一次元分布質量系の自由振動の近似解法

簡単な形状の一次元分布質量系における自由振動の厳密解法の１つとして、はりの曲げ振動を取り上げたが、実際の構造物では、断面が一様でなく、また構造形式が複雑なために微分方程式を立てることも困難な場合が多い。また、仮に微分方程式が得られたとしても変数係数となり、解を得ることができない場合もある。そこで、ここでは、このような場合に構造物の固有振動数および振動形を近似的に求める方法について述べることにする。それらの方法をまとめると、以下のようなものがある。

◎微分方程式が得られない場合の解法として、

- ●エネルギー法(energy method) または レイリー・リッツの方法(Rayleigh-Ritz's method)
  - ⇔ レイリーの方法(Rayleigh's method), リッツの方法(Ritz's method)
- ●ガラーキンの方法(Galerkin's method)
- ●多質点系置換法(multiple lumped mass model method)
  - ⇒ 有限要素法(finite element method)

◎微分方程式が得られている場合の解法として、

- ●階差法(finite difference method)
- ●ガラーキン法(Galerkin's method)

１．レイリーの方法(Rayleigh's method)

固有振動数のみを求める方法としてレイリー(Rayleigh)が考案したものであり、この方法の原理は、〝減衰を考慮しない場合の力学的エネルギー保存則に基づくもので、振動系の振動形を境界条件を満足する適当な変位関数で近似し、その系の運動エネルギーおよび位置のエネルギー（ひずみエネルギー）を求め、両者の最大値を等置する〟ことによって固有振動数を求めるものである。

いま、はりの場合を例にとり、境界条件を満足する適当な変位関数を $X(x)$ とし、この振動系の解を

$$y(x,t) = X(x)\cdot\cos\omega t \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

とおけば、運動エネルギー K は次の式のようになる。

$$K = \frac{1}{2}\int_0^\ell wA\dot{y}^2 dx = \frac{\omega^2}{2}\int_0^\ell wAX^2(x)dx\cdot\sin^2\omega t = K_{\max}\cdot\sin^2\omega t \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

また、曲げによるひずみエネルギー（位置のエネルギーに相当）V は次の式のようになる。

$$V = \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{M^2}{EI}dx = \frac{1}{2}\int_0^\ell EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 dx\cdot\cos^2\omega t = V_{\max}\cdot\cos^2\omega t \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

したがって、$K_{\max} = V_{\max}$ とおけば、

$$\frac{\omega^2}{2}\int_0^\ell wAX^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\ell EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 dx \qquad \therefore \boxed{\omega^2 = \frac{\int_0^\ell EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^\ell wAX^2(x)dx}} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

となり、この式(4)より固有円振動数が得られる。

この方法において、仮定した境界条件を満足する適当な変位関数が基準振動形に一致する場合に得られる固有振動数はその厳密解と一致するが、異なる場合には、この振動系に対して余分な拘束を行うことになり、振動系の剛性を増加させることになるため、得られる固有振動数はその厳密解よりも必ず大きく算定される。すなわち、厳密解はレイリーの方法から得られる固有振動数の最小値となる。

このように、レイリーの方法は、境界条件を満足する適当な変位関数が真の振動形に近ければ近いほど厳密な固有振動数に近い値が得られるが、高次の振動形を仮定することは困難であるため、原則として基本振動数(１次固有振動数)を推定する場合に用いられる。

レイリーの方法で固有振動数を求める場合、複雑な構造物では、振動形を仮定することが困難なことがある。このような場合、静荷重による構造物のたわみ曲線を振動形に等しいと仮定することによって、比較的簡単に１次の固有円振動数を計算することができる。この場合、静荷重によるたわみ曲線が基準関数に近似していることが必要であり、静荷重の取り方によって、固有円振動数は異なってくる。

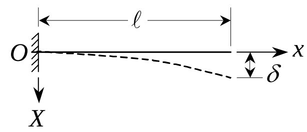
レイリーの方法は、連続体のみでなく、多質点系に対しても適用される。

【例】〝片持ばり〟へのレイリーの方法の適用　～変位関数の相違による影響について～

境界条件を満足する変位関数 $X(x)$ を変化させて、長さ ℓ の等断面片持ばり(単位体積質量 : w, 断面積 : A, 曲げ剛性 : EI)にレイリーの方法を適用した場合に得られる基本振動数の違いについて調べてみる。このとき、基本振動数の厳密解 ω は、次のように表される。

$$\omega=\left(\frac{1.87510406\,8711961\cdots}{\ell}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}=\frac{3.516015\cdots}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}\cong\frac{3.516}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}$$

(1)右図のように自由端でのたわみを δ とし、固定端での境界条件である変位とたわみ角が共に 0 である変位関数 $X(x)$ として、$X(x)=\delta\left(1-\cos\frac{\pi}{2\ell}x\right)$ を仮定すると、次のようになる。



$$\int_0^\ell\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx=\int_0^\ell\left\{\delta\left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2\cos\frac{\pi}{2\ell}x\right\}^2dx=\delta^2\left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^4\int_0^\ell\cos^2\frac{\pi}{2\ell}xdx=\delta^2\left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^4\frac{1}{2}\int_0^\ell\left(1+\cos\frac{\pi}{\ell}x\right)dx$$

$$=\frac{\pi^4}{32}\cdot\frac{\delta^2}{\ell^4}\cdot\left[x+\frac{\ell}{\pi}\sin\frac{\pi}{\ell}x\right]_0^\ell=\frac{\pi^4}{32}\cdot\frac{\delta^2}{\ell^4}\cdot\ell=\frac{\pi^4}{32}\cdot\frac{\delta^2}{\ell^3}$$

$$\int_0^\ell X^2(x)dx=\delta^2\int_0^\ell\left(1-\cos\frac{\pi}{2\ell}x\right)^2dx=\delta^2\int_0^\ell\left(1-2\cos\frac{\pi}{2\ell}x+\cos^2\frac{\pi}{2\ell}x\right)dx$$

$$=\delta^2\int_0^\ell\left\{1-2\cos\frac{\pi}{2\ell}x+\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{\ell}x\right)\right\}dx=\delta^2\cdot\left[\frac{3}{2}x-\frac{4\ell}{\pi}\sin\frac{\pi}{2\ell}x+\frac{\ell}{2\pi}\sin\frac{\pi}{\ell}x\right]_0^\ell$$

$$=\delta^2\cdot\left(\frac{3\ell}{2}-\frac{4\ell}{\pi}\right)=\delta^2\ell\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)$$

したがって、これらを式(4)に代入して、基本振動数 ω_1 を求めると、次のようになる。

$$\omega_1^2=\frac{\int_0^\ell EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx}{\int_0^\ell wAX^2(x)dx}=\frac{EI\cdot\frac{\pi^4}{32}\cdot\frac{\delta^2}{\ell^3}}{wA\cdot\delta^2\ell\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)}=\frac{\pi^4}{32\ell^4}\cdot\frac{2\pi}{3\pi-8}\cdot\frac{EI}{wA}=\frac{\frac{\pi^5}{16(3\pi-8)}}{\ell^4}\cdot\frac{EI}{wA}=\frac{13.42400769\cdots}{\ell^4}\cdot\frac{EI}{wA}$$

$$\therefore\omega_1=\frac{\sqrt{13.42400769\cdots}}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}=\frac{3.663878776\cdots}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}\cong\frac{3.664}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}\cong1.0421\cdot\omega$$ （誤差 約 4.2%）

ところで、ここで用いた変位関数 $X(x)$ は、自由端での境界条件の 1 つであるせん断力が 0、すなわち、$x=\ell$ で $d^3X/dx^3=0$ を満足していないことに注意されたい。$\left[\because\left.\frac{d^3X}{dx^3}\right|_{x=\ell}=-\delta\cdot\left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^3\cdot\left.\sin\frac{\pi}{2\ell}x\right|_{x=\ell}=-\delta\cdot\left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^3\neq0\right]$

(2)境界条件をすべて満足することが可能な変位関数 $X(x)$ は、最低 4 次の多項式である必要があるので、$X(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4$ とおき、境界条件をすべて満足するように係数 $C_0\sim C_5$ をまず決定し、これを変位関数とすることを考える。なお、x は(1)の図と同様に固定端を原点とするものである。
境界条件としては、次の 4 条件である。

①$x=0$ で変位 $X(0)=0$ より、$C_0=0$　　②$x=0$ でたわみ角 $dX/dx=0$ より、$C_1=0$

③$x=\ell$ でせん断力 $d^3X/dx^3=0$ より、$6C_3+24\ell C_4=0$　　$\therefore C_3=-4\ell C_4$

④$x=\ell$ で曲げモーメント $d^2X/dx^2=0$ より、$2C_2+6\ell C_3+12\ell^2C_4=0$

これに③を代入すると、$2C_2-24\ell^2C_4+12\ell^2C_4=0$　　$\therefore C_2=6\ell^2C_4$

これらより、変位関数 $X(x)$ は次のようになる。

$$X(x)=6\ell^2C_4x^2-4\ell C_4x^3+C_4x^4=3\ell^4C_4\left\{2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-\frac{4}{3}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{\ell}\right)^4\right\}=\delta\left\{2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-\frac{4}{3}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{\ell}\right)^4\right\}$$

これを用いて、(1)と同様に計算すると、次のようになる。

$$\frac{d^2X}{dx^2}=\delta\cdot\left\{\frac{4}{\ell^2}-\frac{8}{\ell^2}\left(\frac{x}{\ell}\right)+\frac{4}{\ell^2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}=\frac{4\delta}{\ell^2}\cdot\left\{1-2\left(\frac{x}{\ell}\right)+\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}=\frac{4\delta}{\ell^2}\cdot\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^2 \text{だから、}$$

$$\int_0^\ell\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx=\frac{16\delta^2}{\ell^4}\int_0^\ell\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^4dx=\frac{16\delta^2}{\ell^4}\left[-\frac{\ell}{5}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^5\right]_0^\ell=\frac{16\delta^2}{\ell^4}\cdot\frac{\ell}{5}=\frac{16}{5}\cdot\frac{\delta^2}{\ell^3}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\ell X^2(x)dx&=\delta^2\int_0^\ell\left\{2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-\frac{4}{3}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{\ell}\right)^4\right\}^2dx\\&=\delta^2\int_0^\ell\left\{4\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-\frac{16}{3}\left(\frac{x}{\ell}\right)^5+\frac{28}{9}\left(\frac{x}{\ell}\right)^6-\frac{8}{9}\left(\frac{x}{\ell}\right)^7+\frac{1}{9}\left(\frac{x}{\ell}\right)^8\right\}dx\\&=\frac{\delta^2}{9}\int_0^\ell\left\{36\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-48\left(\frac{x}{\ell}\right)^5+28\left(\frac{x}{\ell}\right)^6-8\left(\frac{x}{\ell}\right)^7+\left(\frac{x}{\ell}\right)^8\right\}dx\\&=\frac{\delta^2\ell}{9}\cdot\left[\frac{36}{5}\left(\frac{x}{\ell}\right)^5-\frac{48}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)^6+\frac{28}{7}\left(\frac{x}{\ell}\right)^7-\frac{8}{8}\left(\frac{x}{\ell}\right)^8+\frac{1}{9}\left(\frac{x}{\ell}\right)^9\right]_0^\ell\\&=\frac{\delta^2\ell}{9}\cdot\left(\frac{36}{5}-8+4-1+\frac{1}{9}\right)=\frac{\delta^2\ell}{9}\cdot\frac{324-225+5}{45}=\frac{\delta^2\ell}{9}\cdot\frac{104}{45}=\frac{104}{405}\delta^2\ell\end{aligned}$$

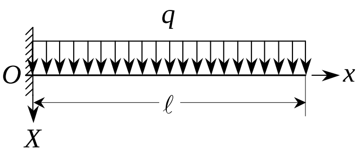
したがって、これらを式(4)に代入して、基本振動数ω_2を求めると、次のようになる。

$$\omega_2^2=\frac{\int_0^\ell EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx}{\int_0^\ell wAX^2(x)dx}=\frac{EI}{wA}\cdot\frac{\frac{16}{5}\cdot\frac{\delta^2}{\ell^3}}{\frac{104}{405}\delta^2\ell}=\frac{\frac{16}{5}\cdot\frac{405}{104}}{\ell^4}\cdot\frac{EI}{wA}=\frac{\frac{162}{13}}{\ell^4}\cdot\frac{EI}{wA}=\frac{12.46153846\cdots}{\ell^4}\cdot\frac{EI}{wA}$$

$$\therefore\ \omega_2=\frac{\sqrt{12.46153846\cdots}}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}=\frac{3.530090433\cdots}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}\cong\frac{3.530}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}\cong 1.0040\cdot\omega\quad\text{（誤差 約 0.4\%）}$$

(3) 右図に示すように、変位関数$X(x)$として、**等分布荷重 q が静的に載荷されるときのたわみ曲線**を用いるとすると、構造力学の公式より、

$$X(x)=\frac{q\ell^4}{24EI}\left\{6\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\left(\frac{x}{\ell}\right)^4\right\}$$



と表される。ところで、これを変形すると、

$$X(x)=\frac{q\ell^4}{72EI}\left\{2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-\frac{4}{3}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{\ell}\right)^4\right\}$$

となり、これは(2)で用いた変位関数に他ならない。したがって、基本振動数ω_3は、(2)と同様に次のようになる。

$$\omega_3=\frac{\sqrt{12.46153846\cdots}}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}=\frac{3.530090433\cdots}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}\cong\frac{3.530}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}\cong 1.0040\cdot\omega\quad\text{（誤差 約 0.4\%）}$$

(4) 右図に示すように、変位関数$X(x)$として、**片持ばりの自由端に集中荷重 P が載荷されるときのたわみ曲線を用いる**とすると、構造力学の公式より、

$$X(x)=\frac{P\ell^3}{6EI}\left\{3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-\left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right\}$$

と表される。これを用いて、(2)と同様に計算すると、次のようになる。

$$\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{P\ell^3}{6EI}\cdot\left\{\frac{6}{\ell^2}-\frac{6}{\ell^2}\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}=\frac{P\ell}{EI}\cdot\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\text{だから、}$$

$$\int_0^\ell\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx=\left(\frac{P\ell}{EI}\right)^2\cdot\int_0^\ell\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^2dx=\left(\frac{P\ell}{EI}\right)^2\cdot\left[-\frac{\ell}{3}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^3\right]_0^\ell=\left(\frac{P\ell}{EI}\right)^2\cdot\frac{\ell}{3}$$

$$\int_0^\ell X^2(x)dx=\left(\frac{P\ell^3}{6EI}\right)^2\cdot\int_0^\ell\left\{3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-\left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right\}^2dx=\left(\frac{P\ell^3}{6EI}\right)^2\cdot\int_0^\ell\left\{9\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-6\left(\frac{x}{\ell}\right)^5+\left(\frac{x}{\ell}\right)^6\right\}dx$$

$$=\left(\frac{P\ell^3}{6EI}\right)^2\cdot\left[\frac{9\ell}{5}\left(\frac{x}{\ell}\right)^5-\frac{6\ell}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)^6+\frac{\ell}{7}\left(\frac{x}{\ell}\right)^7\right]_0^\ell=\left(\frac{P\ell^3}{6EI}\right)^2\cdot\ell\cdot\left(\frac{9}{5}-1+\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{P\ell^3}{6EI}\right)^2\cdot\frac{33\ell}{35}$$

したがって、これらを式(4)に代入して、基本振動数ω_4を求めると、次のようになる。

$$\omega_4^2=\frac{\int_0^\ell EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx}{\int_0^\ell wAX^2(x)dx}=\frac{EI}{wA}\cdot\frac{\left(\frac{P\ell}{EI}\right)^2\cdot\frac{\ell}{3}}{\left(\frac{P\ell^3}{6EI}\right)^2\cdot\frac{33\ell}{35}}=\frac{\frac{36}{3}\cdot\frac{35}{33}}{\ell^4}\cdot\frac{EI}{wA}=\frac{\frac{140}{11}}{\ell^4}\cdot\frac{EI}{wA}=\frac{12.72727272\cdots}{\ell^4}\cdot\frac{EI}{wA}$$

$$\therefore\omega_4=\frac{\sqrt{12.72727272\cdots}}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}=\frac{3.56753034\cdots}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}\cong\frac{3.568}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}\cong1.0147\cdot\omega$$ （誤差　約 1.5%）

以上より、静的な等分布荷重載荷のたわみ曲線を変位関数として用いる場合が一番誤差が小さいことがわかる。

２．リッツの方法(Ritz's method)

この方法は、リッツ(Ritz)がレイリーの方法を拡張したもので、レイリーの方法が原則として 1 次振動（基本振動数）に適用するのに対し、リッツの方法は高次振動にも適用できる。

リッツの方法では、振動の形を表す変位関数は数個のパラメータを含み、そのパラメータの大きさは、振動数を最小にするように選ばれる。

いま、境界条件を満足する変位関数を$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_N(x)$とし、その重ね合せる割合をa_1，a_2，…，a_Nとすれば、変位は次の式で表される。

$$\begin{cases}y=X\cos\omega t\\X=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots+a_N\varphi_N(x)\end{cases}\qquad\cdots\cdots\cdots(5)$$

はりの曲げ振動を例にとれば、固有円振動数は(4)式で表されるが、この場合、ω^2の右辺はa_1，a_2，…，a_Nの関数であるから、ω^2が最小になるためには、この式(4)をa_1，a_2，…，a_Nで微分して 0 に等置した式

$$\int_0^\ell wAX^2dx\cdot\left[\frac{\partial}{\partial a_i}\int_0^\ell EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)dx\right]-\int_0^\ell EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)dx\cdot\left[\frac{\partial}{\partial a_i}\int_0^\ell wAX^2dx\right]=0\qquad\cdots\cdots\cdots(6)$$

が得られるが、次の関係

$$\int_0^\ell EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx=\omega^2\int_0^\ell wAX^2dx$$

を用いると、式(6)は次のように変形される。

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial a_i}\int_0^\ell\left\{EI\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2-\omega^2\cdot wAX^2\right\}dx=0\quad(i=1,2,\cdots,N)}\qquad\cdots\cdots\cdots(7)$$

また、式(7)は次のようにも書き表すこともできる。

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\{V_{\max}-K_{\max}\}=0\quad(i=1,2,\cdots,N)\qquad\cdots\cdots\cdots(8)$$

式(7)または式(8)はa_iに関する同次方程式であるから、この係数の行列式を 0 に等置することによって、振動数方程式が得られ、それより固有振動数が N 個得られるが、高次振動数には誤差が多い。一般に低次の振動数の計算に用いられるが、項数 N を多くとる程精度は良くなる。固有円振動数を式(7)に代入すると、係数a_1，a_2，…，a_Nの比が求められるので、振動形も得られる。レイリーの方法、リッツの方法を総称してエネルギー法(energy method)またはレイリー・リッツの方法(Rayleigh-Ritz's method)と呼ぶ。

なお、式(7)の被積分関数は$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_N(x)$の級数であるから、いきなり積分するよりもa_iで微分した後で積分する方が手間がかからない。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\int_0^\ell\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)^2dx=\int_0^\ell 2\frac{d^2X}{dx^2}\cdot\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)dx=2\int_0^\ell\{\,a_1\varphi_1''(x)+a_2\varphi_2''(x)+\cdots\,\}\cdot\varphi_i''(x)dx$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\int_0^\ell X^2dx=\int_0^\ell 2X\cdot\frac{\partial}{\partial a_i}Xdx=2\int_0^\ell\{\,a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots\,\}\cdot\varphi_i(x)dx$$

ここに、
$$\begin{cases}\varphi_i(x)=\dfrac{\partial}{\partial a_i}X=\dfrac{\partial}{\partial a_i}\{\,a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots\,\}\\[2ex]\varphi_i''(x)=\dfrac{\partial}{\partial a_i}\left(\dfrac{d^2X}{dx^2}\right)=\dfrac{\partial}{\partial a_i}\{\,a_1\varphi_1''(x)+a_2\varphi_2''(x)+\cdots\,\}\quad(i=1,2,\cdots N)\end{cases}$$

したがって、式(7)は次のようになる。

$$\boxed{\begin{aligned}&a_1\left\{\int_0^\ell EI\varphi_1''(x)\varphi_i''(x)dx-\omega^2\int_0^\ell wA\varphi_1(x)\varphi_i(x)dx\right\}\\&+a_2\left\{\int_0^\ell EI\varphi_2''(x)\varphi_i''(x)dx-\omega^2\int_0^\ell wA\varphi_2(x)\varphi_i(x)dx\right\}+\cdots=0\quad(i=1,2,\cdots,N)\end{aligned}}\quad\cdots\cdots\cdots(9)$$

【例】〝片持ばり〟へのリッツの方法の適用（片持ばりの条件は、レイリーの方法の場合と同じ）

変位関数を仮定するに当たり、計算を簡略化するために $\xi=\dfrac{x}{\ell}$，$\mu^2=\dfrac{\omega^2wA\ell^4}{EI}$ とおいて、

式(7)を無次元化すると、$\dfrac{\partial}{\partial a_i}\displaystyle\int_0^1\left\{\left(\frac{d^2X(\xi)}{dx^2}\right)^2-\mu^2X^2(\xi)\right\}d\xi=0\quad(i=1,2,\cdots,N)$ のように表される。

このとき、境界条件は次のようになる。

$\xi=0$ において、$X(0)=0$，$\left.\dfrac{dX(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=0}=0$　　　$\xi=1$ において、$\left.\dfrac{d^2X(\xi)}{d\xi^2}\right|_{\xi=1}=0$，$\left.\dfrac{d^3X(\xi)}{d\xi^3}\right|_{\xi=1}=0$

これらの境界条件を満足するような変位関数 $X(\xi)$ を次のように仮定する。

$$X(\xi)=a_1\varphi_1(\xi)+a_2\varphi_2(\xi),\quad\varphi_1(\xi)=2\xi^2-\frac{4}{3}\xi^3+\frac{1}{3}\xi^4,\quad\varphi_2(\xi)=4\xi^2-2\xi^3+\frac{1}{5}\xi^5$$

これらを式(9)に代入すると、次のようになる。

i=1 については、

$$\int_0^1\varphi_1''(\xi)\varphi_1''(\xi)d\xi=\int_0^1(4-8\xi+4\xi^2)^2d\xi=16\int_0^1(1-\xi)^4d\xi=-\frac{16}{5}\cdot\left[(1-\xi)^5\right]_0^1=\frac{16}{5}$$

$$\int_0^1\varphi_1(\xi)\varphi_1(\xi)d\xi=\int_0^1\left(2\xi^2-\frac{4}{3}\xi^3+\frac{1}{3}\xi^4\right)^2d\xi=\int_0^1\left(4\xi^4-\frac{16}{3}\xi^5+\frac{28}{9}\xi^6-\frac{8}{9}\xi^7+\frac{1}{9}\xi^8\right)d\xi$$

$$=\frac{4}{5}-\frac{8}{9}+\frac{4}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{81}=\frac{4}{5}-\frac{5}{9}+\frac{1}{81}=\frac{324-225+5}{405}=\frac{104}{405}$$

$$\int_0^1\varphi_2''(\xi)\varphi_1''(\xi)d\xi=\int_0^1(8-12\xi+4\xi^3)\cdot(4-8\xi+4\xi^2)d\xi=16\int_0^1(2-3\xi+\xi^3)\cdot(1-2\xi+\xi^2)d\xi$$

$$=16\int_0^1(2-7\xi+8\xi^2-2\xi^3-2\xi^4+\xi^5)d\xi=16\cdot\left(2-\frac{7}{2}+\frac{8}{3}-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right)$$

$$=16\cdot\frac{60-105+80-15-12+5}{30}=16\cdot\frac{145-132}{30}=\frac{8\cdot13}{15}=\frac{104}{15}$$

$$\int_0^1\varphi_2(\xi)\varphi_1(\xi)d\xi=\int_0^1\left(4\xi^2-2\xi^3+\frac{1}{5}\xi^5\right)\left(2\xi^2-\frac{4}{3}\xi^3+\frac{1}{3}\xi^4\right)d\xi=\int_0^1\left(8\xi^4-\frac{28}{3}\xi^5+4\xi^6-\frac{4}{15}\xi^7-\frac{4}{15}\xi^8+\frac{1}{15}\xi^9\right)d\xi$$

$$=\frac{8}{5}-\frac{14}{9}+\frac{4}{7}-\frac{1}{30}-\frac{4}{135}+\frac{1}{150}=\frac{15120-14700+5400-315-280+63}{9450}=\frac{5288}{9450}=\frac{2644}{4725}$$

i=2 については、

$$\int_0^1 \varphi_1''(\xi)\varphi_2''(\xi)d\xi = \int_0^1 \varphi_2''(\xi)\varphi_1''(\xi)d\xi = \frac{104}{15}$$

$$\int_0^1 \varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi)d\xi = \int_0^1 \varphi_2(\xi)\varphi_1(\xi)d\xi = \frac{2644}{4725}$$

$$\int_0^1 \varphi_2''(\xi)\varphi_2''(\xi)d\xi = \int_0^1 \left(8-12\xi+4\xi^3\right)^2 d\xi = 16\int_0^1 \left(2-3\xi+\xi^3\right)^2 d\xi = 16\int_0^1 \left(4-12\xi+9\xi^2+4\xi^3-6\xi^4+\xi^6\right)d\xi$$

$$= 16\cdot\left(4-\frac{12}{2}+\frac{9}{3}+\frac{4}{4}-\frac{6}{5}+\frac{1}{7}\right) = 16\cdot\left(4-6+3+1-\frac{6}{5}+\frac{1}{7}\right)$$

$$= 16\cdot\left(2-\frac{6}{5}+\frac{1}{7}\right) = 16\cdot\frac{70-42+5}{35} = \frac{16\cdot 33}{35} = \frac{528}{35}$$

$$\int_0^1 \varphi_2(\xi)\varphi_2(\xi)d\xi = \int_0^1 \left(4\xi^2-2\xi^3+\frac{1}{5}\xi^5\right)^2 d\xi = \int_0^1 \left(16\xi^4-16\xi^5+4\xi^6+\frac{8}{5}\xi^7-\frac{4}{5}\xi^8+\frac{1}{25}\xi^{10}\right)d\xi$$

$$= \frac{16}{5}-\frac{16}{6}+\frac{4}{7}+\frac{8}{40}-\frac{4}{45}+\frac{1}{275} = \frac{55440-46200+9900+3465-1540+63}{17325} = \frac{21128}{17325}$$

これらより、a_1，a_2 に関する同次連立１次方程式が次のように得られる。

$$\begin{cases} a_1\left(\dfrac{16}{5}-\dfrac{104}{405}\mu^2\right)+a_2\left(\dfrac{104}{15}-\dfrac{2644}{4725}\mu^2\right)=0 \\ a_1\left(\dfrac{104}{15}-\dfrac{2644}{4725}\mu^2\right)+a_2\left(\dfrac{528}{35}-\dfrac{21128}{17325}\mu^2\right)=0 \end{cases}$$

この連立方程式が有義解を持つためには、係数行列式が 0 である必要があり、振動数方程式として次式が得られる。

$$\left(\frac{16}{5}-\frac{104}{405}\mu^2\right)\cdot\left(\frac{528}{35}-\frac{21128}{17325}\mu^2\right)-\left(\frac{104}{15}-\frac{2644}{4725}\mu^2\right)^2=0$$

$$\therefore \frac{2608}{81860625}\mu^4-\frac{2624}{155925}\mu^2+\frac{64}{315}=0 \qquad \therefore \mu^4-\frac{86100}{163}\mu^2+\frac{1039500}{163}=0$$

これを解くと、次のようになる。

$$\mu^2 = \frac{43050}{163}\pm\frac{120\sqrt{116935}}{163} = 264.1104294\cdots\pm 251.7479262\cdots = \begin{cases} 12.36250325\cdots \\ 515.8583556\cdots \end{cases}$$

したがって、$\mu = \begin{cases} 3.516035161\cdots \\ 22.7125154\cdots \end{cases}$

この解から、固有円振動数 ω_1，ω_2 は次のように求まる。なお、厳密解を ω_{1t}，ω_{2t} として同時に示しておく。

１次固有円振動数：$\omega_1 = \dfrac{3.516035161\cdots}{\ell^2}\cdot\sqrt{\dfrac{EI}{wA}} = 1.000005657\cdots\omega_{1t} \cong 1.0000\cdot\omega_{1t}$　（誤差はほぼ 0）

$$\omega_{1t} = \frac{\left(1.875104068711961\cdots\right)^2}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}} = \frac{3.51601527\cdots}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}$$

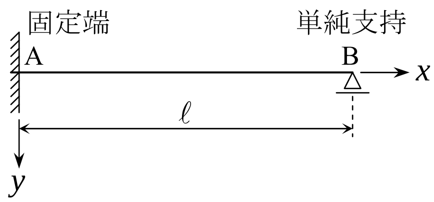
２次固有円振動数：$\omega_2 = \dfrac{22.7125154\cdots}{\ell^2}\cdot\sqrt{\dfrac{EI}{wA}} = 1.030771022\cdots\omega_{2t} \cong 1.0308\cdot\omega_{2t}$　（誤差は約 3.1%）

$$\omega_{2t} = \frac{\left(4.694091132974174\cdots\right)^2}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}} = \frac{22.03449157\cdots}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}$$

以上より、計算は複雑になるが、精度は非常に良いことが分かる。この場合、精度は変位関数 $X(x)$ すなわち $\varphi_i(x)$　$\left(i=1,2,\cdots,N\right)$の仮定の仕方で変わるので、高い精度を必要とする場合は求めたい固有円振動数の次数よりさらに１つ多い次数の数だけ級数和をとると良い。

【例題】一端固定・他端単純支持ばりの１次固有振動数を
〝レイリーの方法〟と〝リッツの方法〟によって近似的に求める。

右図に示すような一端固定・他端単純支持のはりの 1 次固有振動数ωを〝レイリーの方法〟(ω_L)と〝リッツの方法〟(ω_R)によって求め、厳密解$\omega_0=\dfrac{(3.9266023)^2}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EI}{wA}}$と比較せよ。



なお、このはりは一様断面で、その単位体積質量は w, 断面積は A, 曲げ剛性は EI, 長さはℓとする。
また、変位関数としては、

〝レイリーの方法〟では、$y(x)=x^2(x-\ell)$

〝リッツの方法〟では、$y(x)=a_1y_1(x)+a_2y_2(x)$　$\begin{cases} y_1(x)=x^2(x-\ell) \\ y_2(x)=x^2(x-\ell)(x-\ell/2) \end{cases}$

を仮定するものとする。

【解答】

● 〝レイリーの方法〟

変位関数は、$y(x)=x^2(x-\ell)=x^3-\ell x^2$だから、事前に必要なものを計算しておくと次のようになる。

$$y'(x)=3x^2-2\ell x,\quad y''(x)=6x-2\ell=2(3x-\ell),$$
$$y^2(x)=x^4(x-\ell)^2=x^6-2\ell x^5+\ell^2x^4,\quad y''^2(x)=4(3x-\ell)^2=4\left(9x^2-6\ell x+\ell^2\right)$$

運動エネルギーの最大値 $K_{\max}=\dfrac{1}{2}\omega^2\int_0^\ell wA\cdot y^2(x)dx$ は、次のようになる。

$$K_{\max}=\frac{wA}{2}\omega^2\int_0^\ell\left(x^6-2\ell x^5+\ell^2x^4\right)dx=\frac{wA}{2}\omega^2\left[\frac{x^7}{7}-\frac{\ell x^6}{3}+\frac{\ell^2x^5}{5}\right]_0^\ell$$
$$=\frac{wA\ell^7}{2}\omega^2\cdot\frac{15-35+21}{105}=\frac{wA\ell^7}{2}\omega^2\cdot\frac{1}{105}$$

ひずみエネルギーの最大値 $V_{\max}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\ell\frac{M^2}{EI}dx=\frac{1}{2}\int_0^\ell EI\cdot\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx$ は、次のようになる。

$$V_{\max}=\frac{EI}{2}\int_0^\ell 4\left(9x^2-6\ell x+\ell^2\right)dx=\frac{EI}{2}\cdot4\left[3x^3-3\ell x^2+\ell^2x\right]_0^\ell=2EI\ell^3(3-3+1)=2EI\ell^3$$

したがって、1 次固有振動数ω_Lは次のようなる。

$$\omega_L^2=\frac{2EI\ell^3}{\dfrac{wA\ell^7}{2}\cdot\dfrac{1}{105}}=\frac{420}{\ell^4}\cdot\frac{EI}{wA}\qquad\therefore\boxed{\omega_L=\frac{2\sqrt{105}}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}}$$

厳密解ω_0と比較すると、$\boxed{\dfrac{\omega_L}{\omega_0}=\dfrac{2\sqrt{105}}{(3.9266023)^2}=1.3292\cdots\cong1.33}$　　∴ 誤差 ＝ 約 33%

● 〝リッツの方法〟

変位関数は、$y(x)=a_1y_1(x)+a_2y_2(x)$　$\begin{cases} y_1(x)=x^2(x-\ell) \\ y_2(x)=x^2(x-\ell)(x-\ell/2) \end{cases}$ だから、事前に必要なものを計算しておくと次のようになる。

$$y_1'(x)=3x^2-2\ell x,\quad y_1''(x)=6x-2\ell=2(3x-\ell),$$

$$y_1(x)\cdot y_1(x)=x^4(x-\ell)^2=x^6-2\ell x^5+\ell^2x^4,\quad y_1''(x)\cdot y_1''(x)=4(3x-\ell)^2=4\left(9x^2-6\ell x+\ell^2\right)$$

$$y_2(x)=x^2(x-\ell)\left(x-\frac{\ell}{2}\right)=x^4-\frac{3}{2}\ell x^3+\frac{\ell^2}{2}x^2,$$

$$y_2'(x)=4x^3-\frac{9}{2}\ell x^2+\ell^2x,\quad y_2''(x)=12x^2-9\ell x+\ell^2$$

$$y_2(x)\cdot y_2(x)=\left(x^4-\frac{3}{2}\ell x^3+\frac{\ell^2}{2}x^2\right)^2=x^8-2x^4\left(\frac{3}{2}\ell x^3-\frac{\ell^2}{2}x^2\right)+\left(\frac{3}{2}\ell x^3-\frac{\ell^2}{2}x^2\right)^2$$

$$=x^8-3\ell x^7+\ell^2x^6+\frac{9}{4}\ell^2x^6-\frac{3}{2}\ell^3x^5+\frac{\ell^4}{4}x^4=x^8-3\ell x^7+\frac{13}{4}\ell^2x^6-\frac{3}{2}\ell^3x^5+\frac{\ell^4}{4}x^4$$

$$y_2''(x)\cdot y_2''(x)=\left(12x^2-9\ell x+\ell^2\right)^2=144x^4-24x^2\left(9\ell x-\ell^2\right)+\left(9\ell x-\ell^2\right)^2$$

$$=144x^4-216\ell x^3+24\ell^2x^2+81\ell^2x^2-18\ell^3x+\ell^4$$

$$=144x^4-216\ell x^3+105\ell^2x^2-18\ell^3x+\ell^4$$

$$y_1(x)\cdot y_2(x)=x^2(x-\ell)\cdot x^2(x-\ell)\left(x-\frac{\ell}{2}\right)=x^4\left(x^2-2\ell x+\ell^2\right)\left(x-\frac{\ell}{2}\right)$$

$$=x^4\left(x^3-2\ell x^2+\ell^2x-\frac{\ell}{2}x^2+\ell^2x-\frac{\ell^3}{2}\right)=x^4\left(x^3-\frac{5}{2}\ell x^2+2\ell^2x-\frac{\ell^3}{2}\right)$$

$$=x^7-\frac{5}{2}\ell x^6+2\ell^2x^5-\frac{\ell^3}{2}x^4$$

$$y_1''(x)\cdot y_2''(x)=2(3x-\ell)\cdot\left(12x^2-9\ell x+\ell^2\right)=2\left(36x^3-27\ell x^2+3\ell^2x-12\ell x^2+9\ell^2x-\ell^3\right)$$

$$=2\left(36x^3-39\ell x^2+12\ell^2x-\ell^3\right)$$

さらに、次の計算もしておく。

$i=1$については、

$$\int_0^\ell y_1''(x)\cdot y_1''(x)\,dx=4\ell^3,\qquad \int_0^\ell y_1(x)\cdot y_1(x)\,dx=\frac{1}{105}\ell^7$$

$$\int_0^\ell y_2''(x)\cdot y_1''(x)\,dx=\int_0^\ell 2\left(36x^3-39\ell x^2+12\ell^2x-\ell^3\right)dx=2\left[9x^4-13\ell x^3+6\ell x^2-\ell^3x\right]_0^\ell$$

$$=2\ell^4(9-13+6-1)=2\ell^4$$

$$\int_0^\ell y_2(x)\cdot y_1(x)\,dx=\int_0^\ell\left(x^7-\frac{5}{2}\ell x^6+2\ell^2x^5-\frac{\ell^3}{2}x^4\right)dx=\left[\frac{x^8}{8}-\frac{5}{14}\ell x^7+\frac{1}{3}\ell^2x^6-\frac{1}{10}\ell^3x^5\right]_0^\ell$$

$$=\frac{105-300+280-84}{840}\ell^8=\frac{1}{840}\ell^8$$

$i=2$については、

$$\int_0^\ell y_2''(x)\cdot y_2''(x)\,dx=\int_0^\ell\left(144x^4-216\ell x^3+105\ell^2x^2-18\ell^3x+\ell^4\right)dx$$

$$=\left[\frac{144}{5}x^5-\frac{216}{4}\ell x^4+\frac{105}{3}\ell^2x^3-\frac{18}{2}\ell^3x^2+\ell^4x\right]_0^\ell$$

$$=\ell^5\left(\frac{144}{5}-54+35-9+1\right)=\ell^5\left(\frac{144}{5}-27\right)=\frac{144-135}{5}\ell^5=\frac{9}{5}\ell^5$$

$$\int_0^\ell y_2(x)\cdot y_2(x)dx = \int_0^\ell \left(x^8 - 3\ell x^7 + \frac{13}{4}\ell^2 x^6 - \frac{3}{2}\ell^3 x^5 + \frac{\ell^4}{4}x^4\right)dx$$
$$= \left[\frac{x^9}{9} - \frac{3}{8}\ell x^8 + \frac{13}{28}\ell^2 x^7 - \frac{1}{4}\ell^3 x^6 + \frac{\ell^4}{20}x^5\right]_0^\ell$$
$$= \ell^9\left(\frac{1}{9} - \frac{3}{8} + \frac{13}{28} - \frac{1}{4} + \frac{1}{20}\right) = \frac{280 - 945 + 1170 - 630 + 126}{2520}\ell^9 = \frac{1}{2520}\ell^9$$

$$\int_0^\ell y_1''(x)\cdot y_2''(x)dx = 2\ell^4, \qquad \int_0^\ell y_1(x)\cdot y_2(x)dx = \frac{1}{840}\ell^8$$

〝リッツの方法〟では、a_1, a_2について、次のように表される。

$i=1$のとき、
$$a_1\left\{\int_0^\ell EI\cdot y_1''(x)\cdot y_1''(x)dx - \omega^2\int_0^\ell wA\cdot y_1(x)\cdot y_1(x)dx\right\}$$
$$+a_2\left\{\int_0^\ell EI\cdot y_2''(x)\cdot y_1''(x)dx - \omega^2\int_0^\ell wA\cdot y_2(x)\cdot y_1(x)dx\right\} = 0$$

$i=2$のとき、
$$a_1\left\{\int_0^\ell EI\cdot y_1''(x)\cdot y_2''(x)dx - \omega^2\int_0^\ell wA\cdot y_1(x)\cdot y_2(x)dx\right\}$$
$$+a_2\left\{\int_0^\ell EI\cdot y_2''(x)\cdot y_2''(x)dx - \omega^2\int_0^\ell wA\cdot y_2(x)\cdot y_2(x)dx\right\} = 0$$

これに、上記の計算結果を代入すると、次のようになる。

$$\begin{cases} a_1\left(EI\cdot 4\ell^3 - \omega^2\cdot wA\dfrac{\ell^7}{105}\right) + a_2\left(EI\cdot 2\ell^4 - \omega^2\cdot wA\dfrac{\ell^8}{840}\right) = 0 \\ a_1\left(EI\cdot 2\ell^4 - \omega^2\cdot wA\dfrac{\ell^8}{840}\right) + a_2\left(EI\cdot\dfrac{9}{5}\ell^5 - \omega^2\cdot wA\dfrac{\ell^9}{2520}\right) = 0 \end{cases}$$

これを変形すると、

$$\begin{cases} a_1\left(4 - \omega^2\cdot\dfrac{wA}{EI}\dfrac{\ell^4}{105}\right) + a_2\cdot\ell\left(2 - \omega^2\cdot\dfrac{wA}{EI}\dfrac{\ell^4}{840}\right) = 0 \\ a_1\left(2 - \omega^2\cdot\dfrac{wA}{EI}\dfrac{\ell^4}{840}\right) + a_2\cdot\ell\left(\dfrac{9}{5} - \omega^2\cdot\dfrac{wA}{EI}\dfrac{\ell^4}{2520}\right) = 0 \end{cases}$$

ここで、$\omega \Rightarrow \omega_R$と置き換えて、$\mu^2 = \omega_R^2\dfrac{wA}{EI}\ell^4$とおくと、

$$\begin{cases} a_1\left(4 - \dfrac{\mu^2}{105}\right) + a_2\cdot\ell\left(2 - \dfrac{\mu^2}{840}\right) = 0 \\ a_1\left(2 - \dfrac{\mu^2}{840}\right) + a_2\cdot\ell\left(\dfrac{9}{5} - \dfrac{\mu^2}{2520}\right) = 0 \end{cases}$$

となる。この式では、$a_2 \Rightarrow a_2\cdot\ell$となっているが、$a_2\cdot\ell \Rightarrow$ new a_2と考えてもよく、振動数方程式には影響を及ぼさない。*)

したがって、a_1, a_2に関する同次連立 1 次方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} a_1\left(4 - \dfrac{\mu^2}{105}\right) + a_2\left(2 - \dfrac{\mu^2}{840}\right) = 0 \\ a_1\left(2 - \dfrac{\mu^2}{840}\right) + a_2\left(\dfrac{9}{5} - \dfrac{\mu^2}{2520}\right) = 0 \end{cases}$$

この連立方程式が有義解を持つためには、係数行列式が 0 である必要があり、振動数方程式として次の

式が得られる。

$$\begin{vmatrix} 4-\dfrac{\mu^2}{105} & 2-\dfrac{\mu^2}{840} \\ 2-\dfrac{\mu^2}{840} & \dfrac{9}{5}-\dfrac{\mu^2}{2520} \end{vmatrix}=0 \qquad \therefore \left(4-\frac{\mu^2}{105}\right)\left(\frac{9}{5}-\frac{\mu^2}{2520}\right)-\left(2-\frac{\mu^2}{840}\right)^2=0$$

$$\therefore \frac{36}{5}-\frac{59}{3150}\mu^2+\frac{\mu^4}{264600}-4+\frac{\mu^2}{210}-\frac{\mu^4}{705600}=0$$

$$\therefore \frac{16}{5}-\frac{22}{1575}\mu^2+\frac{\mu^4}{423360}=0 \qquad \therefore \mu^4-\frac{29568}{5}\mu^2+1354752=0$$

これを解くと、次のようになる。

$$\mu^2=\frac{14784}{5}\pm\sqrt{\left(\frac{14784}{5}\right)^2-1354752}=\frac{14784}{5}\pm\frac{\sqrt{184697856}}{5}$$

$$=\begin{cases}238.7282128685416193934544720381 4\\5674.8717871314583806065455279619\end{cases}$$

$$\therefore \mu=\begin{cases}15.450832109260058210965407939669\\75.331744883093331814757354033067\end{cases}\cong\begin{cases}15.4508321\\75.3317449\end{cases}$$

したがって、$\mu^2=\omega_R^2\dfrac{wA}{EI}\ell^4$ より、$\omega_R=\dfrac{\mu}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EI}{wA}}$ と表されるから、1 次固有振動数 ω_R は次のようなる。

$$\boxed{\omega_R=\frac{15.4508321}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{wA}}}$$

厳密解 ω_0 と比較すると、$\boxed{\dfrac{\omega_R}{\omega_0}=\dfrac{15.4508321\cdots}{(3.9266023)^2}=1.00211\cdots\cong 1.002}$　　$\therefore$ 誤差 ＝ 約 0.2%

なお、2 次の固有振動数についても、2 次の厳密解 $\omega_0=\dfrac{(7.068582746)^2}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EI}{wA}}$ と比較すると、

$$\frac{\omega_R}{\omega_0}=\frac{75.3317449\cdots}{(7.068582746)^2}=1.5076944\cdots\cong 1.507 \qquad \therefore \text{ 誤差 ＝ 約 51\%}$$

*) 振動数方程式には影響を及ぼさない。

a_1，a_2 に関する同次連立 1 次方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} a_1\left(4-\dfrac{\mu^2}{105}\right)+a_2\cdot\ell\left(2-\dfrac{\mu^2}{840}\right)=0 \\ a_1\left(2-\dfrac{\mu^2}{840}\right)+a_2\cdot\ell\left(\dfrac{9}{5}-\dfrac{\mu^2}{2520}\right)=0 \end{cases}$$

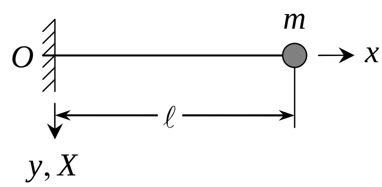
この連立方程式が有義解を持つためには、係数行列式が 0 である必要があり、振動数方程式として次の式が得られる。

$$\begin{vmatrix} 4-\dfrac{\mu^2}{105} & \left(2-\dfrac{\mu^2}{840}\right)\cdot\ell \\ 2-\dfrac{\mu^2}{840} & \left(\dfrac{9}{5}-\dfrac{\mu^2}{2520}\right)\cdot\ell \end{vmatrix}=0 \quad \therefore \left(4-\frac{\mu^2}{105}\right)\left(\frac{9}{5}-\frac{\mu^2}{2520}\right)\cdot\ell-\left(2-\frac{\mu^2}{840}\right)^2\cdot\ell=0$$

$\ell\neq 0$ だから、$\left(4-\dfrac{\mu^2}{105}\right)\left(\dfrac{9}{5}-\dfrac{\mu^2}{2520}\right)-\left(2-\dfrac{\mu^2}{840}\right)^2=0$

【例】自由端に集中質量をもつ片持ばりの曲げ振動の振動数方程式

右図のように、はりの曲げ剛性 EI, 単位体積質量 w, 断面積 A が一定で、長さ ℓ の片持ばりの自由端に集中質量 m をもつはりの曲げ振動の振動数方程式を求める。



このとき、はりの曲げ振動による変位の一般解は、〝変数分離〟の形で次のように表される。

$$y(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$
$$= \{\ C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x + C_3 \cosh\lambda x + C_4 \sinh\lambda x\ \}\cdot\{\ A\cos\omega t + B\sin\omega t\ \}$$

ここで、固定端でたわみとたわみ角が 0, 自由端で曲げモーメントが 0 であり、かつ、自由端では集中質量による慣性力と復元力（せん断力）が釣合っている（**ダランベールの原理**）から、境界条件は次のようになる。

$$\begin{cases} x = 0: \quad X = 0, \quad \dfrac{dX}{dx} = 0 \\ x = \ell: \quad \dfrac{d^2X}{dx^2} = 0, \quad -EI\dfrac{d^3X}{dx^3} = -\left(m\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \end{cases}$$

また、

$$\frac{dX}{dx} = -\lambda C_1 \sin\lambda x + \lambda C_2 \cos\lambda x + \lambda C_3 \sinh\lambda x + \lambda C_4 \cosh\lambda x$$
$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2 C_1 \cos\lambda x - \lambda^2 C_2 \sin\lambda x + \lambda^2 C_3 \cosh\lambda x + \lambda^2 C_4 \sinh\lambda x$$
$$\frac{d^3X}{dx^3} = \lambda^3 C_1 \sin\lambda x - \lambda^3 C_2 \cos\lambda x + \lambda^3 C_3 \sinh\lambda x + \lambda^3 C_4 \cosh\lambda x$$

であるから、

$x = 0$ のとき、$X = 0$ だから、　$C_1 + C_3 = 0$　………①

$x = 0$ のとき、$\dfrac{dX}{dx} = 0$ だから、　$C_2 + C_4 = 0$　………②

$x = \ell$ のとき、$\dfrac{d^2X}{dx^2} = 0$ だから、$-C_1\cos\lambda\ell - C_2\sin\lambda\ell + C_3\cosh\lambda\ell + C_4\sinh\lambda\ell = 0$　………③

$x = \ell$ のとき、$-EI\dfrac{d^3X}{dx^3} = -\left(m\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = -\left(-m\omega^2 X\right)$ だから、

$$-EI\lambda^3\{C_1\sin\lambda\ell - C_2\cos\lambda\ell + C_3\sinh\lambda\ell + C_4\cosh\lambda\ell\}$$
$$= m\omega^2\{C_1\cos\lambda\ell + C_2\sin\lambda\ell + C_3\cosh\lambda\ell + C_4\sinh\lambda\ell\} \quad \cdots\cdots\cdots④$$

方針：式①～④の連立方程式から、C_2, C_3, C_4 を消去する方法で振動数方程式を求める。

式①, ②より、$C_3 = -C_1$, $C_4 = -C_2$ だから、これを式③に代入して整理すると、

$$(\cos\lambda\ell + \cosh\lambda\ell)C_1 + (\sin\lambda\ell + \sinh\lambda\ell)C_2 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots③'$$

式①, ②より、$C_3 = -C_1$, $C_4 = -C_2$ だから、これを式④に代入して整理すると、

$$-EI\lambda^3\{C_1\sin\lambda\ell - C_2\cos\lambda\ell - C_1\sinh\lambda\ell - C_2\cosh\lambda\ell\}$$
$$= m\omega^2\{C_1\cos\lambda\ell + C_2\sin\lambda\ell - C_1\cosh\lambda\ell - C_2\sinh\lambda\ell\}$$
$$EI\lambda^3\{C_1(\sin\lambda\ell - \sinh\lambda\ell) - C_2(\cos\lambda\ell + \cosh\lambda\ell)\}$$
$$= -m\omega^2\{C_1(\cos\lambda\ell - \cosh\lambda\ell) + C_2(\sin\lambda\ell - \sinh\lambda\ell)\}$$
$$\therefore \begin{aligned} &\{EI\lambda^3(\sin\lambda\ell - \sinh\lambda\ell) + m\omega^2(\cos\lambda\ell - \cosh\lambda\ell)\}C_1 \\ &-\{EI\lambda^3(\cos\lambda\ell + \cosh\lambda\ell) - m\omega^2(\sin\lambda\ell - \sinh\lambda\ell)\}C_2 = 0 \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots④'$$

次に、③'$\times\left\{EI\lambda^3\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)-m\omega^2\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)\right\}$＋④'×$(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell)$を計算すると、

$$\left[\begin{array}{l}\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)\left\{EI\lambda^3\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)-m\omega^2\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)\right\}\\+\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)\left\{EI\lambda^3\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)+m\omega^2\left(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)\right\}\end{array}\right]C_1=0$$

ここで、$C_1\neq0$だから、

$$\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)\left\{EI\lambda^3\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)-m\omega^2\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)\right\}$$
$$+\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)\left\{EI\lambda^3\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)+m\omega^2\left(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)\right\}=0$$

これを変形すると、

$$EI\lambda^3\left\{\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)^2+\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)\right\}$$
$$-m\omega^2\left\{\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)-\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)\left(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)\right\}=0$$

$$EI\lambda^3\left\{\cos^2\lambda\ell+2\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell+\cosh^2\lambda\ell+\sin^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell\right\}$$
$$-m\omega^2\left\{\begin{array}{l}\cos\lambda\ell\sin\lambda\ell-\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell+\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\cosh\lambda\ell\\-\sin\lambda\ell\cos\lambda\ell+\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell-\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\cosh\lambda\ell\end{array}\right\}=0$$

ここで、$\sin^2\lambda\ell+\cos^2\lambda\ell=1$，　$\cosh^2\lambda\ell-\sinh^2\lambda\ell=1$だから、

$$EI\lambda^3\left\{2+2\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right\}-m\omega^2\left\{-2\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell+2\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right\}=0$$

よって、このはりの曲げ振動の振動数方程式は、次のように表される。

$$\boxed{EI\lambda^3\left(1+\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)+m\omega^2\left(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)=0}$$

ここで、$\dfrac{\omega^2}{v^2}=\lambda^4$より$\omega^2=\lambda^4v^2$、また、$v^2=\dfrac{EI}{wA}$だから、$\omega^2=\lambda^4\dfrac{EI}{wA}$

さらに、集中質量mを〝はりの質量$wA\ell$〟のk倍、即ち、$m=k\times wA\ell$で表すと、

$$EI\lambda^3\left(1+\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)+k\times wA\ell\cdot\lambda^4\frac{EI}{wA}\left(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)=0$$

$$EI\lambda^3\left(1+\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)+k\ell\cdot EI\lambda^4\left(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)=0$$

したがって、このはりの曲げ振動の振動数方程式は、次のように表される。

$$\boxed{\left(1+\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)+k\cdot\lambda\ell\left(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right)=0}$$

【例】自由端に集中質量をもつ片持ばりの１次固有振動数と変位関数の関係

自由端に集中質量がない場合の片持ばりの曲げ振動の１次固有振動数の厳密解 ω_0 は、

$$\omega_0 = \left(\frac{1.875104068711961\cdots}{\ell}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{wA}} \cong \frac{3.516}{\ell^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{wA}}$$

と表される。

自由端の集中質量 m を〝はりの質量 $wA\ell$〟の k 倍、即ち、$m = k \times wA\ell$ で表すとき、はりの曲げ振動の振動数方程式は、次のように表される。

$$\left(1+\cos\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right) + k\cdot\lambda\ell\left(\cos\lambda\ell\sinh\lambda\ell - \sin\lambda\ell\cosh\lambda\ell\right) = 0$$

これから質量比 k をパラメータとして、$\lambda\ell$ を得ると、$\omega^2 = \lambda^4 \dfrac{EI}{wA}$ より、$\omega_C = \lambda^2\sqrt{\dfrac{EI}{wA}} = \dfrac{(\lambda\ell)^2}{\ell^2}\sqrt{\dfrac{EI}{wA}}$

となり、１次固有振動数の比 $\dfrac{\omega_C}{\omega_0} = \dfrac{(\lambda\ell)^2}{(1.875104068711961\cdots)^2}$ が求まる。

この１次固有振動数の比 $\dfrac{\omega_C}{\omega_0}$ と質量比 k の関係を「集中質量の１次固有振動数に及ぼす影響」として図-1 に示す。この図から、集中質量が〝はりの質量〟と同程度の場合、１次固有振動数は半分（周期が倍）程度に変化することがわかる。

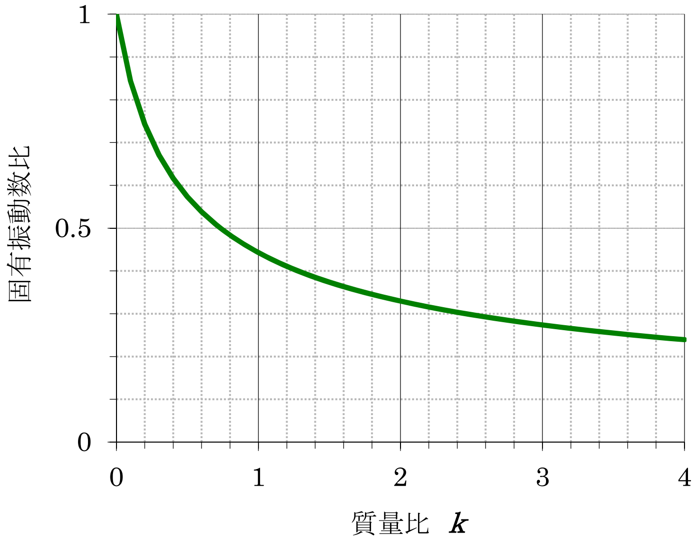


図-1　集中質量の１次固有振動数に及ぼす影響

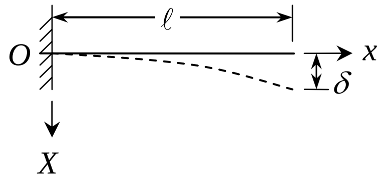
次に、近似解法として〝レイリーの方法〟を用いた場合の１次固有振動数の解 ω について考える。このとき、求められる１次固有振動数 ω は、質量比 k をパラメータとして、$\omega = \dfrac{\mu}{\ell^2}\cdot\sqrt{\dfrac{EI}{wA}}$ の形で表すこととする。

変位関数 $X(x)$ として、次の 3 通りについて考える。

① 〝cos 関数〟

自由端でのたわみを δ とし、$X(x)=\delta\left(1-\cos\dfrac{\pi}{2\ell}x\right)$ のとき

$$\Rightarrow \mu=\frac{\pi^2}{4}\sqrt{\frac{\pi}{3\pi-8+2\pi k}}$$

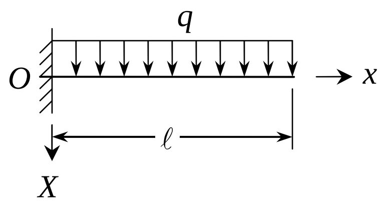


② 〝等分布関数〟

等分布荷重 q が静的に載荷されるときのたわみ曲線

$$X(x)=\frac{q\ell^4}{24EI}\left\{6\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\left(\frac{x}{\ell}\right)^4\right\}\text{のとき}$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{36}{\sqrt{104+405k}}$$

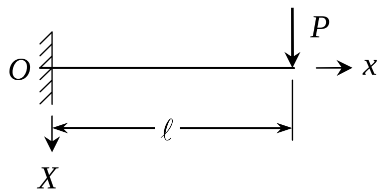


③ 〝集中荷重関数〟

片持ばりの自由端に集中荷重 P が載荷されるときのたわみ曲線

$$X(x)=\frac{P\ell^3}{6EI}\left\{3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-\left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right\}\text{のとき}$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{2\sqrt{105}}{\sqrt{33+140k}}$$



〝レイリーの方法〟を用いた場合の 1 次固有振動数の解 ω と振動数方程式から求めた厳密解 ω_C の比 $\dfrac{\omega}{\omega_C}$ と質量比 k の関係を「変位関数が 1 次固有振動数の解に及ぼす影響」として図-2 に示す。

この図から、いずれの変位関数を用いても 3～4%程度の誤差で 1 次固有振動数を近似できる。また、〝cos 関数〟は、質量比 k が 0.3 以下では誤差が大きく、〝等分布関数〟は、質量比 k が 0.5 以上では誤差が大きくなる。全体的には、変位関数として〝集中荷重関数〟と〝cos 関数〟を用いた方が、質量比 k が 0.5 以上では〝等分布関数〟を用いたものよりも正確である。〝集中荷重関数〟を用いた場合は、質量比 k が 0.5 以上になればほとんど誤差がないことがわかる。

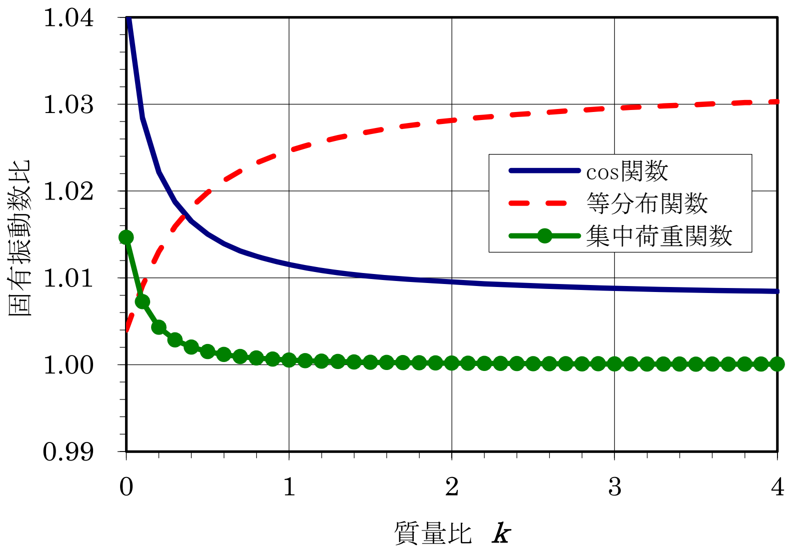


図-2　変位関数が 1 次固有振動数の解に及ぼす影響