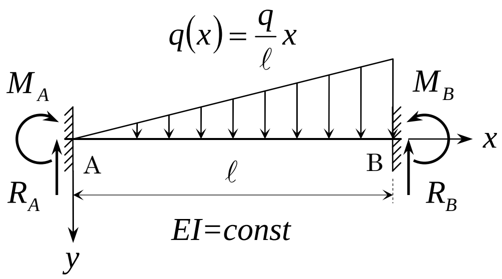
構造力学演習Ⅱ（2017-Report №.１） 2017/09/05 出題

【問題 BD4-B-4】下図に示すような“A 点，B 点が両端固定の不静定ばり”に等変分布荷重 $q(x)$ が作用するとき、以下の設問に答えよ。ただし、はりの曲げ剛性は、EI で一定とする。

(1) はりのたわみ角 $\theta(x)$ とたわみ $y(x)$ の式を求めよ。

(2) A 点，B 点それぞれの支点反力 R_A， R_B と支点モーメント M_A， M_B を求めよ。

(3) 最大のたわみ $y_{\max}$ とその発生位置 $x_{\max}$ を求めよ。



【解答】

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q(x)=\dfrac{q}{\ell}x$ を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$EIy''=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120}+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1，C_2，C_3，C_4 を求める。

1) $x=0$ のとき、 $y=0$ より、 $C_4=0$

2) $x=0$ のとき、$y'=0$ より、 $C_3=0$

3) $x=\ell$ のとき、$y=0$ より、 $\dfrac{q}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^5}{120}+\dfrac{C_1}{6}\ell^3+\dfrac{C_2}{2}\ell^2=0 \quad \therefore C_1\ell+3C_2=-\dfrac{q\ell^2}{20}$ ………①

4) $x=\ell$ のとき、$y'=0$ より、 $\dfrac{q}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^4}{24}+\dfrac{C_1}{2}\ell^2+C_2\ell=0 \quad \therefore C_1\ell+2C_2=-\dfrac{q\ell^2}{12}$ ………②

①－②より、 $C_2=-\dfrac{q\ell^2}{20}+\dfrac{q\ell^2}{12}=\dfrac{-3+5}{60}q\ell^2=\dfrac{q\ell^2}{30} \quad \therefore C_2=\dfrac{1}{30}q\ell^2$

これを、②に代入すると、$C_1\ell=-\dfrac{q\ell^2}{12}-\dfrac{q\ell^2}{15}=\dfrac{-5-4}{60}q\ell^2=-\dfrac{9}{60}q\ell^2=-\dfrac{3}{20}q\ell^2 \quad \therefore C_1=-\dfrac{3}{20}q\ell$

よって、

$$EIy''' = \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{3}{20}q\ell = \frac{q\ell}{20}\cdot\left\{10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 3\right\}$$

$$EIy'' = \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6} - \frac{3}{20}q\ell x + \frac{1}{30}q\ell^2 = \frac{q\ell^2}{60}\cdot\left\{10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 9\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + 2\right\}$$

$$EIy' = \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24} - \frac{3}{40}q\ell x^2 + \frac{1}{30}q\ell^2 x = \frac{q\ell^3}{120}\cdot\left\{5\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 9\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}$$

$$EIy = \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120} - \frac{1}{40}q\ell x^3 + \frac{1}{60}q\ell^2 x^2 = \frac{q\ell^4}{120}\cdot\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - 3\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}$$

したがって、はりのたわみ角$\theta(x)$とたわみ$y(x)$の式は、次のようになる。

$$\boxed{\begin{aligned}\theta(x) &= \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24EI} - \frac{3q\ell}{40EI}x^2 + \frac{q\ell^2}{30EI}x = \frac{q\ell^3}{120EI}\cdot\left\{5\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 9\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}\\ y(x) &= \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120EI} - \frac{q\ell}{40EI}x^3 + \frac{q\ell^2}{60EI}x^2 = \frac{q\ell^4}{120EI}\cdot\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - 3\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}\end{aligned}}$$

(2) 上記(1)より、せん断力$Q = -EIy'''$，曲げモーメント$M = -EIy''$は、次の式で表される。

$$EIy''' = \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{3}{20}q\ell = \frac{q\ell}{20}\cdot\left\{10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 3\right\}$$

$$EIy'' = \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6} - \frac{3}{20}q\ell x + \frac{1}{30}q\ell^2 = \frac{q\ell^2}{60}\cdot\left\{10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 9\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + 2\right\}$$

したがって、A点, B点それぞれの支点反力R_A，R_Bと支点モーメントM_A，M_Bは、次のようになる。

$$R_A = Q_A = \left[-EIy'''\right]_{x=0} = -\left[EIy'''\right]_{x=0} = -\left(-\frac{3}{20}q\ell\right) = \frac{3}{20}q\ell$$

$$R_B = -Q_B = -\left[-EIy'''\right]_{x=\ell} = \left[EIy'''\right]_{x=\ell} = \frac{7}{20}q\ell$$

$$M_A = \left[-EIy''\right]_{x=0} = -\left[EIy''\right]_{x=0} = -\frac{1}{30}q\ell^2$$

$$M_B = \left[-EIy''\right]_{x=\ell} = -\left[EIy''\right]_{x=\ell} = -\frac{1}{20}q\ell^2$$

$$\therefore\ \boxed{R_A = \frac{3}{20}q\ell},\ \boxed{R_B = \frac{7}{20}q\ell},\ \boxed{M_A = -\frac{1}{30}q\ell^2},\ \boxed{M_B = -\frac{1}{20}q\ell^2}$$

(3) (1)で得たたわみ角$\theta(x)$の式において、$X = \dfrac{x}{\ell}$として、$\theta(x) = 0$を解くと、

$$5X^4 - 9X^2 + 4X = 0 \qquad \therefore X(X-1)(5X^2 + 5X - 4) = 0$$

ここで、$0 < X < 1$だから、$5X^2 + 5X - 4 = 0$より、$X = \dfrac{-5+\sqrt{105}}{10} = 0.524695076\cdots \cong 0.5247$

よって、$x_{\max} = \dfrac{-5+\sqrt{105}}{10}\ell$のとき、たわみ$y(x)$は、次のような最大たわみ$y_{\max}$となる。

$$y_{\max} = \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \left\{ \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right)^5 - 3 \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right)^2 \cdot \left\{ \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right) + 2 \right\}$$

$$= \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \left(\frac{13-\sqrt{105}}{10} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{13-\sqrt{105}}{10} \right) \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right) - 3 \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right) + 2 \right\}$$

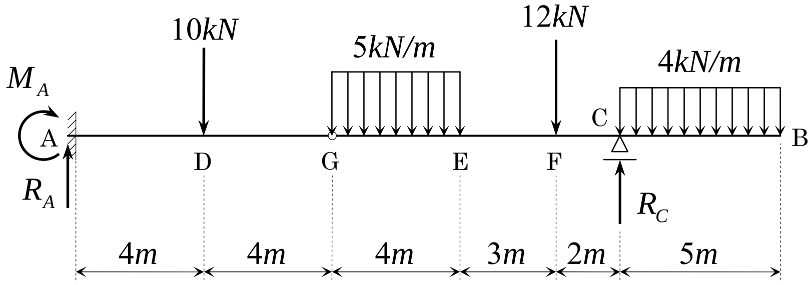
$$= \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{-65-105+18\sqrt{105}+150-30\sqrt{105}+200}{100}$$

$$= \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{180-12\sqrt{105}}{100} = \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{45-3\sqrt{105}}{25} = \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{585+315-84\sqrt{105}}{250}$$

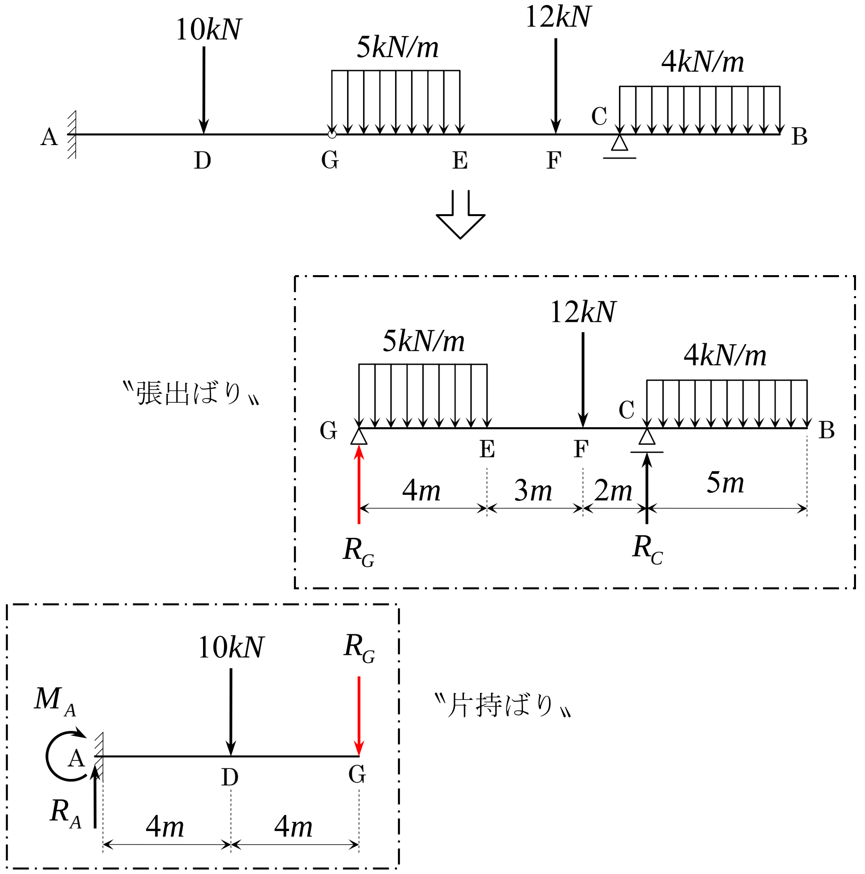
$$= \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{900-84\sqrt{105}}{250} = \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{450-42\sqrt{105}}{125} = 0.157024542\cdots \frac{q\ell^4}{120EI} \cong 0.1570 \cdot \frac{q\ell^4}{120EI}$$

したがって、$\boxed{x_{\max} = \frac{-5+\sqrt{105}}{10} \ell \cong 0.5247\ell}$ のとき、$\boxed{y_{\max} = \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{450-42\sqrt{105}}{125} \cong 0.1570 \cdot \frac{q\ell^4}{120EI}}$

【問題 SF-G-4】下図に示す静定ゲルバーばりについて、以下の設問に答えよ。
(1) 支点反力 R_A， M_A， R_C を求めよ。
(2) 断面力図、即ち、せん断力図（Q－図），曲げモーメント図（M－図）を図示せよ。



【解答】
(1)静定ゲルバーばりを下図のように〝張出ばり〟と〝片持ばり〟の 2 つに分解して考える。



まず、〝張出ばり〟について解くと、

$$R_C + R_G = 5 \times 4 + 12 + 4 \times 5 = 52$$

$$R_C \times (4+3+2) = 5 \times 4 \times 2 + 12 \times (4+3) + 4 \times 5 \times (4+3+2+2.5) \qquad \therefore 9R_C = 40 + 84 + 230 = 354$$

$$\therefore R_C = \frac{118}{3} \cong 39.33 \ (kN) \qquad また、R_G = \frac{156-118}{3} = \frac{38}{3} \cong 12.67 \ (kN)$$

次に、〝片持ばり〟について解くと、

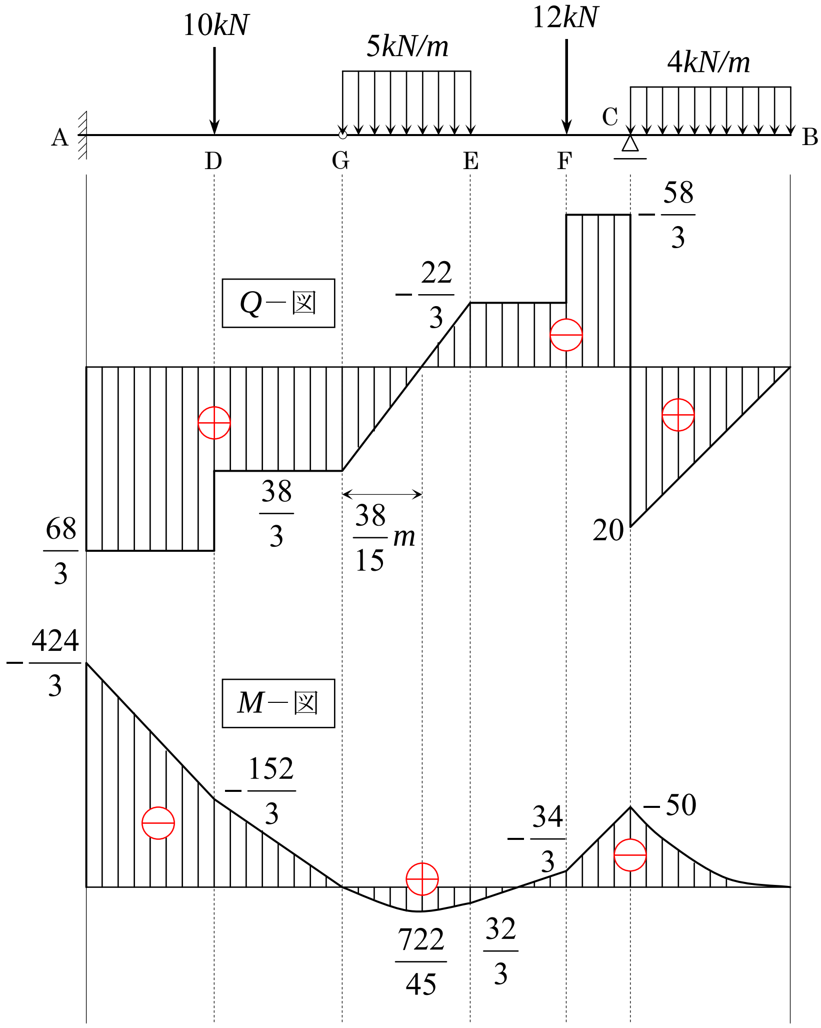
$$R_A = 10 + R_G = 10 + \frac{38}{3} = \frac{68}{3} \cong 22.67 \ (kN)$$

$$M_A + 10 \times 4 + R_G \times (4+4) = 0 \quad \therefore M_A = -40 - \frac{304}{3} = -\frac{424}{3} \cong -141.33 \ (kN \cdot m)$$

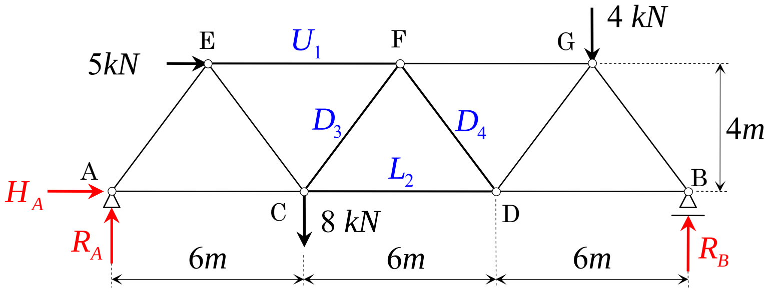
以上より、支点反力 R_A， M_A， R_C をまとめると、次のようになる。

$$\boxed{R_A = \frac{68}{3} \cong 22.67 \ (kN)}, \quad \boxed{M_A = -\frac{424}{3} \cong -141.33 \ (kN \cdot m)}, \quad \boxed{R_C = \frac{118}{3} \cong 39.33 \ (kN)}$$

(2)せん断力図（Q－図），曲げモーメント図（M－図）を図示すると、下図のようになる。



【問題 SF-T-1】下図に示す静定ワーレントラスの部材力 U_1, D_3, D_4, L_2 を求めよ。



【解答】

まず、支点反力 H_A, R_A, R_B を求めると、

水平方向の力の釣合から、 $H_A + 5 = 0 \qquad \therefore H_A = -5\ (kN)$

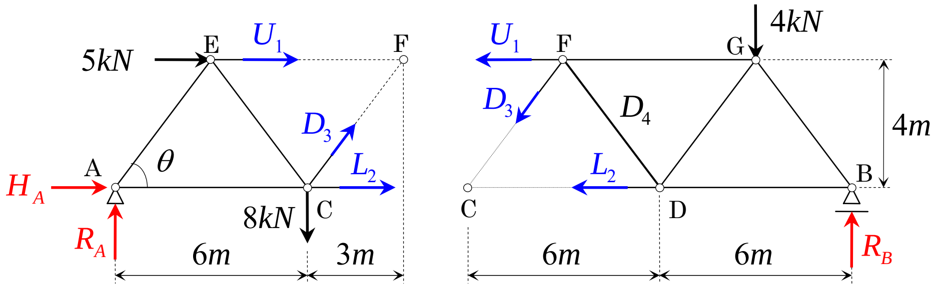
鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R_B = 8 + 4 = 12$

A 点回りのモーメントの釣合から、

$$R_B \times 18m = 8kN \times 6m + 4kN \times 15m + 5kN \times 4m = 48 + 60 + 20 = 128$$

$$\therefore R_B = \frac{128}{18} = \frac{64}{9}\ (kN) \qquad \text{よって、} R_A = \frac{44}{9}\ (kN)$$

次に、下図に示すように $t-t$ で切断して、左自由体と右自由体それぞれについて考えると、



$$\sin\theta = \frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{3}{5}$$

［左自由体について］　　［右自由体について］

水平方向の力の釣合から、

$$H_A + 5 + U_1 + \frac{3}{5}D_3 + L_2 = 0 \qquad U_1 + L_2 + \frac{3}{5}D_3 = 0$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5}D_3 + R_A = 8 \qquad \frac{4}{5}D_3 + 4 = R_B$$

$$\therefore \frac{4}{5}D_3 = 8 - \frac{44}{9} = \frac{28}{9} \qquad \therefore \frac{4}{5}D_3 = \frac{64}{9} - 4 = \frac{28}{9}$$

$$\therefore D_3 = \frac{28}{9} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{9}\ (kN)$$

F 点回りのモーメントの釣合から、

$$4L_2 + 4H_A + 8kN \times 3m = R_A \times 9m \qquad 4L_2 + 4kN \times 6m = R_B \times 9m$$

$$\therefore 4L_2 - 20 + 24 = 44 \qquad \therefore 4L_2 + 24 = 64$$

$$\therefore 4L_2 = 40$$

$$\therefore L_2 = 10\ (kN)$$

C 点回りのモーメントの釣合から、

$$4U_1 + 5kN \times 4m + R_A \times 6m = 0 \qquad 4U_1 + R_B \times 12m = 4kN \times 9m$$

$$\therefore 4U_1 + 20 + \frac{44}{9}\cdot 6 = 0$$

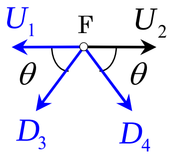
$$\therefore 4U_1 = -\frac{88}{3} - 20 = -\frac{148}{3}$$

$$\therefore 4U_1 + \frac{64}{9}\cdot 12 = 36$$

$$\therefore 4U_1 = 36 - \frac{256}{3} = -\frac{148}{3}$$

$$\therefore U_1 = -\frac{148}{3}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{37}{3}\,(kN)$$

さらに、F 点での力の釣合を考えると、



水平方向の力の釣合から、　$U_1 + \frac{3}{5}D_3 = U_2 + \frac{3}{5}D_4$

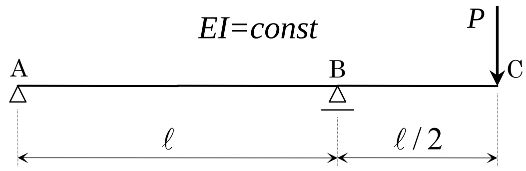
鉛直方向の力の釣合から、　$\frac{4}{5}D_3 + \frac{4}{5}D_4 = 0$

$$\therefore D_4 = -D_3 = -\frac{35}{9}\,(kN)$$

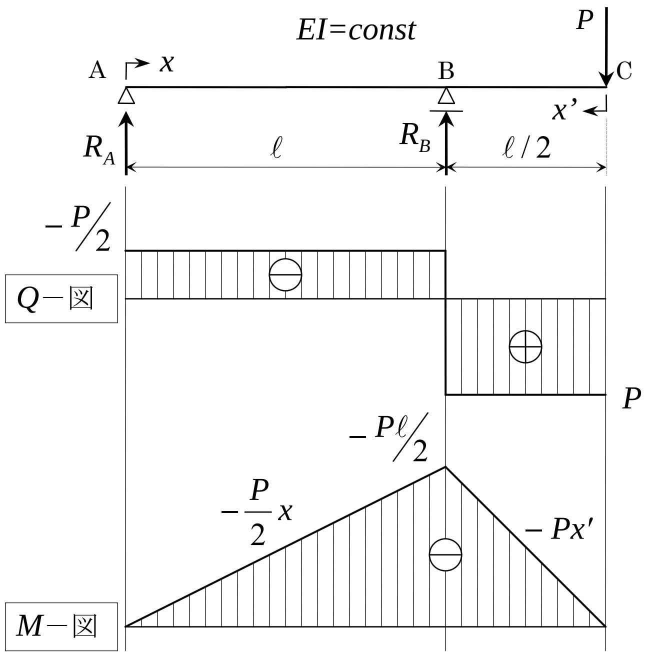
以上をまとめると、

$\boxed{U_1 = -\frac{37}{3}\,(kN)}$, $\boxed{D_3 = \frac{35}{9}\,(kN)}$, $\boxed{D_4 = -\frac{35}{9}\,(kN)}$, $\boxed{L_2 = 10\,(kN)}$

【問題 EL-OB-1】下図に示す“張出ばり”の C 点のたわみ角 θ_C とたわみ y_C を求めよ。ただし、はりの曲げ剛性は EI で一定とする。



【解答】



支点反力を R_A，R_B とすると、

$$R_A + R_B = P$$

$$R_B \cdot \ell = P \cdot \left(\ell + \frac{\ell}{2}\right)$$

$$\therefore R_B = \frac{3}{2}P \quad R_A = -\frac{1}{2}P$$

これより、断面力図は、右図のようになる。

次に、〝弾性荷重〟（＝曲げモーメント／曲げ剛性）を求めると、

$$\alpha = -\frac{P\ell}{2EI}$$

また、「張出ばり」の〝共役ばり〟を考えると、

A 点…回転支点　→　回転支点

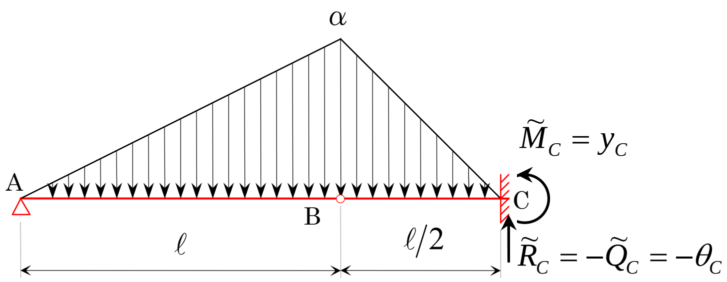
$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} = 0 \\ \tilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$

B 点…移動支点　→　ヒンジ

$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta_\ell = \theta_r \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} = 0 \\ \tilde{Q}_\ell = \tilde{Q}_r \end{pmatrix}$$

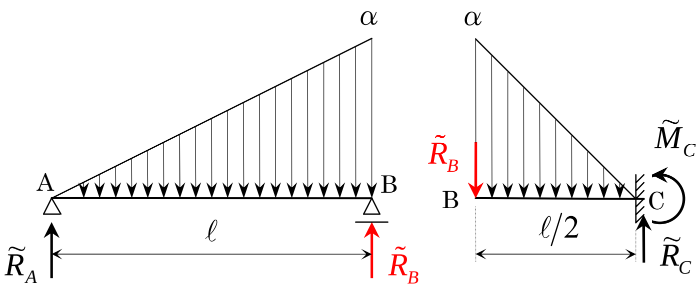
C 点…自由端　→　固定端

$$\begin{pmatrix} y \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} \neq 0 \\ \tilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$



となるから、〝弾性荷重〟を載荷した〝共役ばり〟は、右図のようになる。

これを下図のように「単純ばり」と「片持ばり」に分解して考える。



このとき、支点反力 $\tilde{R}_A$，$\tilde{R}_B$，$\tilde{R}_C$，$\tilde{M}_C$ は、「単純ばり」部分と「片持ばり」部分での釣合条件から次のように求まる。

「単純ばり」部分より、

$$\widetilde{R}_A + \widetilde{R}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad \widetilde{R}_B \cdot \ell = \frac{1}{2}\alpha\ell \cdot \frac{2}{3}\ell = \frac{1}{3}\alpha\ell^2 \qquad \therefore \widetilde{R}_B = \frac{1}{3}\alpha\ell, \quad \widetilde{R}_A = \frac{1}{6}\alpha\ell$$

「片持ばり」部分より、

$$\widetilde{R}_C = \widetilde{R}_B + \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}\alpha\ell + \frac{1}{4}\alpha\ell = \frac{7}{12}\alpha\ell \qquad \therefore \boxed{\theta_C = -\widetilde{R}_C = -\frac{7}{12} \cdot \left(-\frac{P\ell}{2EI}\right) \cdot \ell = \frac{7}{24} \cdot \frac{P\ell^2}{EI}}$$

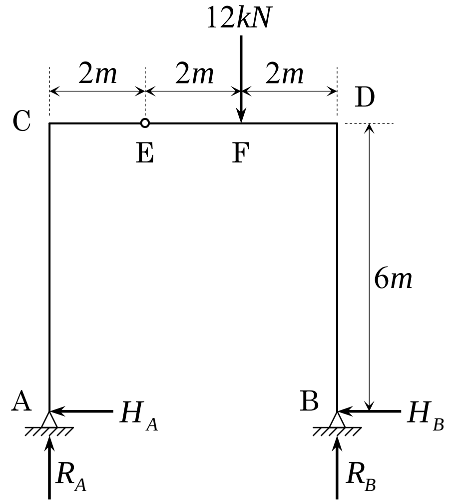
$$\widetilde{M}_C + \widetilde{R}_B \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \left(\frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\therefore -\widetilde{M}_C = \frac{1}{3}\alpha\ell \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{12}\alpha\ell^2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) \cdot \alpha\ell^2 = \frac{1}{4}\alpha\ell^2$$

$$\therefore \boxed{y_C = \widetilde{M}_C = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{P\ell}{2EI}\right) \cdot \ell^2 = \frac{P\ell^3}{8EI}}$$

【問題 SF-R-3】右図に示す静定ラーメンの軸力図（N－図），せん断力図（Q－図），曲げモーメント図（M－図）を描け。

なお、ラーメンの曲げモーメントは、部材の内側が引張で変形するような曲げモーメントを正として扱うものとする。また、軸力図はせん断力図の正負と同じ扱いで描くこと。



【解答】

まず、支点反力を求める。

鉛直方向の力の釣合から、$R_A + R_B = 12$

水平方向の力の釣合から、$H_A + H_B = 0$

構造全体について、A 点回りのモーメントの釣合から、$R_B \times 6m = 12kN \times 4m$

$\therefore R_B = 8\,kN$ よって、$R_A = 4\,kN$

右側の構造について、E 点回りのモーメントの釣合から、$R_B \times 4m = 12kN \times 2m + H_B \times 6m$

$\therefore H_B = \dfrac{4}{3}\,kN$ よって、$H_A = -\dfrac{4}{3}\,kN$

次に、以下のように４つに分解して断面力を求める。

1) A～C 間について、

$N + R_A = 0$

$\therefore N = -R_A = -4$

$Q = H_A = -\dfrac{4}{3}$

$M = H_A \cdot x_1 = -\dfrac{4}{3} x_1$

2) D～(E)F 間について、

$N = H_A = -\dfrac{4}{3}$

$Q = R_A = 4$

$M = H_A \times 6m + R_A \cdot x_2$

$\therefore M = -8 + 4x_2$

3) F～D 間について、

$N + H_B = 0$

$\therefore N = -H_B = -\dfrac{4}{3}$

$Q + R_B = 0$

$\therefore Q = -R_B = -8$

$M + H_B \times 6m = R_B \cdot x_3$

$\therefore M = 8x_3 - 8$

4) D～B 間について、

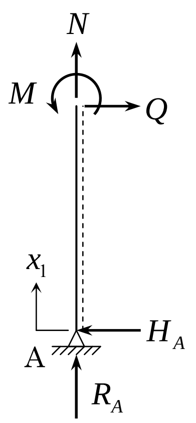
$N + R_B = 0$

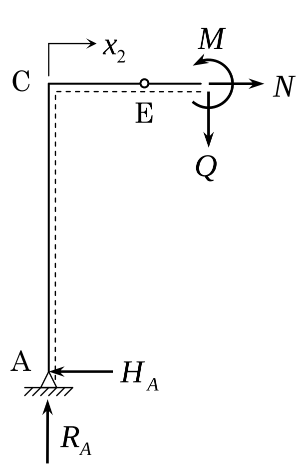
$\therefore N = -R_B = -8$

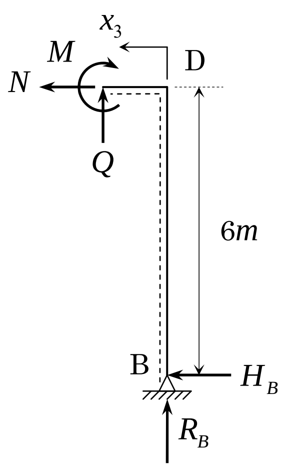
$Q = H_B = \dfrac{4}{3}$

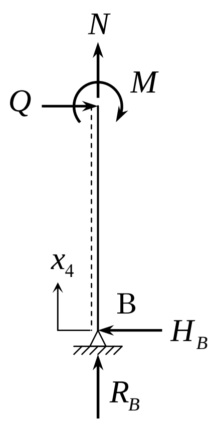
$M + H_B \cdot x_4 = 0$

$\therefore M = -H_B \cdot x_4 = -\dfrac{4}{3} x_4$

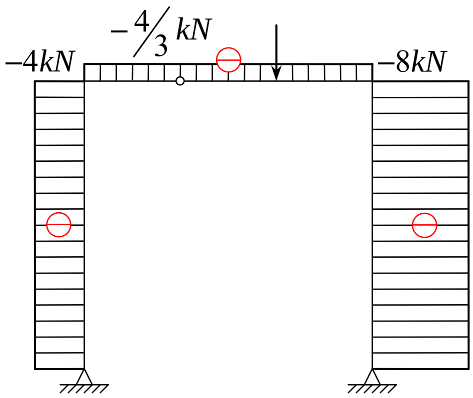




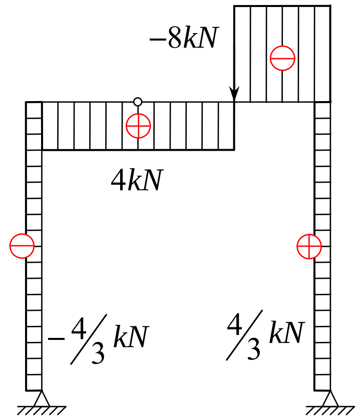




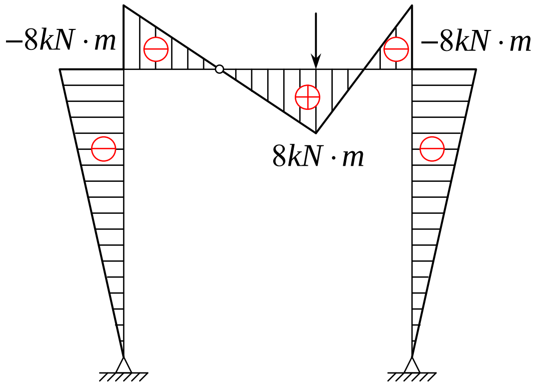
以上より、断面力図を図示すると、下図のようになる。



軸力図



せん断力図

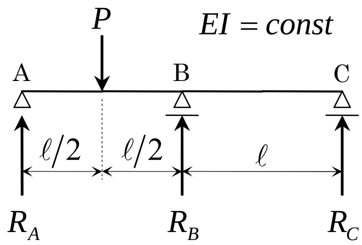


曲げモーメント図

【問題 BD-N-1】下図に示すような曲げ剛性 EI が一定な“連続ばり”について、以下の設問に答えよ。

(1) 支点反力 R_A， R_B， R_C を求めよ。

(2) 断面力図（Q－図，M－図）を図示せよ。



【解答】 《解法 I 》

(1) 連続ばり ABC の支点 B を取り外し、単純ばり化して、次のように考える。

①単純ばり AC に荷重 P が載荷されたときの B 点のたわみ y_B^1 と A，C 点の支点反力 R_A^1， R_C^1 を求める。

②単純ばり AC において、B 点に鉛直上方向に未知の外力 X が作用するときの B 点のたわみ y_B^2 と A，C 点の支点反力 R_A^2， R_C^2 を求める。

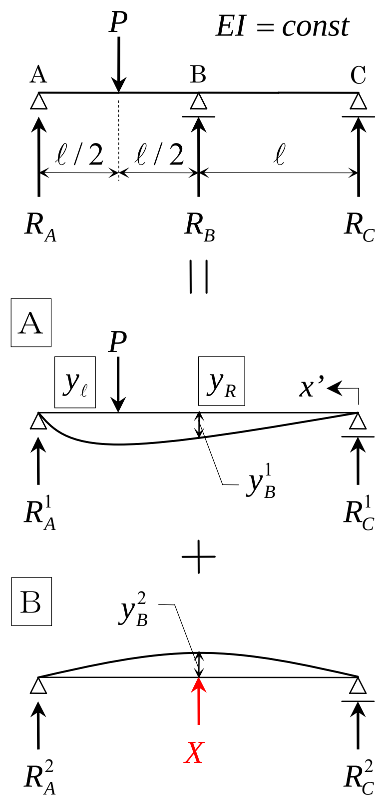
③連続ばり ABC においては、B 点のたわみはゼロであるから、①と②で求めた B 点のたわみ y_B^1 と y_B^2 は、大きさが等しく、方向が逆にならなければならない。

④上記③の条件を用いて、②の未知の外力 X の大きさを求めれば、B 点の支点反力 R_B に他ならない。すなわち、 R_B=X である。

⑤上記④で求めた外力 X の大きさを用いて、A，C 点の支点反力 R_A^2，R_C^2 を表せば、連続ばり ABC における A，C 点の支点反力 R_A， R_C は、 $R_A = R_A^1 + R_A^2$， $R_C = R_C^1 + R_C^2$ で求められる。

上記のように考えれば、右図のように、問題は分解され、$\boxed{\text{A}}$と$\boxed{\text{B}}$の状態の和で表される。

まず、$\boxed{\text{A}}$の状態について、A，C 点の支点反力 R_A^1，R_C^1 を求めると、



$$2\ell \cdot R_A^1 = \frac{3}{2}\ell \cdot P \quad \therefore R_A^1 = \frac{3}{4}P$$

$$2\ell \cdot R_C^1 = \frac{1}{2}\ell \cdot P \quad \therefore R_C^1 = \frac{1}{4}P$$

このとき、荷重 P の右側のたわみ y_R は、教科書の表から次のように表される。

$$y_R = \frac{Pa^2b^2}{6EI\ell}\left(2\frac{x'}{b} + \frac{x'}{a} - \frac{x'^3}{ab^2}\right)$$

これを用いて、B 点のたわみ y_B^1 を求めるために、

$\ell \to 2\ell$， $a = \dfrac{\ell}{2}$， $b = \dfrac{3}{2}\ell$， $x' = \ell$ とおくと、次のようになる。

$$y_B^1 = \frac{P\dfrac{1}{4}\ell^2 \cdot \dfrac{9}{4}\ell^2}{6EI \cdot 2\ell}\left(2\frac{\ell}{\dfrac{3}{2}\ell} + \frac{\ell}{\dfrac{1}{2}\ell} - \frac{\ell^3}{\dfrac{1}{2}\ell \cdot \dfrac{9}{4}\ell^2}\right)$$

$$= \frac{3P\ell^3}{64EI}\left(2 \cdot \frac{2}{3} + 2 - \frac{8}{9}\right) = \frac{3P\ell^3}{64EI} \cdot \frac{12+18-8}{9}$$

$$= \frac{3P\ell^3}{64EI} \cdot \frac{22}{9} = \frac{11}{96} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

次に、$\boxed{\mathrm{B}}$の状態について、B 点のたわみ y_B^2 を考えると、

$$y_B^2 = -\frac{X\cdot 8\ell^3}{48EI} = -\frac{X\ell^3}{6EI}$$

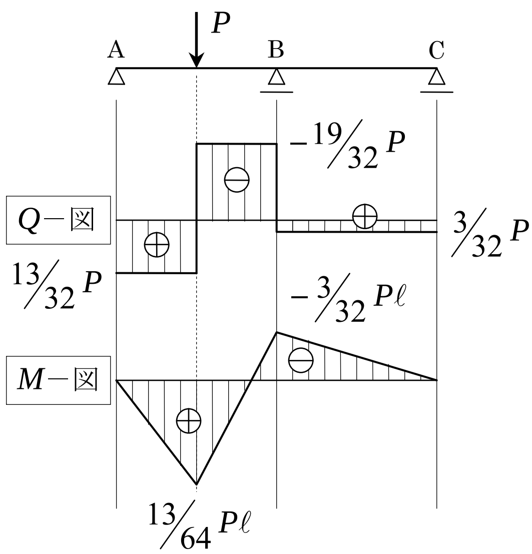
ここで、連続ばり ABC においては、B 点のたわみはゼロであるから、

$$y_B^1 + y_B^2 = \frac{11}{96}\cdot\frac{P\ell^3}{EI} - \frac{X\ell^3}{6EI} = 0 \qquad \therefore X = \frac{6\cdot 11}{96}P = \frac{11}{16}P$$

また、A, C 点の支点反力 R_A^2, R_C^2 は、$R_A^2 = R_C^2 = -\dfrac{X}{2} = -\dfrac{11}{32}P$

以上より、
$$\boxed{\begin{aligned} R_A &= R_A^1 + R_A^2 = \left(\frac{3}{4}-\frac{11}{32}\right)\cdot P = \frac{24-11}{32}P = \frac{13}{32}P \\ R_B &= X = \frac{11}{16}P \\ R_C &= R_C^1 + R_C^2 = \left(\frac{1}{4}-\frac{11}{32}\right)\cdot P = \frac{8-11}{32}P = -\frac{3}{32}P \end{aligned}}$$

(2) 断面力図（Q－図，M－図）を図示すると、下図のようになる。



【解答】《解法Ⅱ》

(1) 連続ばり ABC の支点 C を取り外し、張出ばり化して、次のように考える。

①張出ばり AC に荷重 P が載荷されたときの B 点のたわみ角 $\theta_B=\theta_{B\ell}=\theta_{Br}$ と $A,\ B$ 点の支点反力 R_A^1, R_B^1 を求める。

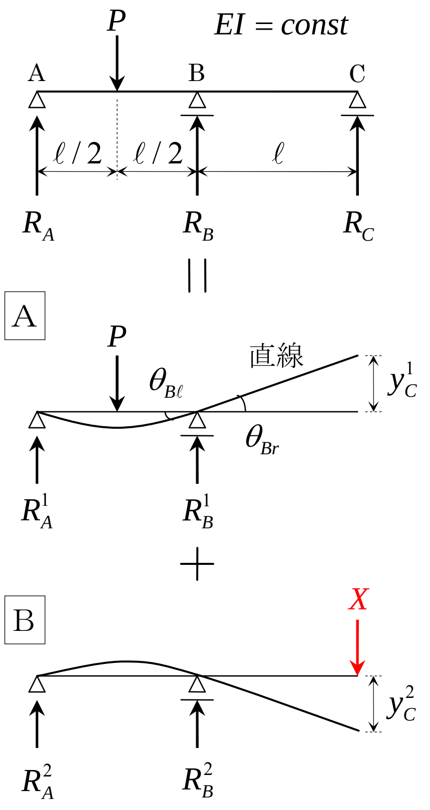
②張出ばり AC において、C 点に鉛直下方向に未知の外力 X が作用するときの C 点のたわみ y_C^2 と $A,\ B$ 点の支点反力 R_A^2, R_B^2 を求める。

③連続ばり ABC においては、C 点のたわみはゼロであるから、①と②で求めた C 点のたわみ y_C^1 と y_C^2 は、大きさが等しく、方向が逆にならなければならない。

④上記③の条件を用いて、②の未知の外力 X の大きさを求めれば、C 点の支点反力 R_C に他ならない。すなわち、$R_C=-X$ である。

⑤上記④で求めた外力 X の大きさを用いて、$A,\ B$ 点の支点反力 R_A^2, R_B^2 を表せば、連続ばり ABC における $A,\ B$ 点の支点反力 R_A, R_B は、$R_A=R_A^1+R_A^2$, $R_B=R_B^1+R_B^2$ で求められる。

上記のように考えれば、右図のように、問題は分解され、$\boxed{\mathrm{A}}$ と $\boxed{\mathrm{B}}$ の状態の和で表される。



まず、$\boxed{\mathrm{A}}$ の状態について、$A,\ B$ 点の支点反力 R_A^1, R_B^1 を求めると、

$$R_A^1+R_B^1=P\,,\quad R_A^1\ell=P\cdot\frac{\ell}{2}\qquad\qquad \therefore R_A^1=R_B^1=\frac{P}{2}$$

このとき、B 点のたわみ角 θ_B は、教科書の表から、

$$\theta_B=-\frac{P\ell^2}{16EI}\qquad \therefore \theta_{B\ell}=\theta_{Br}=-\frac{P\ell^2}{16EI}$$

これを用いて、C 点のたわみ y_C^1 を求めると、次のようになる。

$$y_C^1=\theta_{Br}\cdot\ell=-\frac{P\ell^3}{16EI}$$

次に、$\boxed{\mathrm{B}}$ の状態について、$A,\ B$ 点の支点反力 R_A^2, R_B^2 を求めると、

$$R_A^2+R_B^2=X\,,\quad R_B^2\ell=X\cdot 2\ell$$

$$\therefore R_A^2=-X\,,\quad R_B^2=2X$$

このとき、BC 間のたわみ y_1 は、教科書の表から、

$$y_1=\frac{P\ell^3}{6EI}\cdot\frac{x_1}{\ell}\cdot\left(2\frac{a}{\ell}+3\frac{a}{\ell}\cdot\frac{x_1}{\ell}-\frac{x_1^2}{\ell^2}\right)$$

と表され、$P=X$, $a=\ell$, $x_1=\ell$ とおくと、C 点のたわみ y_C^2 は、次のようになる。

$$y_C^2=\frac{X\ell^3}{6EI}\cdot\frac{\ell}{\ell}\cdot\left(2\frac{\ell}{\ell}+3\frac{\ell}{\ell}\cdot\frac{\ell}{\ell}-\frac{\ell^2}{\ell^2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{X\ell^3}{EI}$$

ここで、連続ばり ABC においては、C 点のたわみはゼロであるから、

$$y_C^1+y_C^2=-\frac{P\ell^3}{16EI}+\frac{2}{3}\cdot\frac{X\ell^3}{EI}=0\qquad \therefore X=\frac{P\ell^3}{16EI}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{EI}{\ell^3}=\frac{3}{32}P$$

以上より、
$$\boxed{\begin{aligned} R_A &= R_A^1 + R_A^2 = \frac{1}{2}P - X = \frac{1}{2}P - \frac{3}{32}P = \frac{16-3}{32}P = \frac{13}{32}P \\ R_B &= R_B^1 + R_B^2 = \frac{1}{2}P + 2X = \frac{1}{2}P + \frac{3}{16}P = \frac{8+3}{16}P = \frac{11}{16}P \\ R_C &= -X = -\frac{3}{32}P \end{aligned}}$$

(2) 断面力図（Q－図，M－図）を図示すると、下図のようになる。《解法 I の(2)と同じなので省略》

【解答】《解法Ⅲ》

(1) 連続ばり ABC では、支点 B に曲げモーメントが発生する。そこで、支点 B に曲げモーメント M_B が作用する２つの単純ばり化して、次のように考える。

①単純ばり AB に荷重 P と B 点に未知の曲げモーメント M_B が作用するときの B 点のたわみ角 $\theta_{B\ell}$ を求める。

②単純ばり BC において、B 点に未知の曲げモーメント M_B が作用するときの B 点のたわみ角 θ_{Br} を求める。

③連続ばり ABC においては、B 点のたわみ角は等しいから、①と②で求めた B 点のたわみ角 $\theta_{B\ell}$ と θ_{Br} は、$\theta_{B\ell}=\theta_{Br}$ でなければならない。

④上記③の条件を用いて、未知の曲げモーメント M_B の大きさを求める。

⑤上記④で求めた曲げモーメント M_B を用いて、

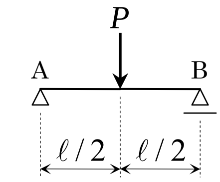
a) ①の場合の $A,\ B$ 点の支点反力 $R_A,\ R_B'$ を求める。

b) ②の場合の $B,\ C$ 点の支点反力 $R_B'',\ R_C$ を求める。

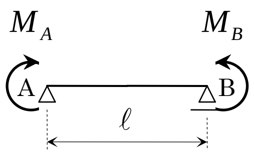
c) 連続ばり ABC における B 点の支点反力 R_B は、$R_B=R_B'+R_B''$ で求められる。

上記のように考えれば、右下図のように、問題は分解され、$\boxed{\text{A}}$ と $\boxed{\text{B}}$ の状態の和で表される。

ここで、下図のような場合のたわみ角は、教科書の表から、次のように表される。

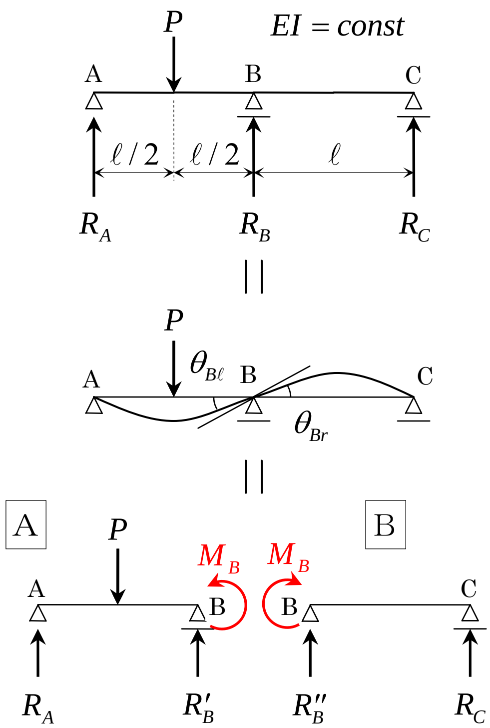


$$\theta_A=-\theta_B=\frac{P\ell^2}{16EI}$$



$$\theta_A=\frac{\ell}{6EI}\left(2M_A+M_B\right)$$

$$\theta_B=\frac{-\ell}{6EI}\left(M_A+2M_B\right)$$



したがって、B 点のたわみ角 $\theta_{B\ell}$ と θ_{Br} は、次のようになる。

$$\theta_{B\ell}=-\frac{P\ell^2}{16EI}-\frac{\ell}{6EI}\cdot 2M_B$$

$$\theta_{Br}=\frac{\ell}{6EI}\cdot 2M_B$$

いま、$\theta_{B\ell}=\theta_{Br}$ であるから、

$$-\frac{P\ell^2}{16EI}-\frac{M_B\ell}{3EI}=\frac{M_B\ell}{3EI}\qquad \therefore \frac{2M_B\ell}{3EI}=-\frac{P\ell^2}{16EI}\qquad \therefore M_B=-\frac{P\ell^2}{16EI}\cdot\frac{3EI}{2\ell}=-\frac{3}{32}P\ell$$

そこで、$\boxed{\text{A}}$ の状態について、$A,\ B$ 点の支点反力 $R_A,\ R_B'$ を求めると、

$$R_A\ell=P\cdot\frac{\ell}{2}+M_B\qquad \therefore R_A=\frac{P}{2}-\frac{3}{32}P=\frac{13}{32}P$$

$$R_A+R_B'=P\qquad \therefore R_B'=P-R_A=P-\frac{13}{32}P=\frac{19}{32}P$$

次に、$\boxed{\text{B}}$ の状態について、$B,\ C$ 点の支点反力 $R_B'',\ R_C$ を求めると、

$$R_C\ell=M_B\qquad \therefore R_C=\frac{M_B}{\ell}=-\frac{3}{32}P$$

$$R_C+R_B''=0\qquad \therefore R_B''=-R_C=\frac{3}{32}P$$

したがって、連続ばり ABC における B 点の支点反力 R_B は、 $R_B = R'_B + R''_B$ から、

$$R_B = R'_B + R''_B = \frac{19}{32}P + \frac{3}{32}P = \frac{22}{32}P = \frac{11}{16}P$$

以上より、

$$\boxed{\begin{aligned} R_A &= \frac{13}{32}P \\ R_B &= \frac{11}{16}P \\ R_C &= -\frac{3}{32}P \end{aligned}}$$

〔***Check***〕

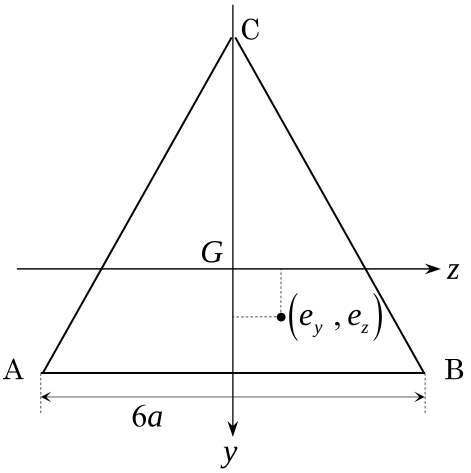
〝3連モーメントの定理〟を適用すると、$\dfrac{4\ell}{I}M_B = 6E \cdot \left(-\dfrac{P\ell^2}{16EI}\right)$

$$\therefore M_B = -\frac{3}{8}\cdot\frac{P\ell^2}{I}\cdot\frac{I}{4\ell} = -\frac{3}{32}P\ell$$

(2) 断面力図（Q－図，M－図）を図示すると、下図のようになる。《解法 I の(2)と同じなので省略》

構造力学演習Ⅱ（2017-Report №.３）　　2017/09/19 出題

【問題 CM-CS-3】
　下図に示す一辺の長さが $6a$ の“正三角形断面”ABC の〝断面の核〟を求め、図示せよ。



【解答】
図に示す重心 G を通る y, z 軸は主軸となるから、z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_z は、次のようになる。

$$\frac{1}{2}I_y=\frac{3\sqrt{3}a\cdot(3a)^3}{36}+\left(\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}a\times3a\right)\times(a)^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}a^4+\frac{9\sqrt{3}}{2}a^4=\frac{27\sqrt{3}}{4}a^4\qquad\therefore I_y=\frac{27\sqrt{3}}{2}a^4$$

$$I_z=\frac{6a\cdot\left(3\sqrt{3}a\right)^3}{36}=\frac{27\cdot3\sqrt{3}}{6}a^4=\frac{27\sqrt{3}}{2}a^4$$

また、断面積 A は、$A=\dfrac{1}{2}\times6a\times3\sqrt{3}a=9\sqrt{3}a^2$ だから、y, z 軸に関する回転半径をそれぞれ r_y, r_z とすると、

$$r_y^2=\frac{I_y}{A}=\frac{\frac{27\sqrt{3}}{2}a^4}{9\sqrt{3}a^2}=\frac{3}{2}a^2\qquad\qquad r_z^2=\frac{I_z}{A}=\frac{\frac{27\sqrt{3}}{2}a^4}{9\sqrt{3}a^2}=\frac{3}{2}a^2$$

ここで、載荷荷重の偏心位置を (e_y, e_z) とすると、中立軸は、$1+\dfrac{e_y}{r_z^2}y+\dfrac{e_z}{r_y^2}z=0$ と表され、

中立軸が y, z 軸と交わる点すなわち切片 n_y, n_z は、次のようになる。

$$n_y=-\frac{r_z^2}{e_y},\quad n_z=-\frac{r_y^2}{e_z}\qquad\text{逆に、}\qquad e_y=-\frac{r_z^2}{n_y},\quad e_z=-\frac{r_y^2}{n_z}$$

よって、〝断面の核〟の端の位置を決めるためには、中立軸が次の２通り（3 通り）の限界位置にある場合について、載荷荷重の偏心位置を (e_y, e_z) を求めればよい。

(1) 中立軸が AB となるとき、切片は、$n_y=\sqrt{3}a$, $n_z=\pm\infty$ となるから、

$$e_y=-\frac{r_z^2}{n_y}=-\frac{\frac{3}{2}a^2}{\sqrt{3}a}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}a=-\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$e_z=-\frac{r_y^2}{n_z}=-\frac{\frac{3}{2}a^2}{\pm\infty}=0$$

$$\therefore(e_y,e_z)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$$

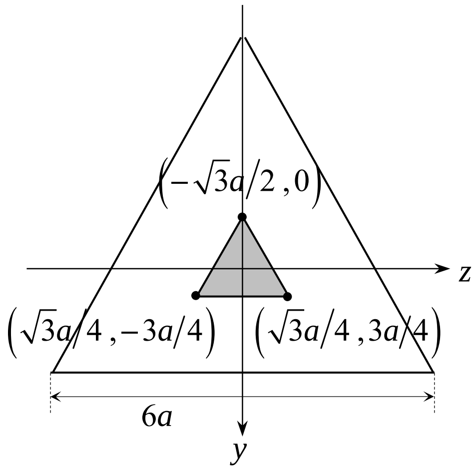
(2) 中立軸が BC または AC となるとき、切片は、$n_y = -2\sqrt{3}a$，$n_z = \pm 2a$ となるから、

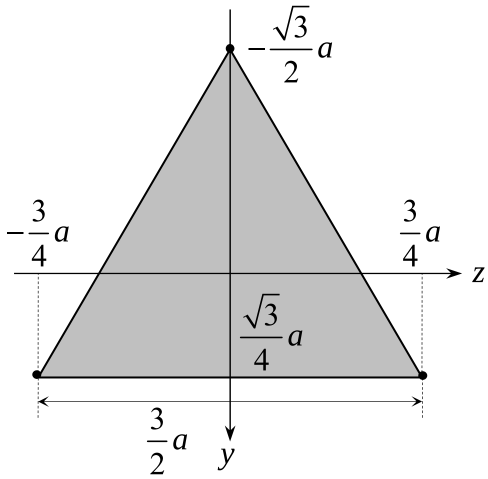
$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{-2\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{\pm 2a} = \mp\frac{3}{4}a$$

$$\therefore (e_y, e_z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a,\ \mp\frac{3}{4}a\right)$$

以上をまとめて、〝断面の核〟を塗りつぶしで図示すると下図のようになる。





『断面の核』拡大図

（一辺 $\frac{3}{2}a$ の正三角形）

【問題 CS-L-3】下図に示す“L 型断面”について、以下の設問に答えよ。

(1) L 型断面の重心$G(x_G, y_G)$を求めよ。

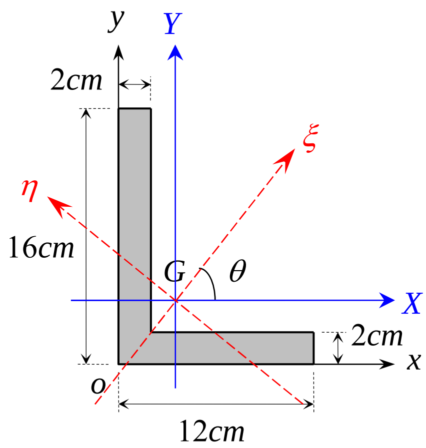
(2) 重心$G(x_G, y_G)$を通る X 軸に関する断面 2 次モーメントI_Xを求めよ。

(3) 重心$G(x_G, y_G)$を通る Y 軸に関する断面 2 次モーメントI_Yを求めよ。

(4) 重心$G(x_G, y_G)$を通る X, Y 軸に関する断面相乗モーメントI_{XY}を求めよ。

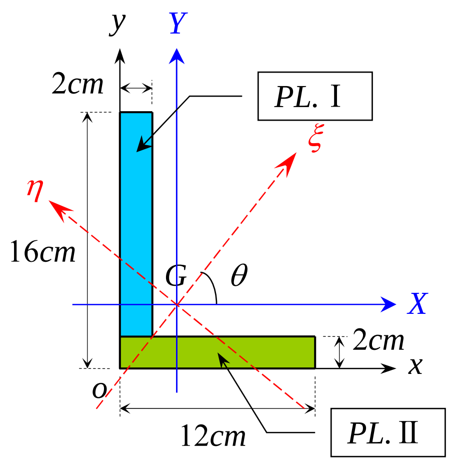
(5) 主軸ξ, ηの方向θを求めよ。

(6) 主断面 2 次モーメントI_1, I_2を求めよ。



【解答】

右図に示すように L 型断面を $PL.$ I と $PL.$ II の 2 つの長方形断面要素に分けて考える。



(1)～(4) 重心$G(x_G, y_G)$を通る X, Y 軸に関する断面 2 次モーメントI_X, I_Yおよび断面相乗モーメントI_{XY}は、次のような手順で求める。

① o-xy 座標系において、重心$G(x_G, y_G)$を求める。

② G-XY 座標系において、X, Y 軸に関する断面 2 次モーメントI_X, I_Yおよび断面相乗モーメントI_{XY}を求める。

その際には、次のような関係を用いる。

$$x_G = \frac{G_y}{A} \qquad y_G = \frac{G_x}{A}$$

ここに、A：断面積, x_G, y_G：重心の x, y 座標

G_x, G_y：x, y 軸に関する断面 1 次モーメント

$$I_X = I_x + A \cdot y_G^2 \qquad I_Y = I_y + A \cdot x_G^2 \qquad I_{XY} = I_{xy} + A \cdot x_G \cdot y_G$$

ここに、A：断面積, x_G, y_G：X, Y 軸の o-yz 座標系における x, y 座標

I_x, I_y, I_{xy}：x, y 軸に関する断面 2 次モーメントおよび断面相乗モーメント

I_X, I_Y, I_{XY}：X, Y 軸に関する断面 2 次モーメントおよび断面相乗モーメント

以上を表にして計算を行うと、以下のようになる。

	各要素の断面積 A_i	各要素の重心位置 y_G^i	各要素の断面 1 次ﾓｰﾒﾝﾄ $G_x^i = A_i \cdot y_G^i$	各要素重心と全体重心の偏心による断面 2 次ﾓｰﾒﾝﾄ $A_i \cdot \left(y_G^i - y_G\right)^2$	各要素の重心に関する断面 2 次ﾓｰﾒﾝﾄ $I_{x_G}^i$
PL. I	2×14=28	$2+\dfrac{14}{2}=9$	28×9=252	$28\cdot\left(9-\dfrac{69}{13}\right)^2 \cong 381.73$	$\dfrac{2\cdot 14^3}{12} \cong 457.33$
PL. II	12×2=24	$\dfrac{2}{2}=1$	24×1=24	$24\cdot\left(1-\dfrac{69}{13}\right)^2 \cong 445.35$	$\dfrac{12\cdot 2^3}{12}=8$
合計	*A*=52		G_x=276	$A\cdot\left(y_G\right)^2 \cong 827.08$	$I_{x_G} \cong 465.33$

$y_G = \dfrac{G_x}{A} = \dfrac{276}{52} = \dfrac{69}{13} \cong 5.31(cm)$ $\qquad$ $I_Z = I_{z_G} + A\cdot\left(y_G\right)^2 \cong 465.33+827.08 = 1292.41\left(cm^4\right)$

	各要素の断面積 A_i	各要素の重心位置 z_G^i	各要素の断面 1 次ﾓｰﾒﾝﾄ $G_y^i = A_i \cdot x_G^i$	各要素重心と全体重心の偏心による断面 2 次ﾓｰﾒﾝﾄ $A_i \cdot \left(x_G^i - x_G\right)^2$	各要素の重心に関する断面 2 次ﾓｰﾒﾝﾄ $I_{y_G}^i$
PL. I	28	$\dfrac{2}{2}=1$	28×1=28	$28\cdot\left(1-\dfrac{43}{13}\right)^2 \cong 149.11$	$\dfrac{14\cdot 2^3}{12} \cong 9.33$
PL. II	24	$\dfrac{12}{2}=6$	24×6=144	$24\cdot\left(6-\dfrac{43}{13}\right)^2 \cong 173.96$	$\dfrac{2\cdot 12^3}{12}=288$
合計	*A*=52		G_y=172	$A\cdot\left(x_G\right)^2 \cong 323.08$	$I_{y_G} \cong 297.33$

$x_G = \dfrac{G_y}{A} = \dfrac{176}{52} = \dfrac{43}{13} \cong 3.31\ (cm)$ $\qquad$ $I_Y = I_{y_G} + A\cdot\left(x_G\right)^2 \cong 323.08+297.33 = 620.41\left(cm^4\right)$

	各要素の断面積 A_i	各要素の重心位置 y_G^i	各要素の重心位置 x_G^i	各要素重心と全体重心の偏心による断面相乗ﾓｰﾒﾝﾄ $A_i\cdot\left(y_G^i-y_G\right)\cdot\left(x_G^i-x_G\right)$	各要素の重心に関する断面相乗ﾓｰﾒﾝﾄ $I_{x_G y_G}^i$
PL. I	28	9	1	$28\cdot\left(9-\dfrac{69}{13}\right)\cdot\left(1-\dfrac{43}{13}\right)$ $\cong -238.58$	0 (各要素は、要素重心に関して点対称だから)
PL. II	24	1	6	$12\cdot\left(1-\dfrac{69}{13}\right)\cdot\left(6-\dfrac{43}{13}\right)^2$ $\cong -278.34$	0 (各要素は、要素重心に関して点対称だから)
合計	*A*=52			$A\cdot\left(y_G\right)\cdot\left(x_G\right) \cong -516.92$	$I_{x_G y_G}$=0

$$I_{XY} = I_{x_G y_G} + A\cdot\left(y_G\right)\cdot\left(x_G\right) \cong 0 + (-516.92) = -516.92\ \left(cm^4\right)$$

以上をまとめると、

$\boxed{y_G = \dfrac{69}{13} \cong 5.31(cm)}$ $\qquad$ $\boxed{x_G = \dfrac{43}{13} \cong 3.31(cm)}$

$\boxed{I_X = 1292.41\left(cm^4\right)}$ $\qquad$ $\boxed{I_Y = 620.41\left(cm^4\right)}$ $\qquad$ $\boxed{I_{YZ} = -516.92\ \left(cm^4\right)}$

(5) 主軸 ξ, η の方向 θ は、$\theta = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{2I_{XY}}{I_Y - I_X}$ で表されるから、

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-2\times 516.92}{620.41-1292.41}\right) \cong \frac{1}{2}\tan^{-1}(1.538462) = 0.494210553(radian) = 28.48807\,(°)$$

$$\therefore \boxed{\theta \cong 28.5(°)}$$

(6) 主断面２次モーメント I_1, I_2 は、$\left.\begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(I_X + I_Y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_X - I_Y\right)^2 + 4I_{XY}^2}$ で表されるから、

$$\left.\begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(1292.41 + 620.41) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1292.41 - 620.41)^2 + 4\times(-516.92)^2}$$

$$= 956.41 \pm 616.53$$

$$= \begin{cases} 1572.94 \\ 339.88 \end{cases} \left(cm^4\right)$$

$$\therefore \boxed{\begin{cases} I_1 = 1572.94 \\ I_2 = 339.88 \end{cases} \left(cm^4\right)}$$

【check】

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \qquad \cdots\cdots\cdots(14)$$

$$I_\eta = \int_A \xi^2 dA = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \qquad \cdots\cdots\cdots(15)$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA = \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \qquad \cdots\cdots\cdots(16)$$

上記の式に、$I_X = 1292.41\left(cm^4\right)$, $I_Y = 620.41\left(cm^4\right)$, $I_{YZ} = -516.92\ \left(cm^4\right)$, $\theta \cong 28.5\left(°\right)$ を代入すると、

$$I_\xi \cong \frac{1}{2}(1292.41 + 620.41) + \frac{1}{2}(1292.41 - 620.41)\cos(2\times 28.5) - (-516.92)\sin(2\times 28.5)$$

$$\cong 956.41 + 182.99 + 433.52 \cong 1572.92$$

$$I_\eta \cong \frac{1}{2}(1292.41 + 620.41) - \frac{1}{2}(1292.41 - 620.41)\cos(2\times 28.5) + (-516.92)\sin(2\times 28.5)$$

$$\cong 956.41 - 182.99 - 433.52 \cong 339.90$$

$$I_{\xi\eta} \cong \frac{1}{2}(1292.41 - 620.41)\sin(2\times 28.5) + (-516.92)\cos(2\times 28.5)$$

$$\cong 281.29 - 281.54 \cong -0.25$$

となり、正確には、$I_\xi = I_1$, $I_\eta = I_2$, $I_{\xi\eta} = 0$ となる。

これより、軸 ξ が〝強軸〟, 軸 η が〝弱軸〟であることがわかる。

【問題 EL-HCL-3】右図に示すような変断面片持ばりの先端 B 点に集中荷重 P，C 点に集中曲げモーメント $M_0=\dfrac{1}{2}P\ell$ が作用するとき、以下の設問に答えよ。

ただし、はりの曲げ剛性は、A～C 間が $2EI$，C～B 間が EI とする。

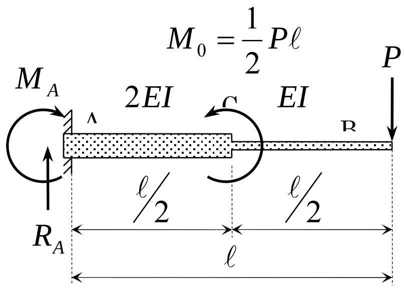
(1) 支点反力 R_A と支点曲げモーメント M_A を求めよ。

(2) せん断力図（Q－図）と曲げモーメント図（M－図）を図示せよ。

(3) 〝弾性荷重〟を載荷した〝共役ばり〟を図示せよ。

(4) B 点のたわみ y_B とたわみ角 θ_B を求めよ。

(5) C 点のたわみ y_C とたわみ角 θ_C を求めよ。



【解答】

(1) 支点反力 R_A と支点曲げモーメント M_A を求める。

鉛直方向の力の釣合から、 $R_A=P$

A 点回りのモーメントの釣合から、

$$M_A+P\cdot\ell=M_0=\frac{1}{2}P\ell$$

$$\therefore \boxed{R_A=P},\quad \boxed{M_A=-\frac{1}{2}P\ell}$$

(2) せん断力図（Q－図）と曲げモーメント図（M－図）を図示すると、右図のようになる。

(3) 〝弾性荷重〟を載荷した〝共役ばり〟を図示すると、右図のようになる。

(4) B 点のたわみ y_B とたわみ角 θ_B を求めるために、〝弾性荷重〟を載荷した〝共役ばり〟の B 点の支点反力 $\widetilde{R}_B$ と支点曲げモーメント $\widetilde{M}_B$ を求める。

鉛直方向の力の釣合から、

$$\tilde{R}_B=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\ell}{2}+\frac{1}{2}\cdot2\alpha\cdot\frac{\ell}{2}$$

$$\therefore \tilde{R}_B=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\alpha\,\ell=\frac{3}{4}\alpha\,\ell=-\frac{3}{16}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}=-\theta_B$$

B 点回りのモーメントの釣合から、

$$\tilde{M}_B+\left(\frac{1}{2}\cdot2\alpha\cdot\frac{\ell}{2}\right)\cdot\left(\frac{\ell}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\ell}{2}\right)\cdot\left(\frac{\ell}{2}+\frac{\ell}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)=0$$

$$\therefore \tilde{M}_B+\frac{1}{6}\alpha\,\ell^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\alpha\,\ell^2=0$$

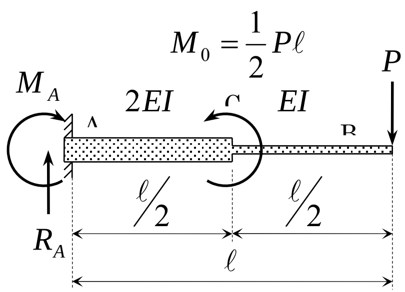
$$\tilde{M}_B=-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{24}\right)\cdot\alpha\,\ell^2=-\frac{3}{8}\alpha\,\ell^2$$

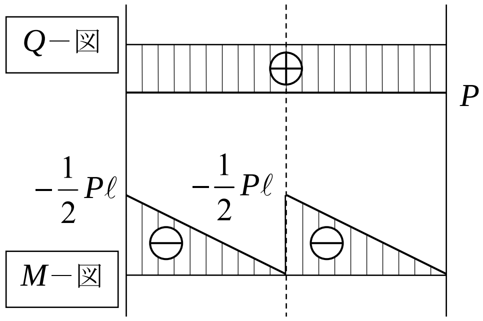
$\therefore$

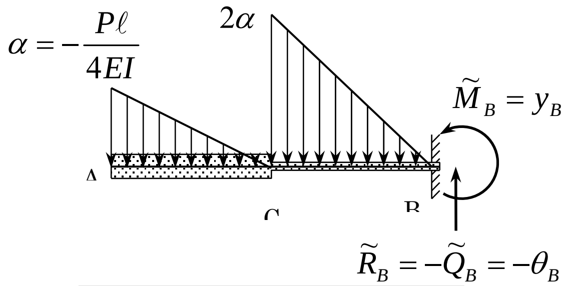
$$=\frac{3}{32}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}=y_B$$

したがって、 $\boxed{\theta_B=\dfrac{3}{16}\cdot\dfrac{P\ell^2}{EI}}$, $\boxed{y_B=\dfrac{3}{32}\cdot\dfrac{P\ell^3}{EI}}$

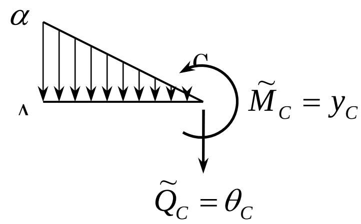
(5) 右最下図のように考えて、C 点のたわみ y_C とたわみ角 θ_C を求める。







弾性荷重を載荷した共役ばり



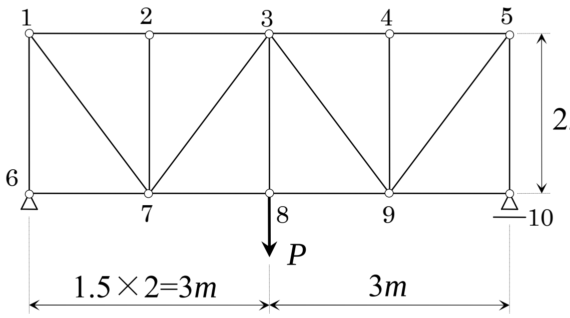
鉛直方向の力の釣合から、$\tilde{Q}_C + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\ell}{2} = 0$ $\therefore \tilde{Q}_C = -\frac{1}{4} \alpha \ell = \frac{1}{16} \cdot \frac{P\ell^2}{EI} = \theta_C$

C 点回りのモーメントの釣合から、$\tilde{M}_C + \left(\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\ell}{2}\right) \cdot \left(\frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = 0$ $\therefore \tilde{M}_C = -\frac{1}{12} \alpha \ell^2 = \frac{1}{48} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} = y_C$

したがって、$\boxed{\theta_C = \frac{1}{16} \cdot \frac{P\ell^2}{EI}}$, $\boxed{y_C = \frac{1}{48} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}}$

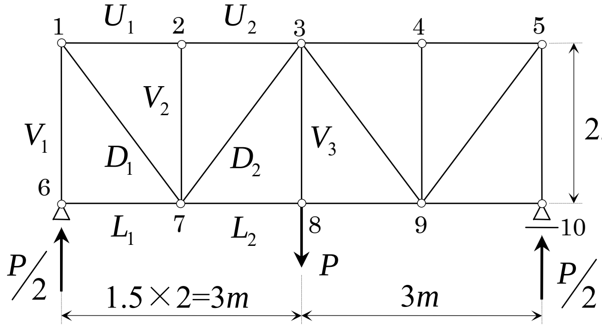
構造力学演習Ⅱ（2017-Report №.４）　　　　　　　　2017/10/03 出題

【問題 CM-BT-3】下図のトラスは、直径（外径）$50mm$，肉厚 $2mm$ の鋼管で作られている。漸次増加する荷重 P が何 $tonf$ に達したとき、どの部材が座屈するか。
ただし、鋼のヤング率 $E = 2.1 \times 10^6\ kgf/cm^2$ とする。



【解答】

右図のように、トラス構造と荷重の対称性より、部材力 U_1，U_2，V_1，V_2，V_3，D_1，D_2，L_1，L_2 を求めて、最大圧縮力とそれが作用する部材を調べる。
部材力の算定には、〝節点法〟を用いる。



点６での釣合から、$V_1 = -\dfrac{P}{2}$　　　$L_1 = 0$

点１での釣合から、

$$V_1 + \frac{4}{5}D_1 = 0 \qquad \therefore D_1 = -\frac{5}{4}V_1 = \frac{5}{8}P$$

$$U_1 + \frac{3}{5}D_1 = 0 \qquad \therefore U_1 = -\frac{3}{5}D_1 = -\frac{3}{8}P$$

点２での釣合から、$U_2 = U_1 = -\dfrac{3}{8}P$　　　$V_2 = 0$

点７での釣合から、

$$V_2 + \frac{4}{5}\left(D_1 + D_2\right) = 0 \qquad \therefore D_2 = -D_1 = -\frac{5}{8}P$$

$$L_1 + \frac{3}{5}D_1 = L_2 + \frac{3}{5}D_2 \qquad \therefore L_2 = L_1 + \frac{3}{5}\left(D_1 - D_2\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{8}P + \frac{5}{8}P\right) = \frac{3}{4}P$$

点８での釣合から、$V_3 = P$

座屈は、圧縮力が作用する部材 3-7 または部材 1-2（2-3）または部材 1-6 で発生する可能性がある。しかし、部材 3-7 は、部材 1-2（2-3）や部材 1-6 よりも長く、かつ、その部材力（圧縮）が大きい。

よって、座屈は、部材 3-7 または部材 3-9 で発生し、その部材力は $-\dfrac{5}{8}P$ である。

したがって、座屈荷重 P_{CR} は、次のようになる。

$$\frac{5}{8}P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 \times 2.1 \times 10^6 \times \dfrac{\pi \cdot \left(5^4 - 4.6^4\right)}{64}}{\left(250\right)^2}$$

$$\boxed{\therefore P_{CR} = \frac{\pi^3 \times 2.1 \times 10^6 \times \left(5^4 - 4.6^4\right) \times 8}{5 \times 250^2 \times 64} = 4616.639135\cdots\left(kgf\right) \cong 4.62\left(tonf\right)}$$

【問題 EL-OB-2】右下図に示すような“張出ばり”の D 点に集中荷重 P が作用するとき、

(1) せん断力図（Q-図），曲げモーメント図（M-図）を図示せよ。

(2) 〝弾性荷重〟が載荷された〝共役ばり〟を図示せよ。

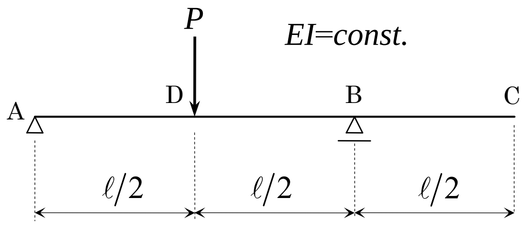
(3) 次のたわみ角とたわみを求めよ。

① A 点のたわみ角 θ_A と B 点のたわみ角 θ_B

② C 点のたわみ角 θ_C とたわみ v_C

③ D 点のたわみ v_D

ただし、はりの曲げ剛性は EI で一定とする。



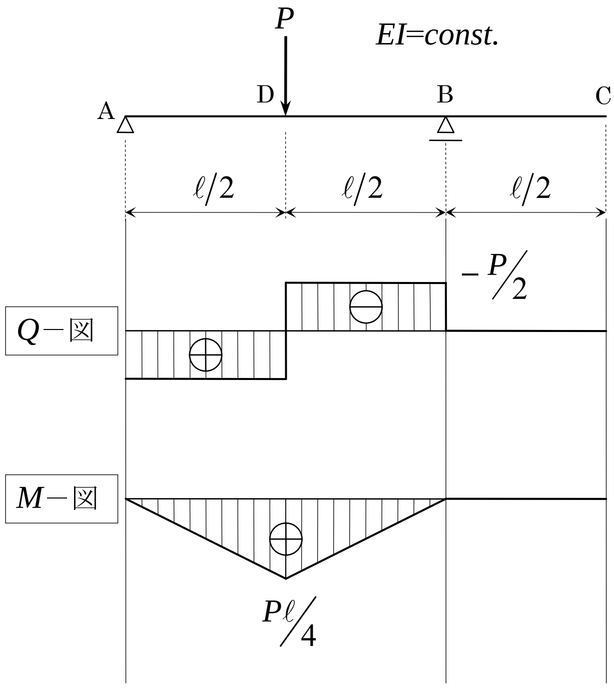
【解答】

(1) 支点反力を R_A，R_B とすると、

$$R_A + R_B = P \qquad R_B \cdot \ell = P \cdot \frac{\ell}{2}$$

$$\therefore R_B = \frac{1}{2}P = R_A$$

これより、断面力図は、右図のようになる。



(2) 次に、〝弾性荷重〟（＝曲げモーメント／曲げ剛性）を求めると、

$$\alpha = \frac{P\ell}{4EI}$$

また、「張出ばり」の〝共役ばり〟を考えると、

A 点…回転支点　→　回転支点

$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} = 0 \\ \tilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$

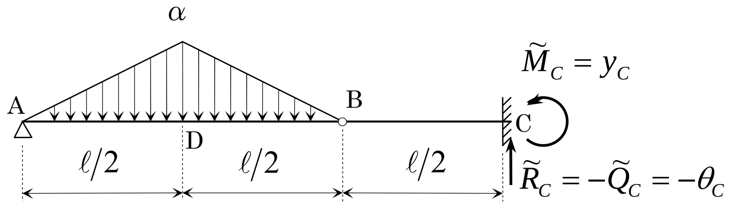
B 点…移動支点　→　ヒンジ

$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta_\ell = \theta_r \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} = 0 \\ \tilde{Q}_\ell = \tilde{Q}_r \end{pmatrix}$$

C 点…自由端　→　固定端

$$\begin{pmatrix} y \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} \neq 0 \\ \tilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$

となるから、〝弾性荷重〟を載荷した〝共役ばり〟は、右図のようになる。



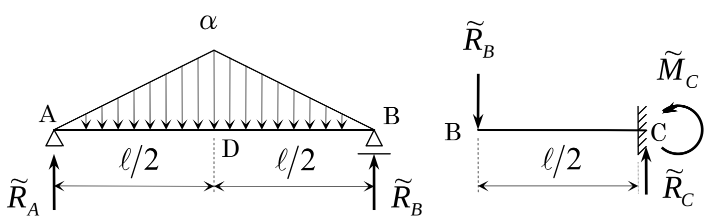
(3) これを下図のように「単純ばり」と「片持ばり」に分解して考える。

このとき、支点反力 $\tilde{R}_A$，$\tilde{R}_B$，$\tilde{R}_C$，$\tilde{M}_C$ は、「単純ばり」部分と「片持ばり」部分での釣合条件から次のように求まる。

「単純ばり」部分より、

$$\tilde{R}_A + \tilde{R}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad \tilde{R}_B \cdot \ell = \frac{1}{2}\alpha\ell \cdot \frac{1}{2}\ell$$

$$\therefore \tilde{R}_B = \frac{1}{4}\alpha\ell = \tilde{R}_A$$



「片持ばり」部分より、

$$\tilde{R}_C = \tilde{R}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad \tilde{M}_C + \tilde{R}_B \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \qquad \therefore \tilde{M}_C = \frac{1}{4}\alpha\ell \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{8}\alpha\ell^2$$

① A 点のたわみ角 θ_A と B 点のたわみ角 θ_B

$$\theta_A = \tilde{R}_A = \frac{1}{4}\alpha\ell = \frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^2}{EI} \qquad \theta_B = \tilde{Q}_B = -\tilde{R}_B = -\frac{1}{4}\alpha\ell = -\frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}$$

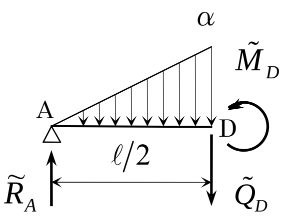
$$\therefore \boxed{\theta_A = \frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}},\ \boxed{\theta_B = -\frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}}$$

② C 点のたわみ角 θ_C とたわみ v_C

$$\theta_C = \tilde{Q}_C = -\tilde{R}_C = -\frac{1}{4}\alpha\ell = -\frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^2}{EI} \qquad v_C = \tilde{M}_C = -\frac{1}{8}\alpha\ell^2 = -\frac{1}{32}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore \boxed{\theta_C = -\frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}},\ \boxed{v_C = -\frac{1}{32}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

③ D 点のたわみ v_D

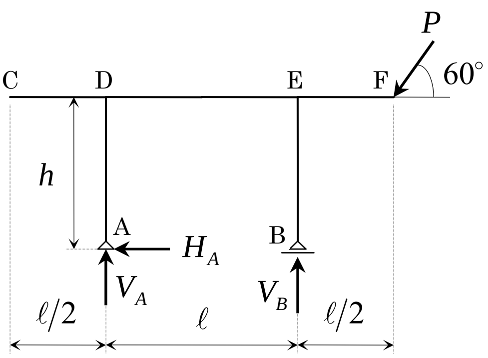


$$\tilde{Q}_D + \frac{1}{2}\alpha\frac{1}{2}\ell = \tilde{R}_A \quad \therefore \tilde{Q}_D = \tilde{R}_A - \frac{1}{4}\alpha\ell = \frac{1}{4}\alpha\ell - \frac{1}{4}\alpha\ell = 0 \quad \therefore \theta_D = \tilde{Q}_D = 0$$

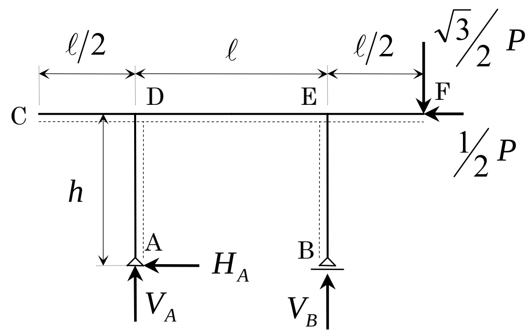
$$\tilde{M}_D + \frac{1}{4}\alpha\ell\times\frac{1}{3}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \tilde{R}_A\frac{\ell}{2} \quad \therefore \tilde{M}_D = \frac{1}{4}\alpha\ell\cdot\frac{\ell}{2} - \frac{1}{24}\alpha\ell^2 = \frac{3-1}{24}\alpha\ell^2 = \frac{1}{12}\alpha\ell^2$$

$$v_D = \tilde{M}_D = \frac{1}{12}\alpha\ell^2 = \frac{1}{48}\cdot\frac{P\ell^3}{EI} \qquad \therefore \boxed{v_D = \frac{1}{48}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

【問題 SF-R-2】下図に示す静定ラーメンの断面力図、すなわち、軸方向力図（N－図），せん断力図（Q－図），曲げモーメント図（M－図）を図示せよ。



【解答】



荷重 P を鉛直方向と水平方向に分解すると、

鉛直荷重　　$P\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}P$

水平荷重　　$P\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}P$

となり、右図のようになる。

このとき、支点反力 V_A，H_A，V_B を剛体の釣合条件より求めると、次のようになる。

水平方向の力の釣合から、　$H_A + \dfrac{1}{2}P = 0 \quad \therefore H_A = -\dfrac{1}{2}P$

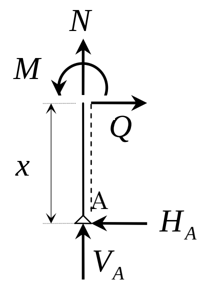
鉛直方向の力の釣合から、　$V_A + V_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}P$

A 点回りのモーメントの釣合から、　$V_B \cdot \ell + \dfrac{1}{2}P \cdot h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}P \cdot \left(\ell + \dfrac{\ell}{2}\right)$

$$\therefore V_B = \frac{3\sqrt{3}}{4}P - \frac{1}{2}P \cdot \frac{h}{\ell} = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{\ell}\right) \qquad \therefore V_A = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

これらを用いて、部材 AD，BE，CD，DE，EF 毎に断面力 N，Q，M を求めて行く。

部材 AD について、

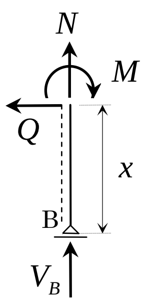


$$N + V_A = 0 \qquad \therefore N = -V_A = -\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Q = H_A = -\frac{1}{2}P$$

$$M = H_A x = -\frac{1}{2}Px$$

部材 BE について、



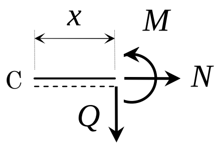
$$N + V_B = 0 \qquad \therefore N = -V_B = -\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{\ell}\right)$$

$$Q = 0$$

$$M = 0$$

部材 CD について、

$$N = Q = M = 0$$

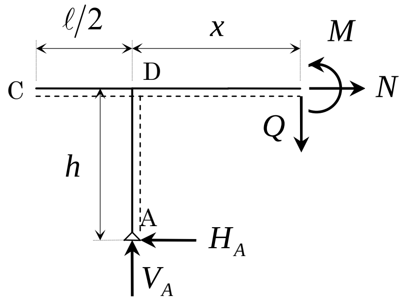


部材 DE について、

$$N = H_A = -\frac{1}{2}P$$

$$Q = V_A = \frac{P}{2}\cdot\left(\frac{h}{\ell}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$M = V_A x + H_A h = \frac{P}{2}\cdot\left(\frac{h}{\ell}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot x - \frac{1}{2}Ph$$

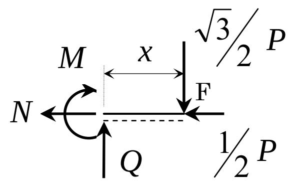


部材 EF について、

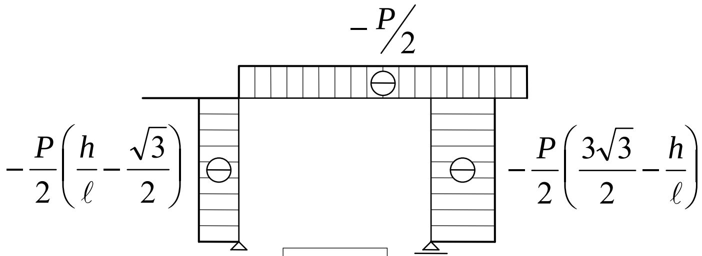
$$N + \frac{1}{2}P = 0 \qquad \therefore N = -\frac{1}{2}P$$

$$Q = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

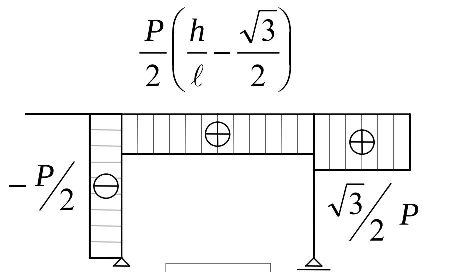
$$M + \frac{\sqrt{3}}{2}Px = 0 \qquad \therefore M = -\frac{\sqrt{3}}{2}Px$$



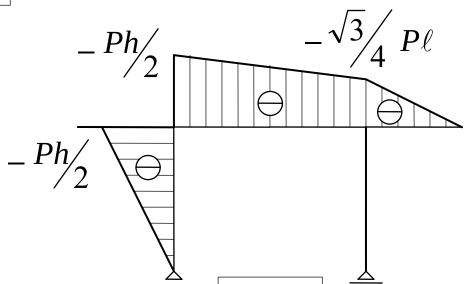
以上をまとめて、断面力図を図示すると下図のようになる。



N－図



Q－図



M－図

構造力学演習Ⅱ（2017-Report №.５）

2017/10/10 出題

【問１】右図に示すような片持ばりに等分布荷重qとB点に集中モーメントM_0が作用するとき、

(1) たわみ：$y\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

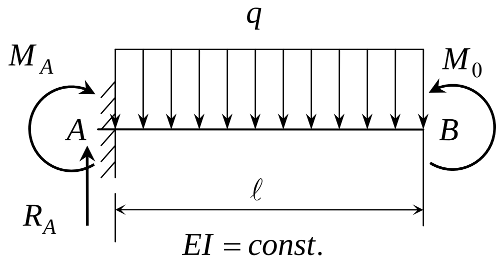
(2) たわみ角：$\theta\left(\dfrac{x}{\ell}\right)=y'\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

の式を求めよ。また、

(3) B点のたわみy_Bとたわみ角θ_Bを求めよ。

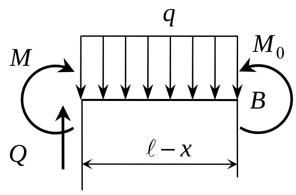
(4) $y_B=0$となるM_0を求め、そのときのたわみ角θ'_Bを求めよ。

ただし、はりの曲げ剛性は、EIで一定とする。



【解答】

《解法Ⅰ》右図にように考えて曲げモーメントを求め、$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$の式から求める方法



(1)(2) モーメントの釣合から、$M+q(\ell-x)\cdot\dfrac{\ell-x}{2}=M_0$

はりのたわみと曲げモーメントの関係式$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$にこれを用いると、

$$EIy''=-M=\frac{1}{2}q(\ell-x)^2-M_0$$

これを逐次積分すると、

$$EIy'=-\frac{1}{6}q(\ell-x)^3-M_0x+C_1$$

$$EIy=\frac{1}{24}q(\ell-x)^4-M_0\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$

これに以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1, C_2を求める。

1) $x=0$のとき、$\theta=y'=0$より、 $-\dfrac{1}{6}q\ell^3+C_1=0$ $\qquad\therefore C_1=\dfrac{1}{6}q\ell^3$

2) $x=0$のとき、$y=0$より、 $\dfrac{1}{24}q\ell^4+C_2=0$ $\qquad\therefore C_2=-\dfrac{1}{24}q\ell^4$

よって、はりのたわみ角$\theta(x)$とたわみ$y(x)$の式は、次のようになる。

$$EIy'=-\frac{1}{6}q(\ell-x)^3-M_0x+\frac{1}{6}q\ell^3$$

$$EIy=\frac{1}{24}q(\ell-x)^4-M_0\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}q\ell^3x-\frac{1}{24}q\ell^4$$

これを等分布荷重の式と集中モーメントの式に分けて表すと、次のようになる。

$$EIy'=\left\{\frac{1}{6}q\ell^3-\frac{1}{6}q(\ell-x)^3\right\}-M_0x$$

$$EIy=\left\{\frac{1}{24}q(\ell-x)^4+\frac{1}{6}q\ell^3x-\frac{1}{24}q\ell^4\right\}-M_0\frac{x^2}{2}$$

これをさらに$\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$の形で表すと、次のようになる。

$$EIy' = q\ell^3\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}^3\right]-M_0x$$

$$EIy = q\ell^4\left[\frac{1}{24}\left\{1-\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}^4+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)-\frac{1}{24}\right]-M_0\frac{x^2}{2}$$

よって、はりのたわみ角$\theta\left(\frac{x}{\ell}\right)$とたわみ$y\left(\frac{x}{\ell}\right)$の式は、次のようになる。

$$\boxed{\theta\left(\frac{x}{\ell}\right)=\frac{q\ell^3}{EI}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}^3\right]-\frac{M_0\ell}{EI}\left(\frac{x}{\ell}\right)}$$

$$\boxed{y\left(\frac{x}{\ell}\right)=\frac{q\ell^4}{EI}\left[\frac{1}{24}\left\{1-\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}^4+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)-\frac{1}{24}\right]-\frac{M_0\ell^2}{2EI}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2}$$

(3) B 点のたわみy_Bとたわみ角θ_Bは、次のようになる。

$$\boxed{\theta_B=\theta(1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{q\ell^3}{EI}-\frac{M_0\ell}{EI}}$$

$$\boxed{y_B=y(1)=\frac{q\ell^4}{EI}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right]-\frac{M_0\ell^2}{2EI}=\frac{1}{8}\cdot\frac{q\ell^4}{EI}-\frac{M_0\ell^2}{2EI}}$$

(4) B 点のたわみ$y_B=0$となるのは、

$$y_B=\frac{1}{8}\cdot\frac{q\ell^4}{EI}-\frac{M_0\ell^2}{2EI}=0 \qquad \therefore\boxed{M_0=\frac{1}{4}\cdot q\ell^2}$$

このときのたわみ角θ_B'は、次のようになる。

$$\theta_B'=\frac{1}{6}\cdot\frac{q\ell^3}{EI}-\frac{1}{4}\cdot\frac{q\ell^3}{EI}=\frac{2-3}{12}\cdot\frac{q\ell^3}{EI}=-\frac{1}{12}\cdot\frac{q\ell^3}{EI} \qquad \therefore\boxed{\theta_B'=-\frac{1}{12}\cdot\frac{q\ell^3}{EI}}$$

《別解》

$$EIy''=-M=\frac{1}{2}q(\ell-x)^2-M_0=\frac{1}{2}q\ell^2-q\ell x+\frac{1}{2}qx^2-M_0$$

これを逐次積分すると、

$$EIy'=\frac{1}{2}q\ell^2x-\frac{1}{2}q\ell x^2+\frac{1}{6}qx^3-M_0x+C_1$$

$$EIy=\frac{1}{4}q\ell^2x^2-\frac{1}{6}q\ell x^3+\frac{1}{24}qx^4-M_0\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$

これに以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1, C_2を求める。

1) $x=0$のとき、$\theta=y'=0$より、 $C_1=0$

2) $x=0$のとき、$y=0$より、 $C_2=0$

よって、はりのたわみ角$\theta(x)$とたわみ$y(x)$の式は、次のようになる。

$$EIy'=\frac{1}{2}q\ell^2x-\frac{1}{2}q\ell x^2+\frac{1}{6}qx^3-M_0x$$

$$EIy=\frac{1}{4}q\ell^2x^2-\frac{1}{6}q\ell x^3+\frac{1}{24}qx^4-M_0\frac{x^2}{2}$$

これを$\left(\frac{x}{\ell}\right)$の形で表すと、次のようになる。

$$EIy' = q\ell^3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right]-M_0 x$$

$$EIy = q\ell^4\left[\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\frac{1}{24}\left(\frac{x}{\ell}\right)^4\right]-M_0\frac{x^2}{2}$$

よって、はりのたわみ角$\theta\left(\frac{x}{\ell}\right)$とたわみ$y\left(\frac{x}{\ell}\right)$の式は、次のようになる。

$$\boxed{\theta\left(\frac{x}{\ell}\right)=\frac{q\ell^3}{EI}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right]-\frac{M_0\ell}{EI}\left(\frac{x}{\ell}\right)}$$

$$\boxed{y\left(\frac{x}{\ell}\right)=\frac{q\ell^4}{EI}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\frac{1}{24}\left(\frac{x}{\ell}\right)^4\right]-\frac{M_0\ell^2}{2EI}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2}$$

(3) B 点のたわみy_Bとたわみ角θ_Bは、次のようになる。

$$\boxed{\theta_B=\theta(1)=\frac{q\ell^3}{EI}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right]-\frac{M_0\ell}{EI}=\frac{1}{6}\cdot\frac{q\ell^3}{EI}-\frac{M_0\ell}{EI}}$$

$$\boxed{y_B=y(1)=\frac{q\ell^4}{EI}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right]-\frac{M_0\ell^2}{2EI}=\frac{6-4+1}{24}\cdot\frac{q\ell^4}{EI}-\frac{M_0\ell^2}{2EI}=\frac{1}{8}\cdot\frac{q\ell^4}{EI}-\frac{M_0\ell^2}{2EI}}$$

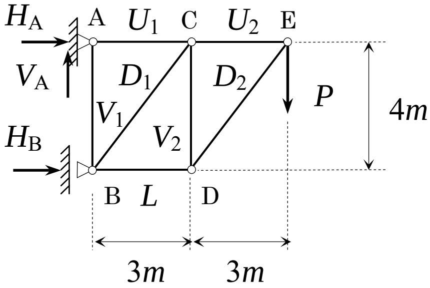
【問２】下図－Aに示す静定トラスについて、次の設問に答えよ。

(1) 支点反力 H_{A}，V_{A}，H_{B} を求めよ。

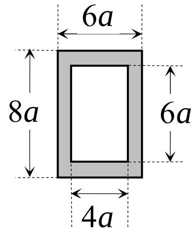
(2) すべての部材力 U_1，U_2，D_1，D_2，V_1，V_2，L を求めよ。

(3) 荷重 P を漸次増加するとき、最初に座屈を起こす荷重 P_{CR} とその部材を求めよ。

なお、各部材は、ヤング係数 E で、その断面は下図－Bに示すような中空長方形断面とする。



図－A



図－B

【解答】

(1) 水平方向の力の釣合から、$H_A + H_B = 0$

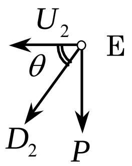
鉛直方向の力の釣合から、$V_A = P$

A 点回りのモーメントの釣り合いから、$H_B \times 4m = P \times 6m \quad \therefore H_B = \dfrac{3}{2}P$ また、$H_A = -\dfrac{3}{2}P$

以上をまとめると、$\boxed{H_A = -\dfrac{3}{2}P}$, $\boxed{V_A = P}$, $\boxed{H_B = \dfrac{3}{2}P}$

(2) 〝節点法〟を用いて、各部材力を求めると、次のようになる。

①E 点について、$\sin\theta = \dfrac{4}{5}, \cos\theta = \dfrac{3}{5}$ だから、

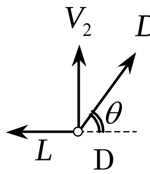


鉛直方向の力の釣合から、$P + D_2 \sin\theta = 0 \qquad \therefore D_2 = -\dfrac{P}{\sin\theta} = -\dfrac{5}{4}P$

水平方向の力の釣合から、$U_2 + D_2 \cos\theta = 0$

$$\therefore U_2 = -D_2 \cos\theta = \frac{5}{4}P \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{4}P$$

②D 点について、



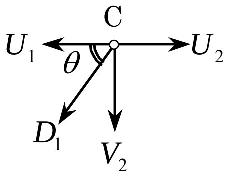
鉛直方向の力の釣合から、$D_2 \sin\theta + V_2 = 0$

$$\therefore V_2 = -D_2 \sin\theta = \frac{5}{4}P \cdot \frac{4}{5} = P$$

水平方向の力の釣合から、$L = D_2 \cos\theta$

$$\therefore L = D_2 \cos\theta = -\frac{5}{4}P \cdot \frac{3}{5} = -\frac{3}{4}P$$

③C 点について、

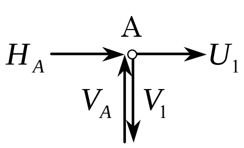


鉛直方向の力の釣合から、$D_1 \sin\theta + V_2 = 0 \qquad \therefore D_1 = -\dfrac{V_2}{\sin\theta} = -\dfrac{5}{4}P$

水平方向の力の釣合から、$U_1 + D_1 \cos\theta = U_2$

$$\therefore U_1 = U_2 - D_1 \cos\theta = \frac{3}{4}P - \left(-\frac{5}{4}P\right) \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{4}P + \frac{3}{4}P = \frac{3}{2}P$$

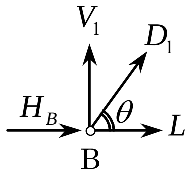
④A 点について、



鉛直方向の力の釣合から、$V_1 = V_A = P$

水平方向の力の釣合から、$U_1 + H_A = \dfrac{3}{2}P - \dfrac{3}{2}P = 0$ (check O.K.)

⑤B 点について、



鉛直方向の力の釣合から、

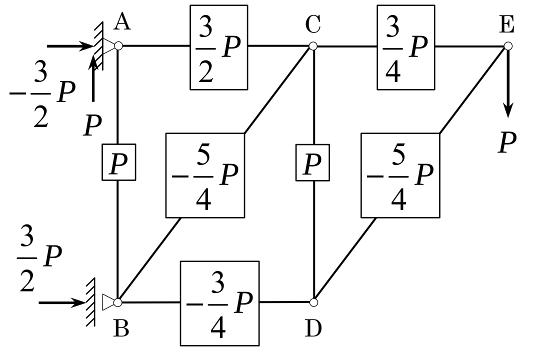
$$V_1 + D_1 \sin\theta = P - \frac{5}{4}P \cdot \frac{4}{5} = 0 \quad \text{(check O.K.)}$$

水平方向の力の釣合から、

$$H_B + L + D_1 \cos\theta = \frac{3}{2}P - \frac{3}{4}P - \frac{5}{4}P \cdot \frac{3}{5} = 0 \quad \text{(check O.K.)}$$

以上をまとめると、

$$\boxed{U_1 = \frac{3}{2}P},\ \boxed{U_2 = \frac{3}{4}P},\ \boxed{D_1 = D_2 = -\frac{5}{4}P},\ \boxed{V_1 = V_2 = P},\ \boxed{L = -\frac{3}{4}P}$$



(3) 荷重 P を漸次増加するとき、最初に座屈を起こす荷重 P_{CR} とその部材を求める。

まず、圧縮力が作用する部材は、BC(D_1), DE(D_2), BD(L)の 3 部材であり、部材長 BC=DE かつ D_1= D_2 であるから、部材 BC(D_1)と DE(D_2), 部材 BD(L)の 2 種類の部材について、座屈を起こす荷重 P_{CR} を比較して小さい方が最初に座屈することになる。

ここで、両端回転支持の場合の最小座屈荷重は、$\dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2}$ で表される。

ここに、ℓ ：部材長, I ：弱軸に関する断面 2 次モーメントである。

2 種類の部材の座屈を起こす荷重 P_{CR} は、次のようになる。

①部材 BC(D_1)と DE(D_2)の座屈を起こす荷重 P_{CR}^D について

$$\frac{5}{4}P_{CR}^D = \frac{\pi^2 EI}{5^2} \qquad \therefore P_{CR}^D = \frac{4}{5} \cdot \frac{\pi^2 EI}{5^2} = \frac{4}{125}\pi^2 EI$$

②部材 BD(L)の座屈を起こす荷重 P_{CR}^L について

$$\frac{3}{4}P_{CR}^L = \frac{\pi^2 EI}{4^2} \qquad \therefore P_{CR}^L = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2 EI}{4^2} = \frac{1}{12}\pi^2 EI$$

ここで、座屈を起こす荷重 P_{CR} を比較すると、次のようになる。

$$P_{CR}^D = \frac{4}{125}\pi^2 EI = \frac{48}{125 \cdot 12}\pi^2 EI < P_{CR}^L = \frac{1}{12}\pi^2 EI = \frac{125}{125 \cdot 12}\pi^2 EI \qquad \therefore P_{CR}^D < P_{CR}^L$$

したがって、$\boxed{\text{最初に座屈を起こす部材は、部材 BC}(D_1)\text{と DE}(D_2)}$ である。

次に、断面 2 次モーメント I は、弱軸に関する断面 2 次モーメントであるから、

$$I = \frac{8a \cdot (6a)^3}{12} - \frac{6a \cdot (4a)^3}{12} = 144a^4 - 32a^4 = 112a^4$$

よって、最初に座屈を起こす荷重 P_{CR} は、次のようになる。

$$P_{CR} = P_{CR}^D = \frac{4}{125}\pi^2 EI = \frac{4}{125}\pi^2 E \cdot 112a^4 = \frac{448}{125}\pi^2 Ea^4 \qquad \therefore \boxed{P_{CR} = \frac{448}{125}\pi^2 Ea^4}$$

【問３】下図に示す一辺の長さが r の正六角形断面の『断面の核』を以下の手順で求め、図示せよ。

なお、y, z 軸は、主軸である。

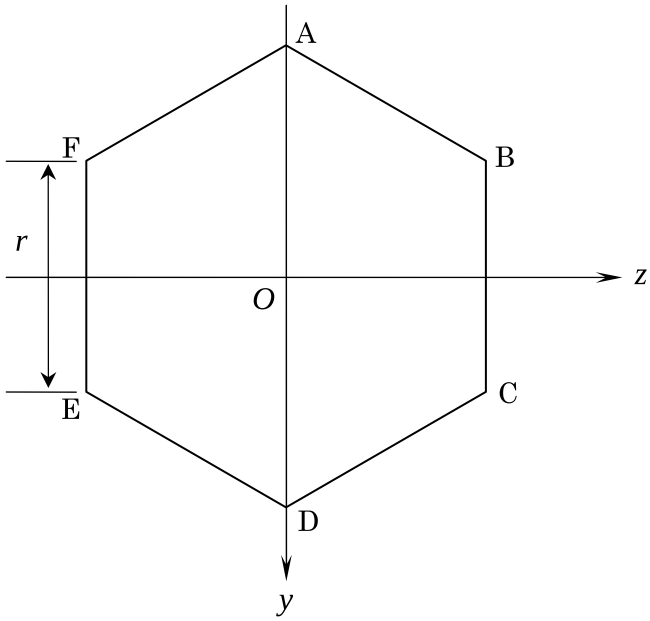
(1) 正六角形断面の面積 A を求めよ。

(2) 正六角形断面軸の y 軸と z 軸に関する断面２次モーメント I_y， I_z を求めよ。

(3) 直線 BC が中立軸になるときの荷重位置 $B'\left(e_y, e_z\right)$ を求めよ。

(4) 直線 AB が中立軸になるときの荷重位置 $A'\left(e_y, e_z\right)$ を求めよ。

(5) 『断面の核』を斜線で図示せよ。



【解答】

(1) 一辺の長さが r の正六角形断面の面積 A は、一辺の長さが r の正三角形の面積の 6 倍であるから、

$$A = 6 \times \left(\frac{1}{2} \cdot r \cdot r \sin 60^\circ \right) = 3r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2 \qquad \therefore \boxed{A = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2}$$

(2) 正六角形断面軸の y 軸と z 軸に関する断面２次モーメント I_y， I_z は次のようになる。

$$I_y = \frac{r \cdot \left(\sqrt{3}r\right)^3}{12} + \left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}r}{2} \right) \times \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}r}{2} \right)^2 + \frac{\frac{r}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}r}{2} \right)^3}{36} \right\} \times 4 = \frac{3\sqrt{3}r^4}{12} + \left\{ \frac{\sqrt{3}r^2}{2} \times \frac{r^2}{12} + \frac{3\sqrt{3}r^4}{144} \right\}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}r^4}{12} + \frac{\sqrt{3}r^4}{24} + \frac{\sqrt{3}r^4}{48} = \frac{12+2+1}{48}\sqrt{3}r^4 = \frac{15}{48}\sqrt{3}r^4 = \frac{5\sqrt{3}}{16} r^4$$

$$I_z = \frac{\sqrt{3}r \cdot r^3}{12} + \left\{ \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}r \cdot \frac{r}{2} \right) \times \left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}r \cdot \left(\frac{r}{2} \right)^3}{36} \right\} \times 2 = \frac{\sqrt{3}r^4}{12} + \left\{ \frac{\sqrt{3}r^2}{2} \times \left(\frac{2r}{3} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}r^4}{144} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}r^4}{12} + \frac{2\sqrt{3}r^4}{9} + \frac{\sqrt{3}r^4}{144} = \frac{12+2\cdot16+1}{144}\sqrt{3}r^4 = \frac{45}{144}\sqrt{3}r^4 = \frac{5\sqrt{3}}{16} r^4$$

$$\therefore \boxed{I_y = I_z = \frac{5\sqrt{3}}{16} r^4} \quad \Rightarrow \quad y \text{ 軸と } z \text{ 軸は主軸}$$

従って、正六角形断面軸の y 軸と z 軸に関する断面半径は、次のようになる。

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{16}r^4}{\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2} = \frac{5}{16}\cdot\frac{2}{3}r^2 = \frac{5}{24}r^2$$

(3) 直線 BC が中立軸になるときの荷重位置 $B'\left(e_y, e_z\right)$ を求める。

直線 BC の y 切片は $n_y = \infty$,　z 切片は $n_z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r$ だから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{5}{24}r^2}{\infty} = 0,\quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{5}{24}r^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} = -\frac{5}{24}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}r = -\frac{5\sqrt{3}}{36}r$$

$$\therefore \boxed{B'\left(e_y, e_z\right) = \left(0, -\frac{5\sqrt{3}}{36}r\right)}$$

(4) 直線 AB が中立軸になるときの荷重位置 $A'\left(e_y, e_z\right)$ を求める。

直線 AB の y 切片は $n_y = -r$,　z 切片は $n_z = \sqrt{3}r$ だから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{5}{24}r^2}{-r} = \frac{5}{24}r,\quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{5}{24}r^2}{\sqrt{3}r} = -\frac{5}{24}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}r = -\frac{5\sqrt{3}}{72}r$$

$$\therefore \boxed{A'\left(e_y, e_z\right) = \left(\frac{5}{24}r, -\frac{5\sqrt{3}}{72}r\right)}$$

(5)『断面の核』を図示すると、斜線部分のようになる。