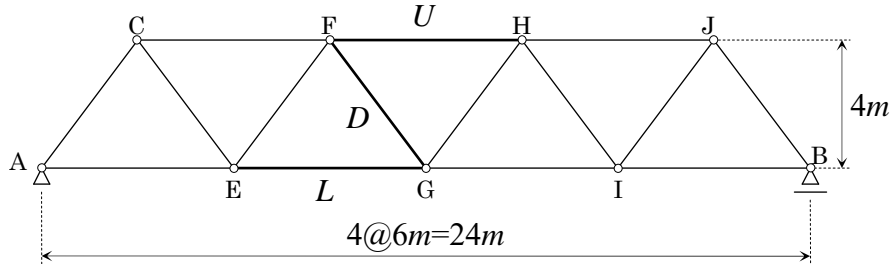


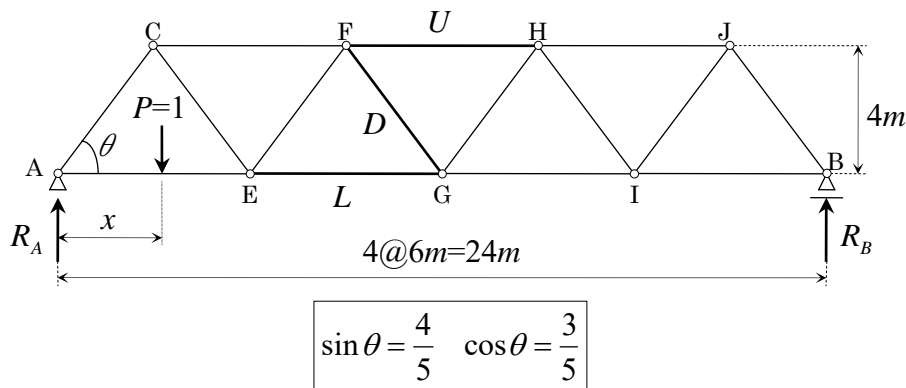
【問題Ⅱ-T-2】 下図に示すワーレントラスについて、

- a) 下弦載荷の場合の部材力 U , L , D の影響線を描き、必要な縦距を与えよ。
- b) 死荷重 4 kN/m と集中荷重 20 kN が作用するときの部材力の最大値 U_{\max} , L_{\max} , D_{\max} を求めよ。



【解答】

- a) 下弦載荷の場合の部材力 U , L , D の影響線を描き、必要な縦距を与えよ。



まず、上図のように A 点から x の位置に単位集中荷重 P が作用するときの支点反力の影響線を求める。

B 点回りのモーメントの釣合より、 $24R_A = P(24 - x)$

A 点回りのモーメントの釣合より、 $24R_B = Px$

$$\therefore R_A = 1 - \frac{x}{24} \quad , \quad R_B = \frac{x}{24}$$

次に、単位集中荷重 P が作用する位置 x によって、以下のように3つに区分して部材力 U , L , D の影響線を求める。

1) $0 \leq x \leq 6m$ のとき、

G 点回りのモーメントの釣合から、

$$4U + 12R_A = P(12 - x)$$

$$\therefore 4U = 12 - x - 12 + \frac{12}{24}x = -\frac{x}{2} \quad \therefore U = -\frac{x}{8}$$

F 点回りのモーメントの釣合から、

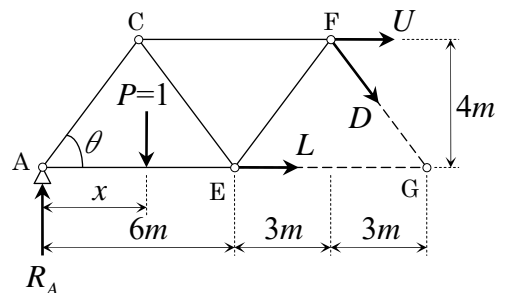
$$4L + P(9 - x) = 9R_A$$

$$\therefore 4L = 9 - \frac{9}{24}x - 9 + x = \frac{15}{24}x = \frac{5}{8}x$$

$$\therefore L = \frac{5}{32}x$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$D \sin \theta + P = R_A \quad \therefore \frac{4}{5}D = 1 - \frac{x}{24} - 1 = -\frac{x}{24} \quad \therefore D = -\frac{1}{24} \cdot \frac{5}{4}x = -\frac{5}{96}x$$



2) $12m \leq x \leq 24m$ のとき、

G 点回りのモーメントの釣合から、

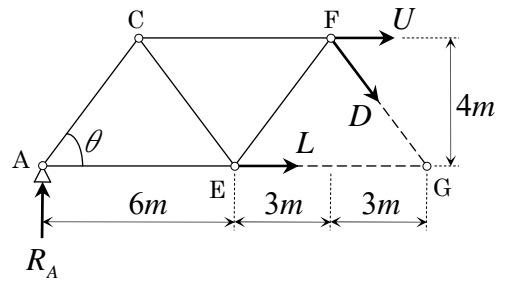
$$4U + 12R_A = 0 \quad \therefore U = -3R_A = -3 - \frac{x}{8}$$

F 点回りのモーメントの釣合から、

$$4L = 9R_A \quad \therefore L = \frac{9}{4} \left(1 - \frac{x}{24}\right)$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$D \sin \theta = R_A \quad \therefore D = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{x}{24}\right)$$



3) $6m \leq x \leq 12m$ のとき、

G 点回りのモーメントの釣合から、

$$4U + 12R_A = \frac{12-x}{6} P \cdot 6$$

$$\therefore 4U = 12 - x - 12 + \frac{12}{24} x = -\frac{x}{2}$$

$$\therefore U = -\frac{x}{8}$$

F 点回りのモーメントの釣合から、

$$4L + \frac{12-x}{6} P \cdot 3 = 9R_A$$

$$\therefore 4L = 9 - \frac{9}{24} x - 6 + \frac{x}{2} = 3 + \frac{x}{8}$$

$$\therefore L = \frac{3}{4} + \frac{x}{32}$$

鉛直方向の力の釣合から、

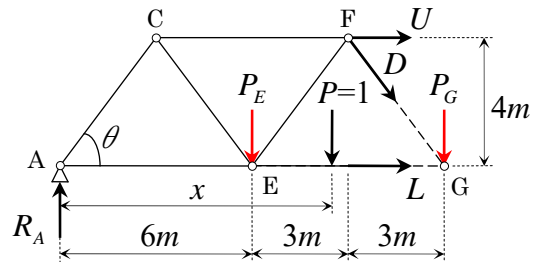
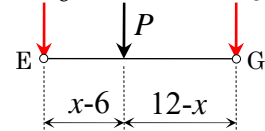
$$D \sin \theta + \frac{12-x}{6} P = R_A$$

$$\therefore \frac{4}{5} D = 1 - \frac{x}{24} - 2 + \frac{x}{6} = -1 + \frac{x}{8}$$

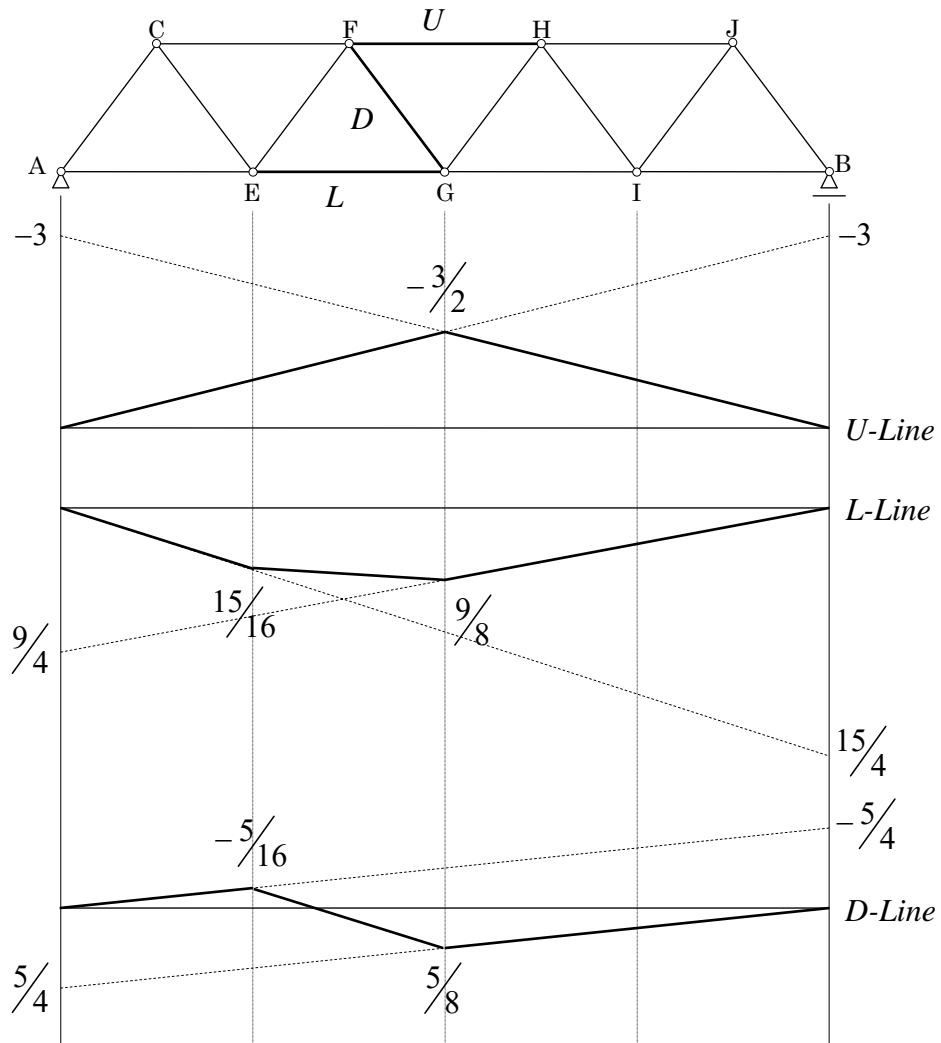
$$\therefore D = -\frac{5}{4} + \frac{5}{32} x$$

格点荷重に分解する。

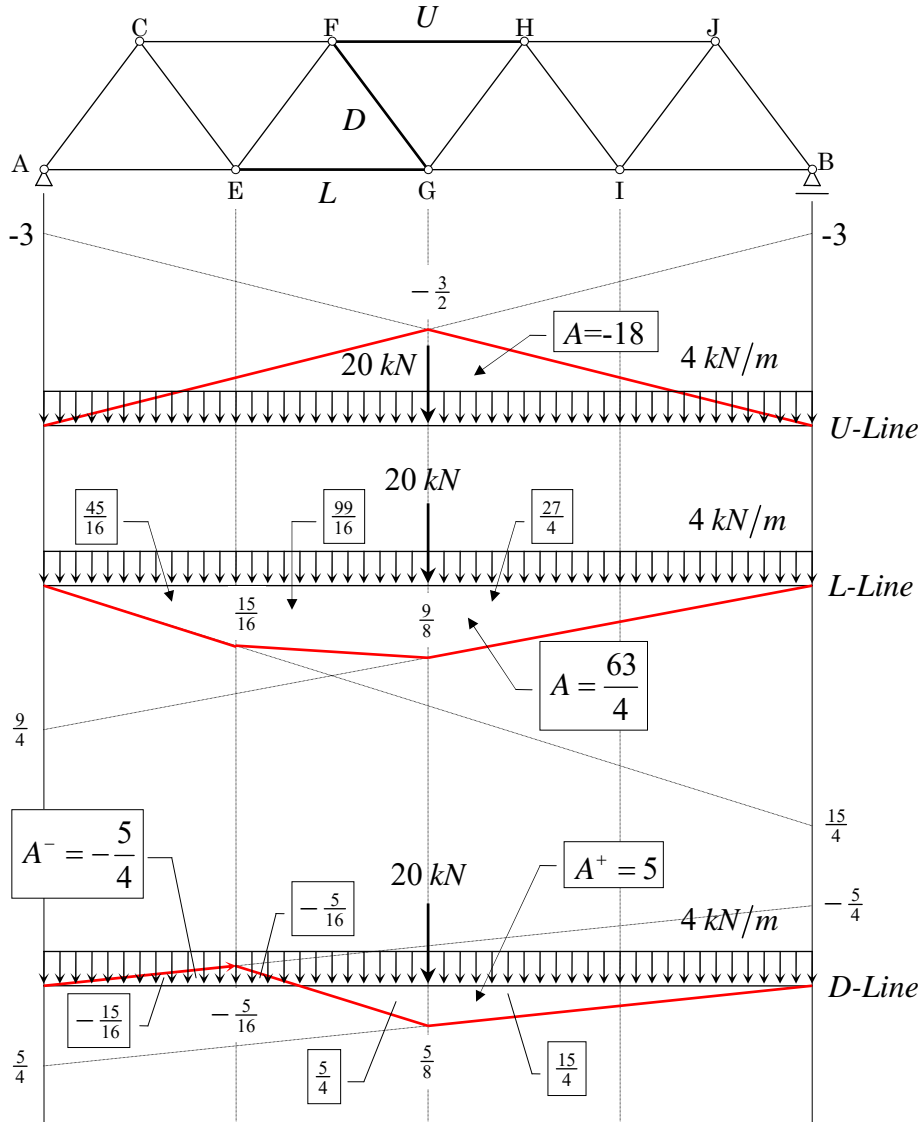
$$P_E = \frac{12-x}{6} P \quad P_G = \frac{x-6}{6} P$$



以上より、部材力 U , L , D の影響線は、下図のようになる。



b) 死荷重 4 kN/m と集中荷重 20 kN が作用するときの部材力の最大値 U_{\max} , L_{\max} , D_{\max} を求めよ。
 上記の影響線を用いて、死荷重 4 kN/m と集中荷重 20 kN が作用するときの部材力の最大値 U_{\max} , L_{\max} , D_{\max} を求めると、以下ようになる。



上図に示したように、集中荷重については G 点の縦距を、死荷重については全スパンに渡る正負の影響面積の合計を用いて、

$$U_{\max} = \left(-\frac{3}{2}\right) \times 20\text{ kN} + (-18)\text{ m} \times 4\text{ kN/m} = -30\text{ kN} - 72\text{ kN} = -102\text{ kN}$$

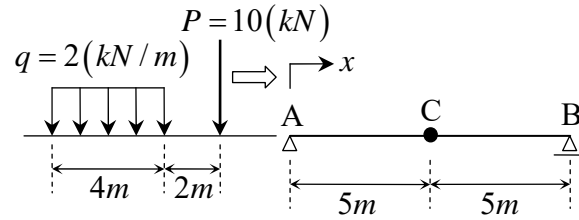
$$L_{\max} = \frac{9}{8} \times 20\text{ kN} + \frac{63}{4}\text{ m} \times 4\text{ kN/m} = 22.5\text{ kN} + 63\text{ kN} = 85.5\text{ kN}$$

$$D_{\max} = \frac{5}{8} \times 20\text{ kN} + \left(5 - \frac{5}{4}\right)\text{ m} \times 4\text{ kN/m} = 12.5\text{ kN} + 15\text{ kN} = 27.5\text{ kN}$$

$$\therefore \begin{cases} U_{\max} = -102\text{ kN} \\ L_{\max} = 85.5\text{ kN} \\ D_{\max} = 27.5\text{ kN} \end{cases}$$

【問題 IL-SB-2】 下図に示すような“集中荷重 P と等分布荷重 q のセット”（移動荷重）が、単純ばり AB 上を移動するとき、載荷位置による C 点のせん断力 Q と曲げモーメント M の変化を“影響線”を用いて求め、図示せよ。

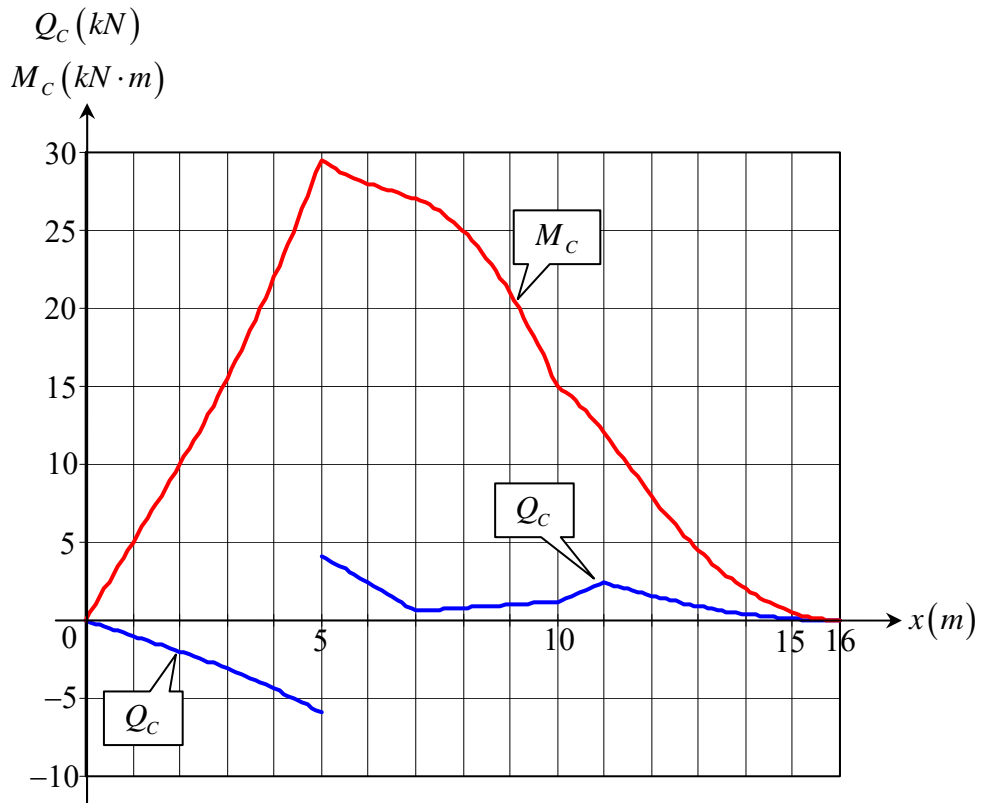
なお、移動荷重は、 A 点を原点とする x 軸において、集中荷重 P の位置によって“載荷位置”を表わすものとする。



【解答】

表一移動荷重の載荷位置による C 点のせん断力と曲げモーメントの変化

荷重位置 $x(m)$	せん断力 $Q_c (kN)$			曲げモーメント $M_c (kN \cdot m)$		
	集中荷重 Q_c^p	分布荷重 Q_c^q	合計	集中荷重 M_c^p	分布荷重 M_c^q	合計
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	-1.0	0.0	-1.0	5.0	0.0	5.0
2.0	-2.0	0.0	-2.0	10.0	0.0	10.0
3.0	-3.0	-0.1	-3.1	15.0	0.5	15.5
4.0	-4.0	-0.4	-4.4	20.0	2.0	22.0
5.0	-5.0	-0.9	-5.9	25.0	4.5	29.5
5.0	5.0	-0.9	4.1	25.0	4.5	29.5
6.0	4.0	-1.6	2.4	20.0	8.0	28.0
7.0	3.0	-2.4	0.6	15.0	12.0	27.0
8.0	2.0	-1.2	0.8	10.0	15.0	25.0
9.0	1.0	0.0	1.0	5.0	16.0	21.0
10.0	0.0	1.2	1.2	0.0	15.0	15.0
11.0	0.0	2.4	2.4	0.0	12.0	12.0
12.0	0.0	1.6	1.6	0.0	8.0	8.0
13.0	0.0	0.9	0.9	0.0	4.5	4.5
14.0	0.0	0.4	0.4	0.0	2.0	2.0
15.0	0.0	0.1	0.1	0.0	0.5	0.5
16.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0



図一移動荷重の載荷位置による C 点のせん断力と曲げモーメントの変化

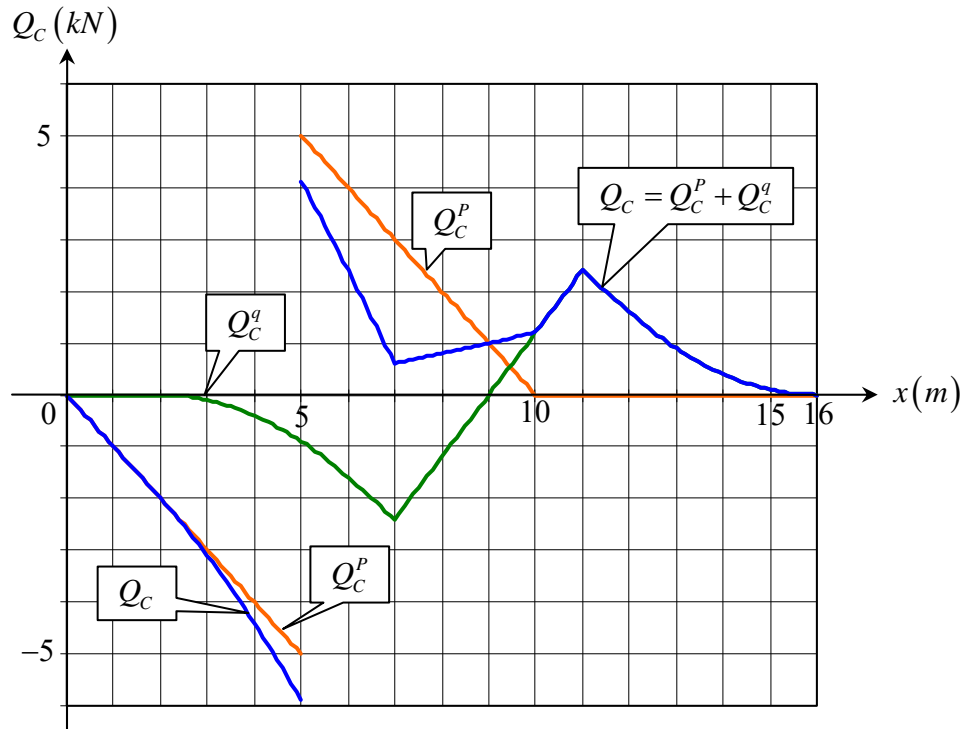


図-1 移動荷重の載荷位置による C 点のせん断力の変化
(集中荷重と等分布荷重に分けて考えた場合)

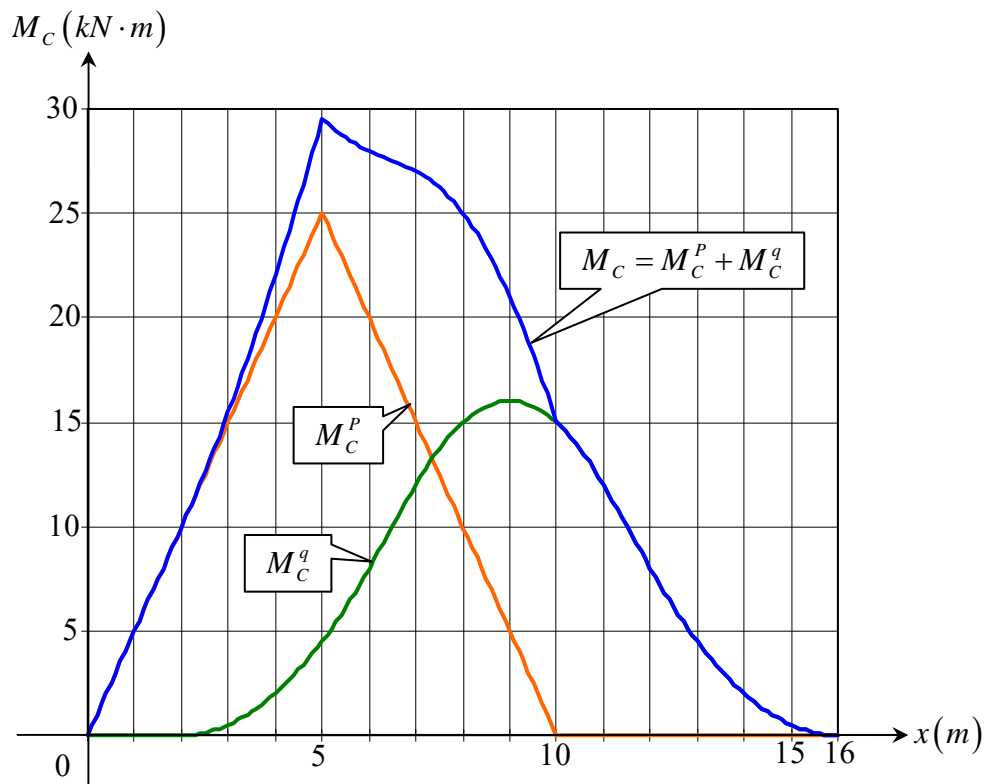
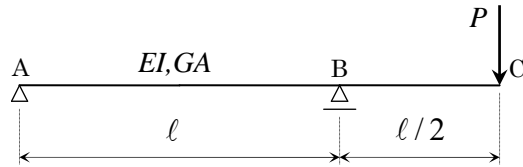


図-2 移動荷重の載荷位置による C 点の曲げモーメントの変化
(集中荷重と等分布荷重に分けて考えた場合)

【問題 SE-B-1】 下図に示す張出ばりのひずみエネルギー U を求めよ。ただし、はりの曲げ剛性は EI 、せん断弾性係数は G 、断面積は A とする。



【解答】

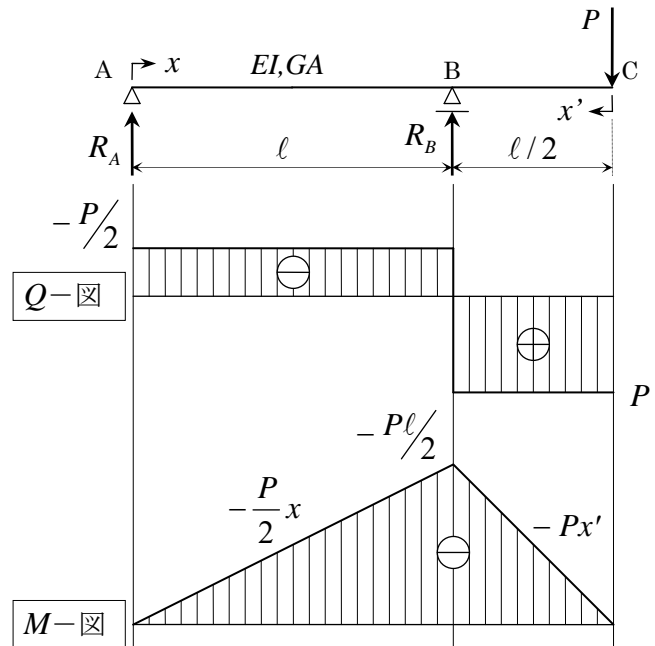
支点反力を R_A 、 R_B とすると、

$$R_A + R_B = P$$

$$R_B \cdot l = P \cdot \left(l + \frac{l}{2} \right)$$

$$\therefore R_B = \frac{3}{2}P \quad R_A = -\frac{1}{2}P$$

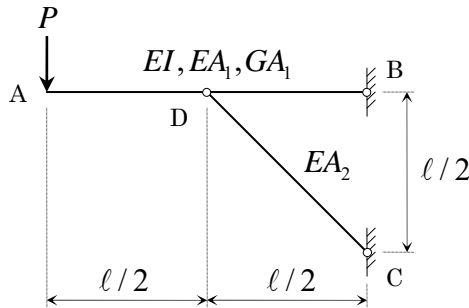
これより、断面力図は、右図のようになる。
したがって、ひずみエネルギー U は、次のようになる。



$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^{2\ell} \left(\frac{M^2}{EI} + \kappa \frac{Q^2}{GA} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{1}{EI} \cdot \frac{P^2}{4} x^2 + \frac{\kappa}{GA} \cdot \frac{P^2}{4} \right) dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\ell} \left(\frac{1}{EI} \cdot P^2 x'^2 + \frac{\kappa}{GA} \cdot P^2 \right) dx' \\
 U &= \frac{P^2}{8EI} \int_0^\ell x^2 dx + \frac{\kappa P^2}{8GA} \ell + \frac{P^2}{2EI} \int_0^{\frac{1}{2}\ell} x'^2 dx' + \frac{\kappa P^2}{2GA} \cdot \frac{\ell}{2} \\
 &= \frac{P^2}{8EI} \cdot \frac{\ell^3}{3} + \frac{P^2}{2EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^3}{8} + \frac{\kappa P^2}{8GA} \cdot (\ell + 2\ell) \\
 &= \frac{P^2 \ell^3}{48EI} \cdot (2+1) + \frac{3}{8} \cdot \frac{\kappa P^2 \ell}{GA} = \frac{P^2 \ell^3}{16EI} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\kappa P^2 \ell}{GA} \\
 \therefore U &= \frac{1}{16} \cdot \frac{P^2 \ell^3}{EI} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\kappa P^2 \ell}{GA}
 \end{aligned}$$

【問題 SE-S-1】 下図に示す構造物のひずみエネルギー U を求めよ。

ただし、各部材のヤング係数、せん断弾性係数は、 E 、 G であり、部材 AB 、部材 CD の断面積は、それぞれ A_1 、 A_2 である。また、部材 AB の断面 2 次モーメントは、 I である。



【解答】

B 、 C 点の支点反力を H_B 、 V_B 、 R_C とすると、

水平方向の力の釣合から、

$$H_B + R_C \cos 45^\circ = 0$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$V_B + R_C \sin 45^\circ = P$$

B 点回りのモーメントの釣合から、

$$P \cdot l = R_C \cos 45^\circ \times \frac{l}{2} \quad \therefore R_C = 2\sqrt{2}P$$

よって、 $H_B = -2P$ 、 $V_B = -P$

このとき、断面力図は、右図のようになる。

各部材に作用する各断面力によるひずみエネルギーを考えると、次のようになる。

$$\begin{aligned} U_{AB}^M &= 2 \times \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}l} \left\{ \frac{(-Px)^2}{EI} \right\} dx = \frac{P^2}{EI} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}l} x^2 dx \\ &= \frac{P^2}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^3}{8} = \frac{P^2 \ell^3}{24EI} \end{aligned}$$

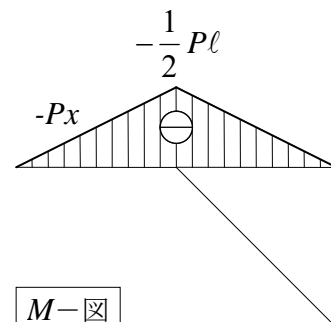
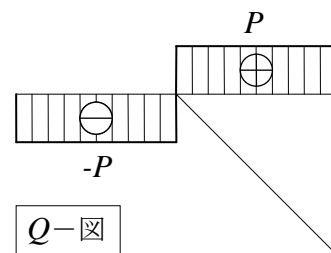
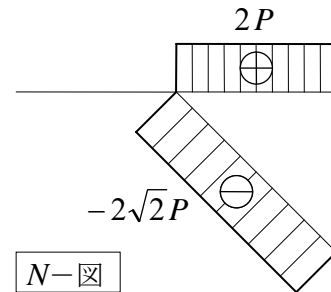
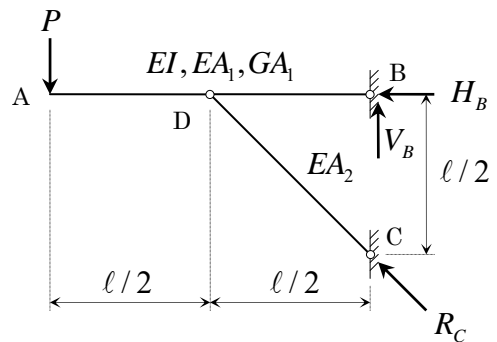
$$U_{AB}^Q = 2 \times \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}l} \left\{ \kappa \frac{(-P)^2}{GA_1} \right\} dx = \kappa \frac{P^2}{GA_1} \cdot \frac{l}{2} = \kappa \frac{P^2 \ell}{2GA_1}$$

$$U_{AB}^N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EA_1} \cdot (2P)^2 \cdot \frac{1}{2} l = \frac{P^2 \ell}{EA_1}$$

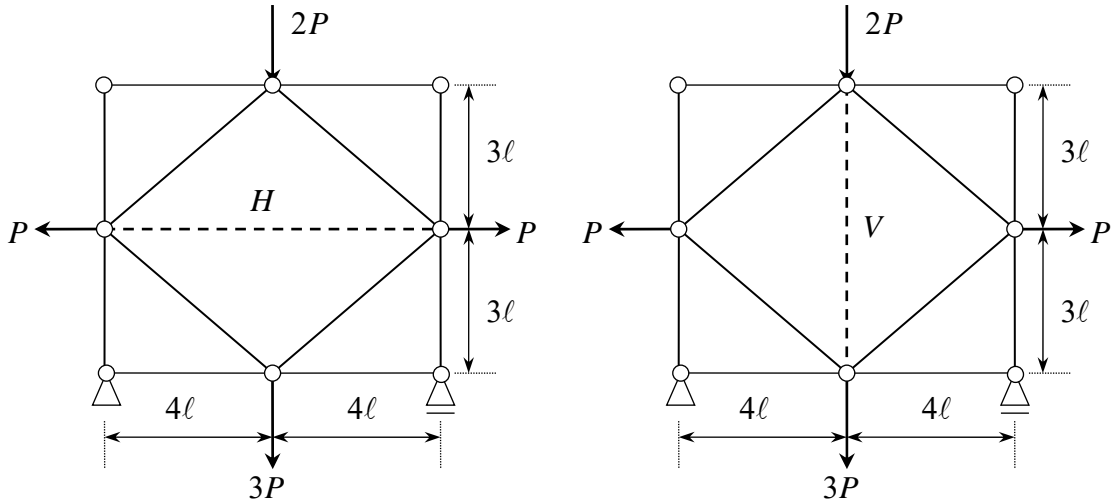
$$U_{CD}^N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EA_2} \cdot (-2\sqrt{2}P)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l = \frac{2\sqrt{2}P^2 \ell}{EA_2}$$

したがって、全ひずみエネルギー U は、各ひずみエネルギーの和で表されるから、次のようになる。

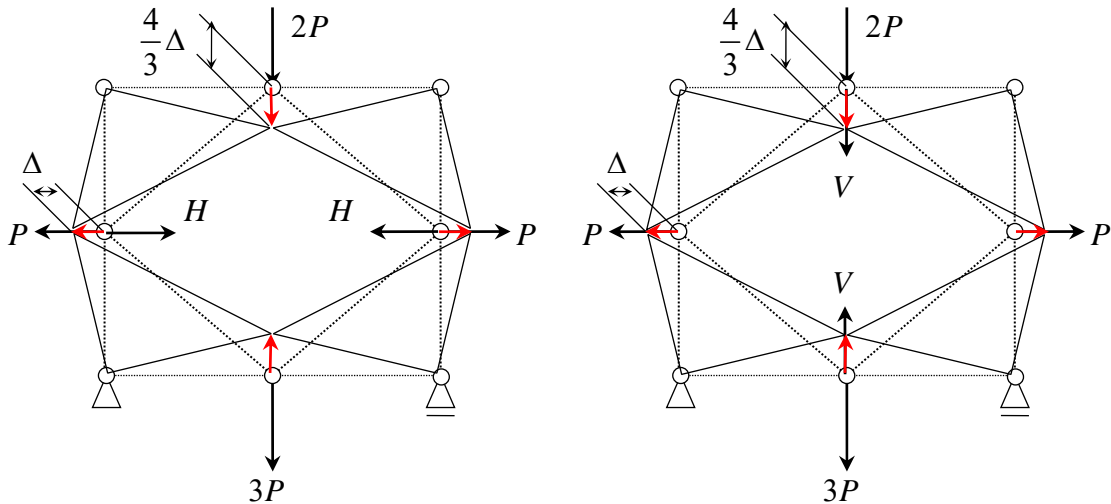
$$\begin{aligned} U &= U_{AB}^M + U_{AB}^Q + U_{AB}^N + U_{CD}^N \\ &= \frac{P^2 \ell^3}{24EI} + \kappa \frac{P^2 \ell}{2GA_1} + \frac{P^2 \ell}{EA_1} + \frac{2\sqrt{2}P^2 \ell}{EA_2} \end{aligned}$$



【問題 UD-T-6】 下図に示す2つの静定トラスについて、破線で表される部材の部材力 H , V を “**仮想変位の原理**” を用いて求めよ。



【解答】



上図に示すように、支持条件や幾何学的条件を満足する水平方向の仮想変位を Δ とすると、鉛直方向の仮想変位は $\frac{4}{3}\Delta$ となること、及び、力の方向と逆方向の仮想変位は “負” となることに注意して、“仮想変位の原理” を適用すると、次のようになる。

部材力 H について

$$P \cdot \Delta + P \cdot \Delta + H \cdot (-\Delta) + H \cdot (-\Delta) + 2P \cdot \frac{4}{3}\Delta + 3P \cdot \left(-\frac{4}{3}\Delta\right) = 0$$

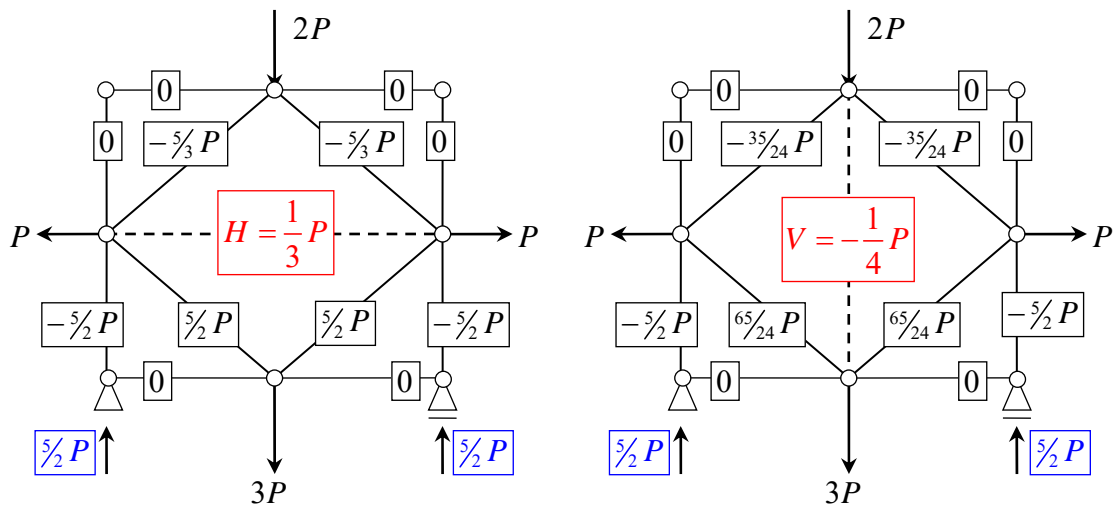
$$\therefore P + P - H - H + \frac{8}{3}P - 4P = 0 \quad \therefore -2H = -\frac{2}{3}P \quad \therefore H = \frac{1}{3}P$$

部材力 V について

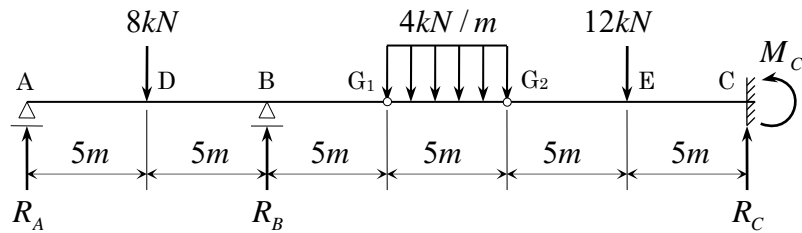
$$P \cdot \Delta + P \cdot \Delta + 2P \cdot \frac{4}{3}\Delta + 3P \cdot \left(-\frac{4}{3}\Delta\right) + V \cdot \frac{4}{3}\Delta + V \cdot \frac{4}{3}\Delta = 0$$

$$\therefore P + P + \frac{8}{3}P - 4P + \frac{4}{3}V + \frac{4}{3}V = 0 \quad \therefore \frac{8}{3}V = -\frac{2}{3}P \quad \therefore V = -\frac{1}{4}P$$

ちなみに、「節点法」によりすべての部材力を求めると、下図のようになる。

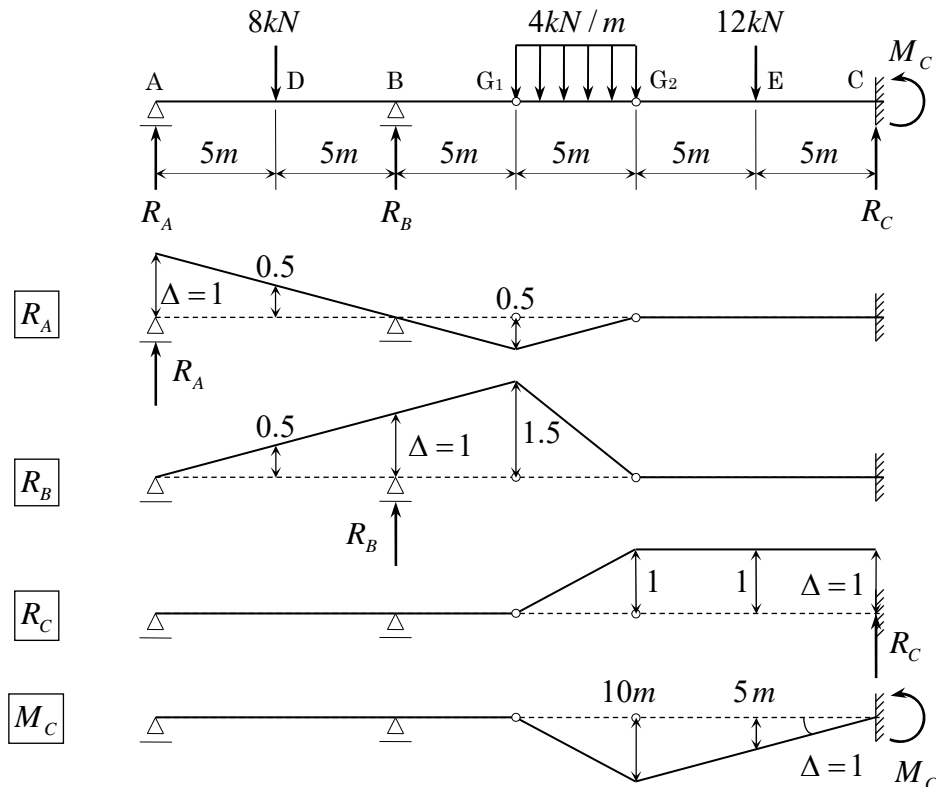


【問題 UD-G-6】 下図に示すゲルバーばりの支点反力 R_A , R_B , R_C と C 点の支点曲げモーメント M_C を “仮想変位の原理” を用いて求めよ。



【解答】

支点反力 R_A , R_B , R_C と C 点の支点曲げモーメント M_C のそれぞれについて、題意のゲルバーばりの支持条件や幾何学的条件を満足する “単位” の仮想変位 $\Delta = 1$ を図示すると下図のようになる。



荷重の方向と逆方向の仮想変位は “負” であることに注意して、“仮想変位の原理” を適用すると次のようになる。

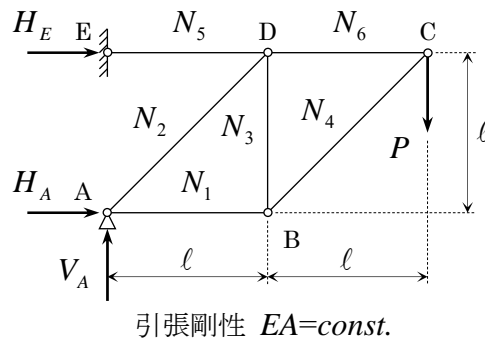
$$\begin{aligned} \text{支点反力 } R_A \text{ について} \quad R_A \cdot 1 + 8kN \cdot (-0.5) + 4kN/m \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 5m &= 0 \\ \therefore R_A = 4 - 5 = -1kN &\quad \therefore \boxed{R_A = -1kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{支点反力 } R_B \text{ について} \quad R_B \cdot 1 + 8kN \cdot (-0.5) + 4kN/m \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1.5) \cdot 5m &= 0 \\ \therefore R_B = 4 + 15 = 19kN &\quad \therefore \boxed{R_B = 19kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{支点反力 } R_C \text{ について} \quad R_C \cdot 1 + 12kN \cdot (-1) + 4kN/m \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 5m &= 0 \\ \therefore R_C = 12 + 10 = 22kN &\quad \therefore \boxed{R_C = 22kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C 点の支点曲げモーメント } M_C \text{ について} \quad M_C \cdot 1 + 12kN \cdot 5m + 4kN/m \cdot \frac{1}{2} \cdot 10m \cdot 5m &= 0 \\ \therefore M_C = -60 - 100 = -160kN \cdot m &\quad \therefore \boxed{M_C = -160kN \cdot m} \end{aligned}$$

【問題 UL-T-4】 下図に示す静定トラスの C 点の鉛直変位 v_C を “単位荷重法” を用いて求めよ。



【解答】

まず、支点反力 V_A , H_A , H_E を求める。

鉛直方向の力の釣合から、 $V_A = P$

水平方向の力の釣合から、 $H_A + H_E = 0$

A 点回りのモーメントの釣合から、 $H_E \cdot l + P \cdot 2l = 0 \quad \therefore H_E = -2P$ よって、 $H_A = 2P$

次に、“節点法”によりトラスの部材力 $N_1 \sim N_6$ を求める。

C 点について、

鉛直方向の力の釣合から、 $N_4 \sin 45^\circ + P = 0 \quad \therefore N_4 = -\frac{P}{\sin 45^\circ} = -\sqrt{2}P$

水平方向の力の釣合から、 $N_6 + N_4 \cos 45^\circ = 0 \quad \therefore N_6 = -N_4 \cos 45^\circ = P$

B 点について、

鉛直方向の力の釣合から、 $N_4 \sin 45^\circ + N_3 = 0 \quad \therefore N_3 = -N_4 \sin 45^\circ = P$

水平方向の力の釣合から、 $N_1 = N_4 \cos 45^\circ \quad \therefore N_1 = -P$

D 点について、

鉛直方向の力の釣合から、 $N_2 \sin 45^\circ + N_3 = 0 \quad \therefore N_2 = -\frac{N_3}{\sin 45^\circ} = -\sqrt{2}P$

水平方向の力の釣合から、 $N_5 + N_2 \cos 45^\circ = N_6 \quad \therefore N_5 = N_6 - N_2 \cos 45^\circ = P + P = 2P$

E 点について、(check)

水平方向の力の釣合から、 $H_E + N_5 = -2P + 2P = 0$

A 点について、(check)

鉛直方向の力の釣合から、 $V_A + N_2 \sin 45^\circ = P - P = 0$

水平方向の力の釣合から、 $H_A + N_1 + N_2 \cos 45^\circ = 2P - P - P = 0$

したがって、静定トラスの C 点の鉛直変位 v_C を “単位荷重法” を用いて求めると、次のようになる。

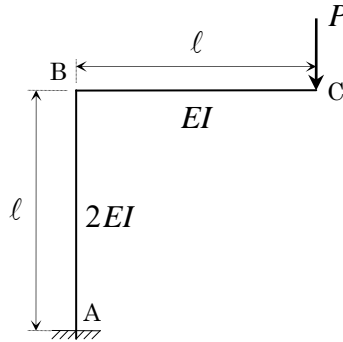
$$1 \times v_C = \sum_{j=1}^6 \bar{N}_j \frac{N_j}{EA} \ell_j$$

$$= (-1) \cdot \frac{-P}{EA} \cdot l + (-\sqrt{2}) \cdot \frac{-\sqrt{2}P}{EA} \cdot \sqrt{2}l + (1) \cdot \frac{P}{EA} \cdot l + (-\sqrt{2}) \cdot \frac{-\sqrt{2}P}{EA} \cdot \sqrt{2}l + (2) \cdot \frac{2P}{EA} \cdot l + (1) \cdot \frac{P}{EA} \cdot l$$

$$= \frac{P\ell}{EA} \cdot (1 + 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} + 4 + 1) = (7 + 4\sqrt{2}) \frac{P\ell}{EA}$$

$$\therefore v_C = \boxed{(7 + 4\sqrt{2}) \frac{P\ell}{EA}}$$

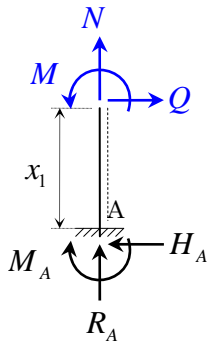
【問題 UL-R-1】下図に示す静定ラーメンの C 点の鉛直たわみ v_c とたわみ角 θ_c を求めよ。ただし、 AB , BC 間の曲げ剛性は、それぞれ $2EI$, EI で一定とし、軸方向力・せん断力の影響は無視する。



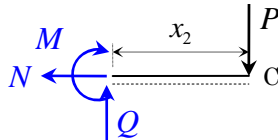
【解答】

右図において、支点反力を求めると、 $R_A = P$, $H_A = 0$, $M_A = -P \cdot l$
次に、下図のように、 $A \sim B$ 間、 $B \sim C$ 間に分けて断面力を求める。

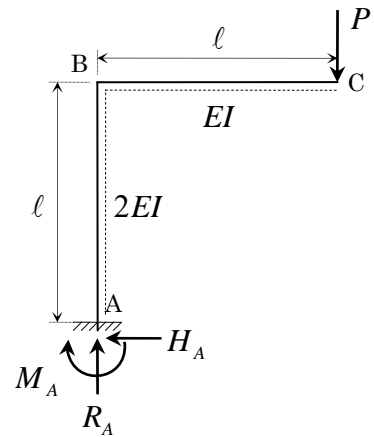
$A \sim B$ 間について、



$B \sim C$ 間について、



$$\begin{aligned} N &= 0 \\ Q &= P \\ M &= -P \cdot x_2 \end{aligned}$$

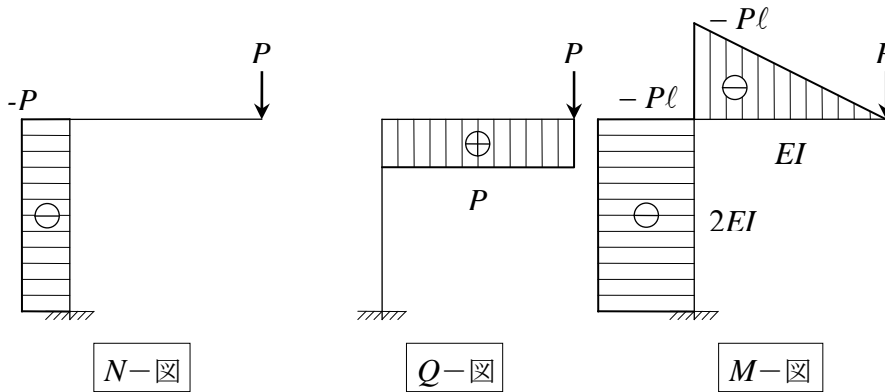


$$N = -R_A = -P$$

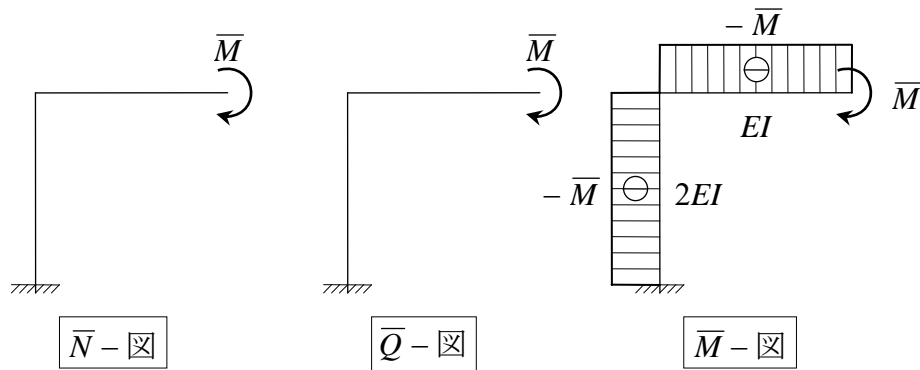
$$Q = H_A = 0$$

$$M = H_A \cdot x_1 + M_A = -P \cdot l$$

これらを図示すると、下図のようになる。



C 点に単位の集中モーメント $\bar{M} = 1$ が作用する場合は、同様にして、
 支点反力を求めると、 $\bar{R}_A = 0$, $\bar{H}_A = 0$, $\bar{M}_A = -\bar{M}$ であり、
 これらを図示すると、下図のようになる。



したがって、C 点の鉛直たわみ v_c とたわみ角 θ_c は、次のようになる。

$$v_c = \int \frac{MM\bar{M}}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^\ell (-P\ell) \cdot (-\ell) \cdot dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_0^\ell (-Px) \cdot (-x) \cdot dx = \frac{P\ell^3}{2EI} + \frac{P}{EI} \cdot \frac{\ell^3}{3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore v_c = \frac{5}{6} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\theta_c = \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^\ell (-P\ell) \cdot (-1) \cdot dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_0^\ell (-Px) \cdot (-1) \cdot dx = \frac{P\ell^2}{2EI} + \frac{P}{EI} \cdot \frac{\ell^2}{2} = \frac{P\ell^2}{EI}$$

$$\therefore \theta_c = \frac{P\ell^2}{EI}$$

AB, BC 間の引張剛性をそれぞれ $2EA$, EA 、せん断剛性をそれぞれ $2GA$, GA とし、軸方向力・せん断力の影響を考慮すると、C 点の鉛直たわみ v_c は、次のようになる。

$$v_c = \int \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \int \kappa \frac{Q\bar{Q}}{GA} dx + \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{2EA} \cdot \int_0^\ell (-P) \cdot (-1) \cdot dx + \frac{\kappa}{GA} \cdot \int_0^\ell P \cdot 1 \cdot dx + \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^\ell (-P\ell) \cdot (-\ell) \cdot dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_0^\ell (-Px) \cdot (-x) \cdot dx$$

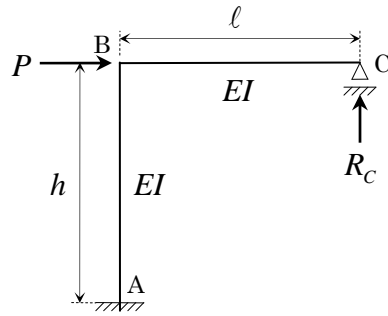
$$= \frac{P\ell}{2EA} + \kappa \frac{P\ell}{GA} + \frac{P\ell^3}{2EI} + \frac{P}{EI} \cdot \frac{\ell^3}{3} = \frac{P\ell}{2EA} + \kappa \frac{P\ell}{GA} + \frac{5}{6} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore v_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{P\ell}{EA} + \kappa \frac{P\ell}{GA} + \frac{5}{6} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

また、C 点のたわみ角 θ_c については、軸方向力・せん断力の影響はない。

$$\theta_c = \int \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \int \kappa \frac{Q\bar{Q}}{GA} dx + \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

【問題 LW-R-1】 下図に示す 1 次不静定ラーメンの支点 C の支点反力 R_C を “**最小仕事の原理**” を用いて求めよ。ただし、各部材の曲げ剛性は、 EI で一定とし、せん断力の影響は無視する。



【解答】

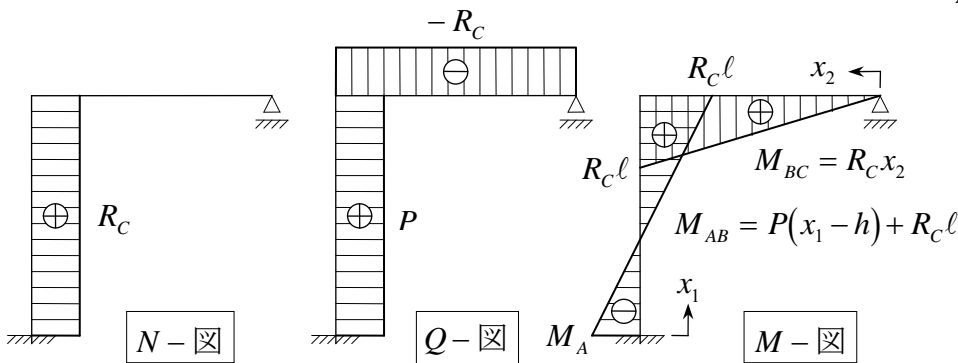
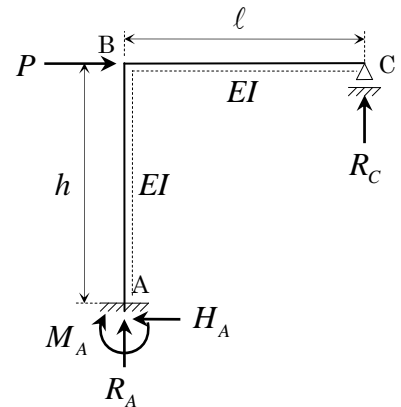
右図に示すように、支点 C の支点反力 R_C を不静定力として、支点反力 R_A , H_A , M_A を求めると、次のようになる。

$$R_A = -R_C$$

$$H_A = P$$

$$M_A = R_C \cdot \ell - P \cdot h$$

これに基づき断面力図を図示すると、下図のようになる。



これらより、全ての断面力による全ひずみエネルギー U は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \cdot \int \kappa \frac{Q^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{M^2}{EI} dx \\
 &= \frac{1}{2EA} \cdot \int_0^h R_C^2 dx_1 + \frac{\kappa}{2GA} \cdot \left[\int_0^h P^2 dx_1 + \int_0^\ell R_C^2 dx_2 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2EI} \cdot \left[\int_0^h \{P \cdot (x_1 - h) + R_C \cdot \ell\}^2 dx_1 + \int_0^\ell (R_C \cdot x_2)^2 dx_2 \right]
 \end{aligned}$$

これを、 R_C で偏微分すると、「最小仕事の原理」より、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial R_C} &= \frac{1}{EA} \cdot \int_0^h R_C dx_1 + \frac{\kappa}{GA} \cdot \int_0^\ell R_C dx_2 + \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^h \{P \cdot (x_1 - h) + R_C \cdot \ell\} \cdot \ell \cdot dx_1 + \int_0^\ell R_C \cdot x_2^2 dx_2 \right] \\
 &= \frac{R_C h}{EA} + \kappa \frac{R_C \ell}{GA} + \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \ell \cdot \left[P \frac{x_1^2}{2} - Phx_1 + R_C \ell x_1 \right]_0^h + R_C \frac{\ell^3}{3} \right\} \\
 &= \frac{R_C h}{EA} + \kappa \frac{R_C \ell}{GA} + \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \ell \cdot \left(P \frac{h^2}{2} - Ph^2 + R_C \ell h \right) + R_C \frac{\ell^3}{3} \right\} \\
 &= \frac{R_C h}{EA} + \kappa \frac{R_C \ell}{GA} + \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \left(h\ell^2 + \frac{\ell^3}{3} \right) \cdot R_C - \frac{1}{2} Ph^2 \ell \right\} \\
 &= \frac{R_C h}{EA} + \kappa \frac{R_C \ell}{GA} + \frac{\ell}{EI} \cdot \left\{ \left(h + \frac{\ell}{3} \right) \cdot \ell \cdot R_C - \frac{1}{2} Ph^2 \right\} \\
 &= \left\{ \frac{h}{EA} + \kappa \frac{\ell}{GA} + \frac{\ell^2}{EI} \cdot \left(h + \frac{\ell}{3} \right) \right\} \cdot R_C - \frac{Ph^2 \ell}{2EI} = 0
 \end{aligned}$$

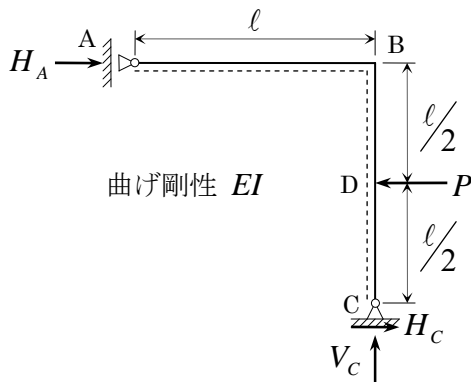
$$\therefore R_C = \frac{\frac{Ph^2 \ell}{2EI}}{\frac{h}{EA} + \kappa \frac{\ell}{GA} + \frac{\ell^2}{EI} \cdot \left(h + \frac{\ell}{3} \right)}$$

ここで、軸方向力とせん断力を無視して、曲げモーメントのみを考慮すると、

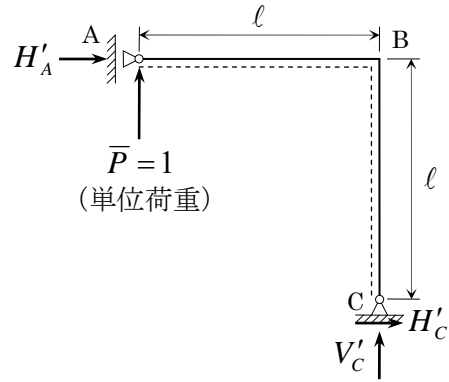
$$R_C = \frac{\frac{Ph^2}{2}}{\left(h + \frac{\ell}{3} \right) \cdot \ell} = \frac{3h^2}{2\ell \cdot (3h + \ell)} P \quad \text{さらに、} \ell = h \text{ とすると、} R_C = \frac{3}{8} P \text{ となる。}$$

【問題 UL-R-3】 下図-A に示す静定ラーメンについて、A 点の鉛直上方への変位 Δ_A を “単位荷重法” を用いて以下のような手順で求めよ。ただし、曲げ剛性 EI は一定とし、軸方向力・せん断力の影響は無視する。また、曲げモーメントは、点線側が “引張” となる曲げモーメントを “正” とする。

- (1) 図-A に示す支点反力 H_A , V_C , H_C を求めよ。
- (2) 図-A の曲げモーメント図 (M -図) を図示せよ。
- (3) 下図-B に示すように、A 点に単位荷重 $\bar{P}=1$ が作用した場合の支点反力 H'_A , V'_C , H'_C を求めよ。
- (4) 図-B の曲げモーメント図 (\bar{M} -図) を図示せよ。
- (5) “単位荷重法”、 $\left(1 \times \Delta_A = \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx\right)$ を適用して、A 点の鉛直上方への変位 Δ_A を求めよ。



【図-A】



【図-B】

【解答】

問題の図において、左図【図-A】を “与系”、右図【図-B】を “仮想系” として考える。まず、両系について支点反力を求め、曲げモーメント図を得る。

“与系” について、

水平方向の力の釣合から、 $H_A + H_C = P$

鉛直方向の力の釣合から、 $V_C = 0$

C 点回りのモーメントの釣合から、 $P \cdot \frac{l}{2} = H_A \cdot l$

以上より、 $H_A = \frac{P}{2}$, $H_C = \frac{P}{2}$, $V_C = 0$

“仮想系” について、

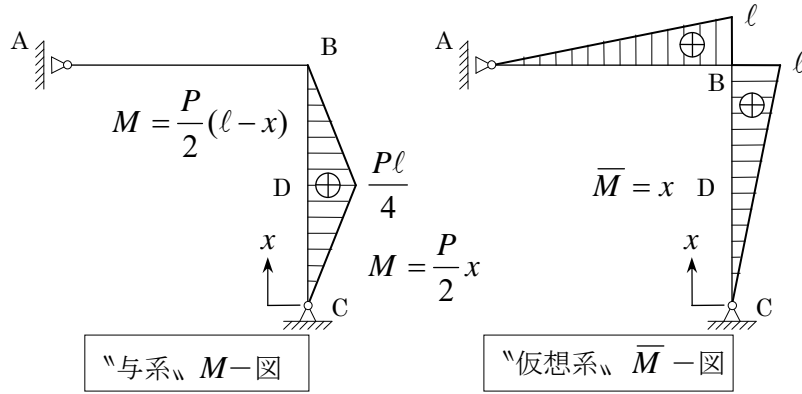
水平方向の力の釣合から、 $H'_A + H'_C = 0$

鉛直方向の力の釣合から、 $V'_C + \bar{P} = 0$

C 点回りのモーメントの釣合から、 $\bar{P} \cdot l + H'_A \cdot l = 0$

以上より、 $H'_A = -\bar{P} = -1$, $H'_C = \bar{P} = 1$, $V'_C = -\bar{P} = -1$

これらより、曲げモーメント図を図示すると、下図のようになる。



A 点の鉛直上方への変位 Δ_A を「単位荷重法」を用いて求めると、次のようになる。

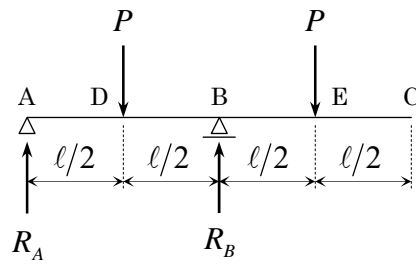
$$\begin{aligned}
 \Delta_A \times 1 &= \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(\frac{1}{2} Px \right) \cdot x dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \left\{ \frac{1}{2} P(\ell - x) \right\} \cdot x dx \\
 &= \frac{P}{2EI} \int_0^{\frac{\ell}{2}} x^2 dx + \frac{P}{2EI} \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} (\ell x - x^2) dx = \frac{P}{2EI} \left\{ \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\ell}{2}} + \left[\frac{\ell}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \right\} \\
 &= \frac{P}{2EI} \left\{ \frac{\ell^3}{24} + \frac{\ell^3}{2} - \frac{\ell^3}{3} - \frac{\ell^3}{8} + \frac{\ell^3}{24} \right\} = \frac{P\ell^3}{2EI} \cdot \frac{1+12-8-3+1}{24} = \frac{P\ell^3}{2EI} \cdot \frac{3}{24} = \frac{1}{16} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} \\
 \therefore \Delta_A &= \frac{1}{16} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}
 \end{aligned}$$

《別解》

「積分公式」を用いると、

$$\begin{aligned}
 \Delta_A \times 1 &= \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \frac{\ell}{2} \cdot \frac{P\ell}{4} \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} \cdot \frac{P\ell}{4} \cdot \left(\ell + 2 \cdot \frac{\ell}{2} \right) \right\} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{48} + \frac{2}{48} \right) \cdot P\ell^3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} \\
 \therefore \Delta_A &= \frac{1}{16} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}
 \end{aligned}$$

【問題 UL-OB-1】 下図に示す曲げ剛性 EI が一定な張出ばりの C 点の鉛直変位 v_C を “単位荷重法” を用いて求めよ。



曲げ剛性 $EI=const.$

【解答】

まず、実荷重に対する支点反力 R_A, R_B を求める。

鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R_B = 2P$

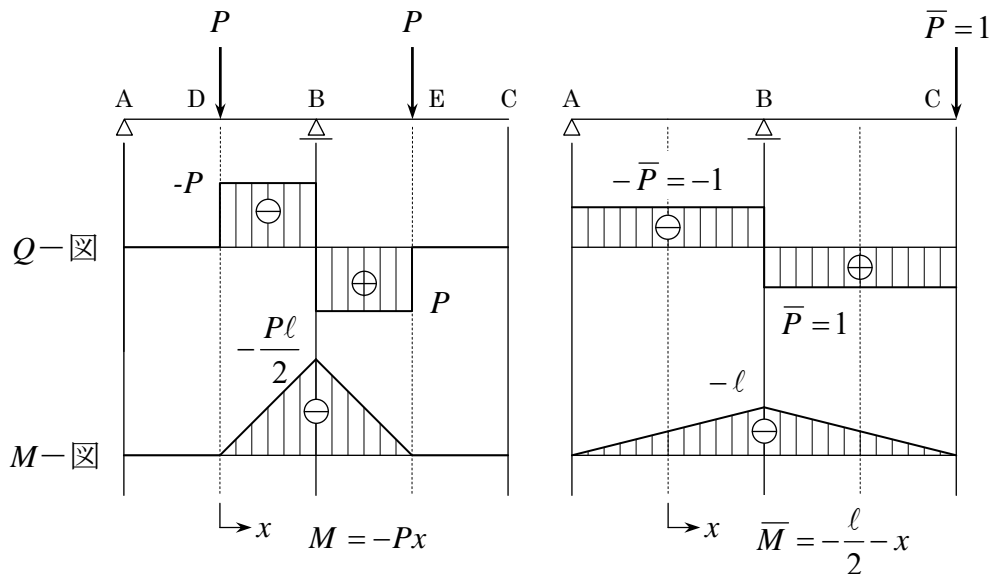
A 点回りのモーメントの釣合から、 $R_B \cdot l = P \cdot \frac{1}{2}l + P \cdot \frac{3}{2}l \quad \therefore R_B = 2P$ よって、 $R_A = 0$

次に、 C 点に仮想荷重 $\bar{P} = 1$ が载荷された場合の支点反力 \bar{R}_A, \bar{R}_B を求める。

鉛直方向の力の釣合から、 $\bar{R}_A + \bar{R}_B = \bar{P} = 1$

A 点回りのモーメントの釣合から、 $\bar{R}_B \cdot l = \bar{P} \cdot 2l \quad \therefore \bar{R}_B = 2\bar{P} = 2$ よって、 $\bar{R}_A = -\bar{P} = -1$

以上、2通りの場合の断面力図を図示すると、下図のようになる。



したがって、 C 点の鉛直変位 v_C を “単位荷重法” を用いて求めると、次のようになる。

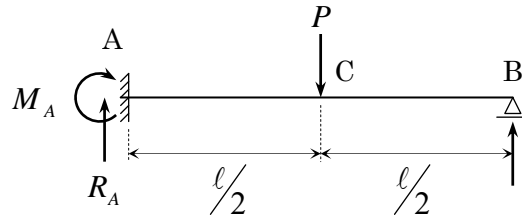
$$\begin{aligned}
 1 \times v_C &= \int_0^{2l} \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx = 2 \times \int_0^{\frac{l}{2}} \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(-\frac{l}{2} - x \right) \cdot (-Px) dx \\
 &= \frac{2P}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2} + x \right) \cdot x dx = \frac{2P}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2}x + x^2 \right) dx = \frac{2P}{EI} \cdot \left[\frac{l}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{l}{2}} \quad \therefore v_C = \frac{5}{24} \cdot \frac{Pl^3}{EI} \\
 &= \frac{2P}{EI} \cdot \left(\frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{8} \right) = \frac{2P}{EI} \cdot \left(\frac{l^3}{16} + \frac{l^3}{24} \right) = \frac{2Pl^3}{EI} \cdot \frac{3+2}{48} = \frac{5}{24} \cdot \frac{Pl^3}{EI}
 \end{aligned}$$

《別解》

“積分公式”を用いると、

$$\begin{aligned} 1 \times v_C &= \int_0^{2\ell} \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx = 2 \times \int_0^{\frac{\ell}{2}} \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{\ell}{2}} M \cdot \bar{M} dx \\ &= \frac{2}{EI} \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \left\{ \left(-\frac{\ell}{2} \right) + 2 \cdot (-\ell) \right\} \cdot \left\{ -\frac{P\ell}{2} \right\} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{\ell}{12} \cdot \frac{5}{2} \ell \cdot \frac{P\ell}{2} = \frac{5}{24} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} \end{aligned} \quad \therefore v_C = \frac{5}{24} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

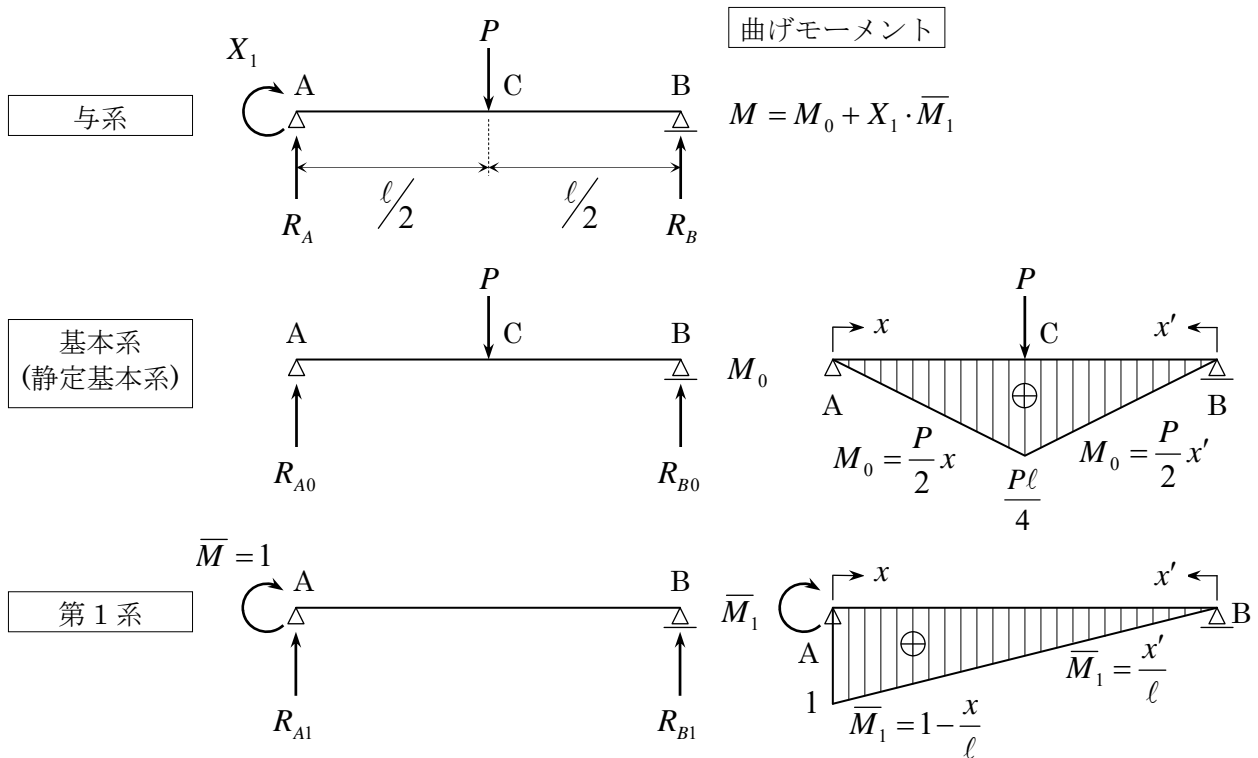
【問題 SM-1】 下図に示す 1 次不静定片持ばりの A 点の支点曲げモーメント M_A を「応力法 (余力法)」を用いて求めよ。



曲げ剛性 $EI = \text{const.}$

【解答】

問題の 1 次不静定片持ばりにおいて、A 点の支点曲げモーメント M_A を「不静定力」と考え、その与系・基本系 (静定基本系) ・第 1 系とその曲げモーメント図を図示すると、下図のようになる。



ここで、与系と第 1 系に対して「単位荷重法」を適用して、A 点のたわみ角 θ_A を求めると、次のようになる。

$$1 \times \theta_A = \int_0^l \frac{M \bar{M}_1}{EI} dx = \int_0^l \frac{(M_0 + X_1 \cdot \bar{M}_1) \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \int_0^l \frac{M_0 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx + X_1 \cdot \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx$$

ところが、A 点は固定端であるから、たわみ角 $\theta_A = 0$ となる。

したがって、A 点の支点曲げモーメント M_A 、即ち、 X_1 は次のようになる。

$$M_A = X_1 = - \frac{\int_0^l \frac{M_0 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx}{\int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx}$$

この式の (分子)、(分母) を計算すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell \frac{M_0 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx &= \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(\frac{P}{2} x \right) \cdot \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(\frac{P}{2} x' \right) \cdot \left(\frac{x'}{\ell} \right) dx' \\
&= \frac{P}{2EI} \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(x - \frac{x^2}{\ell} \right) dx + \frac{P}{2EI} \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(\frac{x'^2}{\ell} \right) dx' = \frac{P}{2EI} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3\ell} \right]_0^{\frac{\ell}{2}} + \frac{P}{2EI} \left[\frac{x'^3}{3\ell} \right]_0^{\frac{\ell}{2}} \\
&= \frac{P}{2EI} \left(\frac{\ell^2}{8} - \frac{\ell^2}{24} \right) + \frac{P}{2EI} \cdot \frac{\ell^2}{24} = \frac{P\ell^2}{2EI} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{24} \right) = \frac{P\ell^2}{16EI} \\
\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx &= \frac{1}{EI} \int_0^\ell \left(\frac{x'}{\ell} \right)^2 dx' = \frac{1}{EI\ell^2} \left[\frac{x'^3}{3} \right]_0^\ell = \frac{1}{EI\ell^2} \cdot \frac{\ell^3}{3} = \frac{\ell}{3EI} \\
\therefore X_1 &= \frac{- \int_0^\ell \frac{M_0 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx}{\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx} = \frac{- \frac{P\ell^2}{16EI}}{\frac{\ell}{3EI}} = -\frac{3}{16} P\ell \quad \therefore \boxed{M_A = -\frac{3}{16} P\ell}
\end{aligned}$$

[補足]

問題の 1 次不静定片持ばりの支点反力は、結局次のようになる。

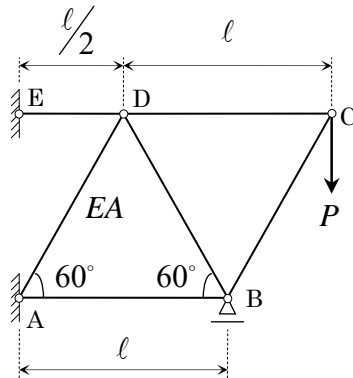
鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R_B = P$ ……………(1)

A 点回りのモーメントの釣合から、 $M_A + P \cdot \frac{\ell}{2} = R_B \cdot \ell$ ……………(2)

上記の(2)式に対して、 $M_A = -\frac{3}{16} P\ell$ を代入すると、

$$R_B \cdot \ell = -\frac{3}{16} P\ell + \frac{1}{2} P\ell = \frac{8-3}{16} P\ell = \frac{5}{16} P\ell \quad \therefore \boxed{R_B = \frac{5}{16} P} \quad \text{また,} \quad \boxed{R_A = \frac{11}{16} P}$$

【問題 SM-3】 下図に示す不静定トラスの部材力を求めよ。ただし、すべての部材の引張剛性 EA は等しいものとする。



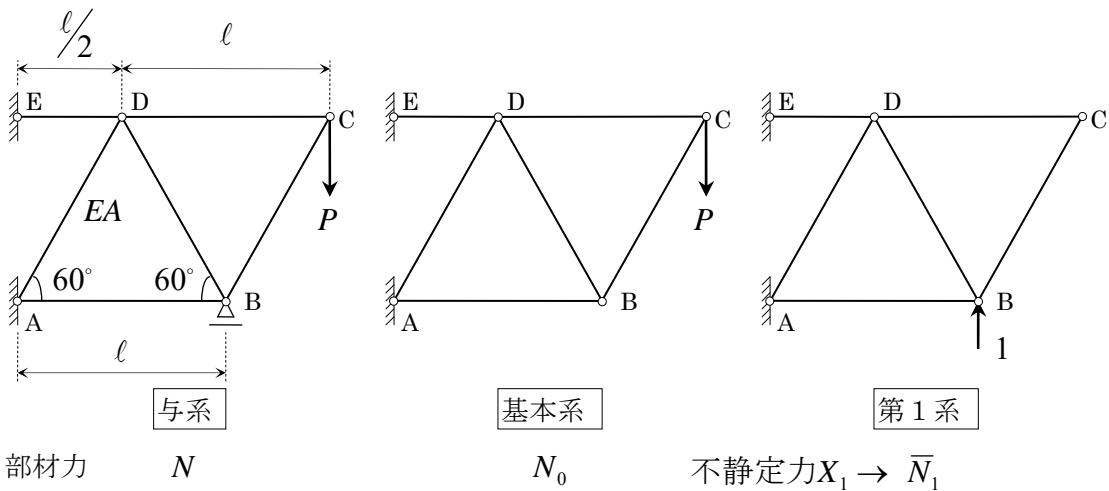
【解答】

トラスの不静定次数 n は、次の式で表される。

$$n = q + r - 2j$$

ここに、 q : 部材数, r : 支点拘束数, j : 節点数とする。

この問題では、 $q=6$, $r=5$, $j=5$ だから、 $n=6+5-2 \times 5=1$ となり、1次不静定トラスとなる。このため、「基本系」と「第1系」を下図のように考えることにする。



このとき、与系の部材力 N は、次のように表される。

$$N = N_0 + \bar{N}_1 \cdot X_1$$

次に、与系での B 点の変位を v_B とすると、「単位荷重法」により、

$$1 \times v_B = \int \frac{\bar{N}_1 \cdot N}{EA} dx = \int \frac{(N_0 + \bar{N}_1 \cdot X_1) \cdot \bar{N}_1}{EA} dx = \int \frac{N_0 \cdot \bar{N}_1}{EA} dx + X_1 \int \frac{\bar{N}_1^2}{EA} dx = 0 \quad (\because v_B = 0)$$

$$\therefore X_1 = - \frac{\int \frac{N_0 \cdot \bar{N}_1}{EA} dx}{\int \frac{\bar{N}_1^2}{EA} dx} = - \frac{\sum_j \frac{N_0 \cdot \bar{N}_1}{EA} \ell_j}{\sum_j \frac{\bar{N}_1^2}{EA} \ell_j}$$

となり、「基本系」、「第1系」の部材力を求めれば、与系の部材力は求まる。

“基本系、の部材力 N_{ij}^0 を求める。

支点反力を求めると、

$$\text{水平方向の力の釣合から、} \quad H_E^0 + H_A^0 = 0$$

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} \quad V_E^0 + V_A^0 = P$$

A 点回りのモーメントの釣合から、

$$P \cdot \frac{3}{2} \ell + H_E^0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \ell = 0$$

$$\therefore H_E^0 = -\sqrt{3}P, \quad H_A^0 = \sqrt{3}P$$

E 点での鉛直方向の外力と部材力の釣合から、 $V_E^0 = 0, \quad V_A^0 = P$

E 点での水平方向の釣合から、 $H_E^0 + N_{DE}^0 = 0 \quad \therefore N_{DE}^0 = -H_E^0 = \sqrt{3}P$

A 点での釣合から、

$$\text{鉛直方向} \quad V_A^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{AD}^0 = 0 \quad \therefore N_{AD}^0 = -\frac{2}{\sqrt{3}} V_A^0 = -\frac{2}{\sqrt{3}} P$$

$$\text{水平方向} \quad H_A^0 + N_{AB}^0 + \frac{1}{2} N_{AD}^0 = 0 \quad \therefore N_{AB}^0 = -H_A^0 - \frac{1}{2} N_{AD}^0 = \sqrt{3}P + \frac{1}{\sqrt{3}} P = -\frac{2}{\sqrt{3}} P$$

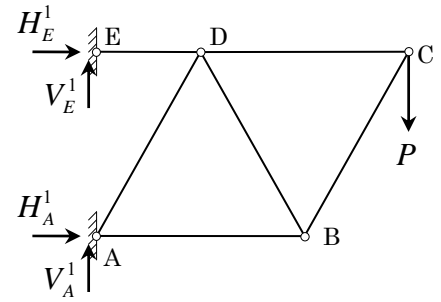
C 点での釣合から、

$$\text{鉛直方向} \quad P + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{BC}^0 = 0 \quad \therefore N_{BC}^0 = -\frac{2}{\sqrt{3}} P$$

$$\text{水平方向} \quad N_{CD}^0 + \frac{1}{2} N_{BC}^0 = 0 \quad \therefore N_{CD}^0 = -\frac{1}{2} N_{BC}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} P$$

D 点での釣合から、

$$\text{鉛直方向} \quad N_{AD}^0 + N_{BD}^0 = 0 \quad \therefore N_{BD}^0 = -N_{AD}^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} P$$



“第1系、の部材力 N_{ij}^1 を求める。

支点反力を求めると、

$$\text{水平方向の力の釣合から、} \quad H_E^1 + H_A^1 = 0$$

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} \quad V_E^1 + V_A^1 = P$$

A 点回りのモーメントの釣合から、

$$1 \times \ell = H_E^1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \ell$$

$$\therefore H_E^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad H_A^1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

E 点での鉛直方向の外力と部材力の釣合から、 $V_E^1 = 0, \quad V_A^1 = -1$

E 点での水平方向の釣合から、 $H_E^1 + N_{DE}^1 = 0 \quad \therefore N_{DE}^1 = -H_E^1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

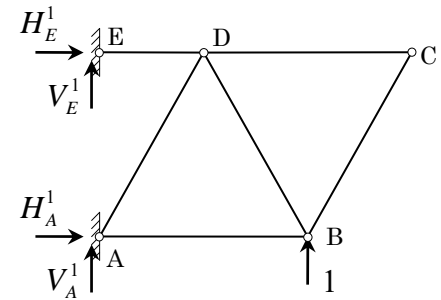
A 点での釣合から、

$$\text{鉛直方向} \quad V_A^1 + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{AD}^1 = 0 \quad \therefore N_{AD}^1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} V_A^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{水平方向} \quad H_A^1 + N_{AB}^1 + \frac{1}{2} N_{AD}^1 = 0 \quad \therefore N_{AB}^1 = -H_A^1 - \frac{1}{2} N_{AD}^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

C 点での釣合から、

$$\text{鉛直方向} \quad N_{BC}^1 = 0$$

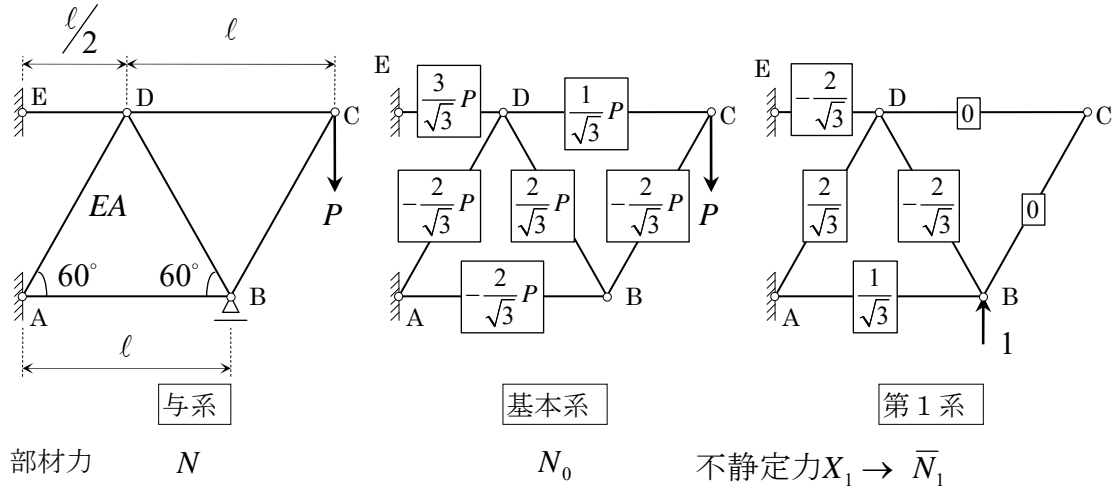


水平方向 $N_{CD}^1 = 0$

D点での釣合から、

鉛直方向 $N_{AD}^1 + N_{BD}^1 = 0 \quad \therefore N_{BD}^1 = -N_{AD}^1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

“基本系” , “第1系” の部材力を図示すると、下図のようになる。



以上をまとめて、一覧表にして計算すると、以下のようになる。

部材	ρ	N_0	\bar{N}_1	$N_0 \cdot \bar{N}_1 \cdot \rho$	$\bar{N}_1^2 \cdot \rho$	$N = N_0 + \bar{N}_1 \cdot X_1$	
	$\times \frac{l}{EA}$	$\times \frac{P}{\sqrt{3}}$	$\times \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\times \frac{P \cdot l}{3EA}$	$\times \frac{l}{3EA}$	$\times \frac{P}{\sqrt{3}}$	部材力
AB	1	-2	1	-2	1	$-2 + \frac{13}{11} = -\frac{9}{11}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{11} P$
AD	1	-2	2	-4	4	$-2 + \frac{26}{11} = \frac{4}{11}$	$\frac{4\sqrt{3}}{33} P$
BC	1	-2	0	0	0	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3} P$
BD	1	2	-2	-4	4	$2 - \frac{26}{11} = -\frac{4}{11}$	$-\frac{4\sqrt{3}}{33} P$
CD	1	1	0	0	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} P$
DE	$\frac{1}{2}$	3	-2	3	2	$3 - \frac{26}{11} = \frac{7}{11}$	$\frac{7\sqrt{3}}{33} P$
Σ				-13	11		

したがって、 $\sum_j \frac{N_0 \cdot \bar{N}_1}{EA} \ell_j = -\frac{13P \cdot \ell}{3EA}$, $\sum_j \frac{\bar{N}_1^2}{EA} \ell_j = \frac{11\ell}{3EA}$ だから、 $X_1 = -\frac{-13P}{11} = \frac{13}{11} P$