下の6条件がある。

(1) $x_1=0$のとき、$X_1=0$（たわみがゼロ）より、　$C_1+C_3=0$　………①

(2) $x_1=0$のとき、$X_1''=0$（曲げモーメントがゼロ）より、

$-\lambda^2C_1+\lambda^2C_3=0$　　$\therefore -C_1+C_3=0$　………②

上記の条件①，②より、$\boxed{C_1=C_3=0}$

(3) $x_1=\ell_1$のとき、$X_1=0$（たわみがゼロ）より、

$C_2\sin\lambda\ell_1+C_4\sinh\lambda\ell_1=0$　　$\therefore\boxed{C_4=-\dfrac{\sin\lambda\ell_1}{\sinh\lambda\ell_1}C_2}$（$\because\sinh\lambda\ell_1\neq0$）　………③

(4) $x_2=0$のとき、$X_2=0$（たわみがゼロ）より、$D_1+D_3=0$　　$\therefore\boxed{D_1=-D_3}$　………④

(5) $x_2=\ell_2$のとき、$X_2=0$（たわみがゼロ）より、

$D_1\cos\lambda\ell_2+D_2\sin\lambda\ell_2+D_3\cosh\lambda\ell_2+D_4\sinh\lambda\ell_2=0$　………⑤

(6) $x_2=\ell_2$のとき、$X_2''=0$（曲げモーメントがゼロ）より、

$-\lambda^2D_1\cos\lambda\ell_2-\lambda^2D_2\sin\lambda\ell_2+\lambda^2D_3\cosh\lambda\ell_2+\lambda^2D_4\sinh\lambda\ell_2=0$

$\therefore -D_1\cos\lambda\ell_2-D_2\sin\lambda\ell_2+D_3\cosh\lambda\ell_2+D_4\sinh\lambda\ell_2=0$　………⑥

<u>連続条件</u>としては、以下の2条件がある。

(7) $x_1=\ell_1$かつ$x_2=0$のとき、$X_1'=X_2'$（たわみ角が連続）より、

$\lambda C_2\cos\lambda\ell_1+\lambda C_4\cosh\lambda\ell_1=\lambda D_2+\lambda D_4$

$$\therefore C_2\cos\lambda\ell_1 + C_4\cosh\lambda\ell_1 = D_2 + D_4 \qquad \cdots\cdots\cdots⑦$$

(8) $x_1=\ell_1$ かつ $x_2=0$ のとき、$X_1''=X_2''$（曲げモーメントが連続）より、

$$-\lambda^2 C_2\sin\lambda\ell_1 + \lambda^2 C_4\sinh\lambda\ell_1 = -\lambda^2 D_1 + \lambda^2 D_3$$

$$\therefore -C_2\sin\lambda\ell_1 + C_4\sinh\lambda\ell_1 = -D_1 + D_3 \qquad \cdots\cdots\cdots⑧$$

以上の条件より、すべての積分定数を C_2，D_2，D_4 で表すようにしてゆく。

まず、③, ④を⑧に代入すると、$\sinh\lambda\ell_1 \neq 0$ であるから、

$$2D_3 = -C_2\sin\lambda\ell_1 - \frac{\sin\lambda\ell_1}{\sinh\lambda\ell_1}C_2\cdot\sinh\lambda\ell_1 = -2C_2\sin\lambda\ell_1$$

$$\therefore \boxed{D_3 = -C_2\sin\lambda\ell_1} \text{ また、} \boxed{D_1 = C_2\sin\lambda\ell_1}$$

これらを⑤に代入すると、

$$C_2\sin\lambda\ell_1\cdot\cos\lambda\ell_2 + D_2\sin\lambda\ell_2 - C_2\sin\lambda\ell_1\cdot\cosh\lambda\ell_2 + D_4\sinh\lambda\ell_2 = 0$$

$$\therefore C_2\sin\lambda\ell_1\cdot\left(\cos\lambda\ell_2 - \cosh\lambda\ell_2\right) + D_2\sin\lambda\ell_2 + D_4\sinh\lambda\ell_2 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots⑤'$$

また、これらを⑥に代入すると、

$$-C_2\sin\lambda\ell_1\cdot\cos\lambda\ell_2 - D_2\sin\lambda\ell_2 - C_2\sin\lambda\ell_1\cdot\cosh\lambda\ell_2 + D_4\sinh\lambda\ell_2 = 0$$

$$\therefore C_2\sin\lambda\ell_1\cdot\left(\cos\lambda\ell_2 + \cosh\lambda\ell_2\right) + D_2\sin\lambda\ell_2 - D_4\sinh\lambda\ell_2 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots⑥'$$

さらに、③を⑦に代入すると、

$$C_2\cos\lambda\ell_1 - \frac{\sin\lambda\ell_1}{\sinh\lambda\ell_1}C_2\cosh\lambda\ell_1 = D_2 + D_4$$

$$\therefore \frac{\cos\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1 - \sin\lambda\ell_1\cdot\cosh\lambda\ell_1}{\sinh\lambda\ell_1}C_2 = D_2 + D_4$$

ここで、$\sinh\lambda\ell_1 \neq 0$ であるから、

$$C_2\left(\cos\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1 - \sin\lambda\ell_1\cdot\cosh\lambda\ell_1\right) - D_2\sinh\lambda\ell_1 - D_4\sinh\lambda\ell_1 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots⑦'$$

式⑤',⑥',⑦'をマトリックス・ベクトル表示すると、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} \sin\lambda\ell_1\cdot\left(\cos\lambda\ell_2 - \cosh\lambda\ell_2\right) & \sin\lambda\ell_2 & \sinh\lambda\ell_2 \\ \sin\lambda\ell_1\cdot\left(\cos\lambda\ell_2 + \cosh\lambda\ell_2\right) & \sin\lambda\ell_2 & -\sinh\lambda\ell_2 \\ \left(\cos\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1 - \sin\lambda\ell_1\cdot\cosh\lambda\ell_1\right) & -\sinh\lambda\ell_1 & -\sinh\lambda\ell_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ D_2 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots⑨$$

この式⑨が、有義解をもつための必要十分条件は、係数行列式がゼロとなることであるから、

$$\begin{vmatrix} \sin\lambda\ell_1\cdot\left(\cos\lambda\ell_2 - \cosh\lambda\ell_2\right) & \sin\lambda\ell_2 & \sinh\lambda\ell_2 \\ \sin\lambda\ell_1\cdot\left(\cos\lambda\ell_2 + \cosh\lambda\ell_2\right) & \sin\lambda\ell_2 & -\sinh\lambda\ell_2 \\ \left(\cos\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1 - \sin\lambda\ell_1\cdot\cosh\lambda\ell_1\right) & -\sinh\lambda\ell_1 & -\sinh\lambda\ell_1 \end{vmatrix} = 0$$

これを展開すると、

$$\begin{aligned}
&-\sin\lambda\ell_1\cdot\sin\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_1\left(\cos\lambda\ell_2 - \cosh\lambda\ell_2\right) \\
&-\sin\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_2\left(\cos\lambda\ell_2 + \cosh\lambda\ell_2\right) \\
&-\sin\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2\left(\cos\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1 - \sin\lambda\ell_1\cdot\cosh\lambda\ell_1\right) \\
&-\sin\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2\left(\cos\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1 - \sin\lambda\ell_1\cdot\cosh\lambda\ell_1\right) \\
&+\sin\lambda\ell_1\cdot\sin\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_1\left(\cos\lambda\ell_2 + \cosh\lambda\ell_2\right) \\
&-\sin\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_2\left(\cos\lambda\ell_2 - \cosh\lambda\ell_2\right) = 0
\end{aligned}$$

$$-\sin\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1\left(\cos\lambda\ell_2\cdot\sin\lambda\ell_2-\sin\lambda\ell_2\cdot\cosh\lambda\ell_2\right)$$
$$-\sin\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1\left(\cos\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2+\cosh\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2\right)$$
$$-2\sin\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2\left(\cos\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1-\sin\lambda\ell_1\cdot\cosh\lambda\ell_1\right)$$
$$+\sin\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1\left(\cos\lambda\ell_2\cdot\sin\lambda\ell_2+\sin\lambda\ell_2\cdot\cosh\lambda\ell_2\right)$$
$$-\sin\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1\left(\cos\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2-\cosh\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2\right)=0$$

$$-\sin\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1\left(\cos\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2+\cosh\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2\right)$$
$$-\sin\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1\left(\cos\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2-\cosh\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2\right)$$
$$-\sin\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1\left(\cos\lambda\ell_2\cdot\sin\lambda\ell_2-\sin\lambda\ell_2\cdot\cosh\lambda\ell_2\right)$$
$$+\sin\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1\left(\cos\lambda\ell_2\cdot\sin\lambda\ell_2+\sin\lambda\ell_2\cdot\cosh\lambda\ell_2\right)$$
$$-2\sin\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2\left(\cos\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1-\sin\lambda\ell_1\cdot\cosh\lambda\ell_1\right)=0$$

$$-2\sin\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1\left(\cos\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2-\sin\lambda\ell_2\cdot\cosh\lambda\ell_2\right)$$
$$-2\sin\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2\left(\cos\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1-\sin\lambda\ell_1\cdot\cosh\lambda\ell_1\right)=0$$

したがって、連続ばりの振動数方程式は次のようになる。

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1\cdot\left(\cos\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2-\sin\lambda\ell_2\cdot\cosh\lambda\ell_2\right)\\&\qquad+\sin\lambda\ell_2\cdot\sinh\lambda\ell_2\cdot\left(\cos\lambda\ell_1\cdot\sinh\lambda\ell_1-\sin\lambda\ell_1\cdot\cosh\lambda\ell_1\right)=0\end{aligned}}$$

===

いま、$\ell_1=\ell_2\equiv\ell$ とすると、次のようになる。

$$\sin\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell\cdot\left(\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell\right)$$
$$+\sin\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell\cdot\left(\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell\right)=0$$
$$\therefore\sin\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell\cdot\left(\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell\right)=0$$

ここで、$\sinh\lambda\ell\neq0$ であるから、

$$\sin\lambda\ell\cdot\left(\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell\right)=0$$

したがって、$\ell_1=\ell_2\equiv\ell$ のときの、連続ばりの振動数方程式は次のようになる。

$$\boxed{\sin\lambda\ell\cdot\left(\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell\right)=0}$$

さらに、この振動数方程式は、次のように書き換えることができる。

$\boxed{\sin\lambda\ell=0}$　または、$\boxed{\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0}$

これは、〝両端単純支持ばり〟と〝一端固定・他端単純支持ばり〟の振動数方程式に他ならず、等スパン連続ばりは、両方の固有振動数を持つことを意味している。