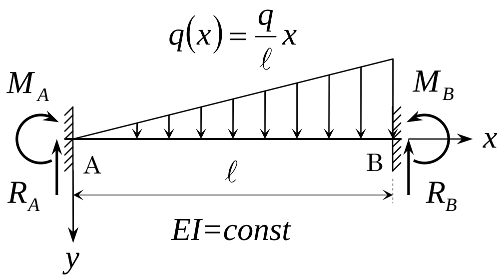
構造力学演習Ⅱ（2017-Report №.１）　　2017/09/05 出題

【問題 BD4-B-4】下図に示すような“A 点，B 点が両端固定の不静定ばり”に等変分布荷重$q(x)$が作用するとき、以下の設問に答えよ。ただし、はりの曲げ剛性は、EI で一定とする。

(1) はりのたわみ角$\theta(x)$とたわみ$y(x)$の式を求めよ。

(2) A 点，B 点それぞれの支点反力R_A， R_Bと支点モーメントM_A， M_Bを求めよ。

(3) 最大のたわみ$y_{\max}$とその発生位置$x_{\max}$を求めよ。



【解答】

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式$EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q(x)=\dfrac{q}{\ell}x$を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$EIy''=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120}+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1，C_2，C_3，C_4を求める。

1) $x=0$のとき、 $y=0$より、　　$C_4=0$

2) $x=0$のとき、$y'=0$より、　　$C_3=0$

3) $x=\ell$のとき、$y=0$より、　　$\dfrac{q}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^5}{120}+\dfrac{C_1}{6}\ell^3+\dfrac{C_2}{2}\ell^2=0\quad\therefore C_1\ell+3C_2=-\dfrac{q\ell^2}{20}$　　………①

4) $x=\ell$のとき、$y'=0$より、　　$\dfrac{q}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^4}{24}+\dfrac{C_1}{2}\ell^2+C_2\ell=0\quad\therefore C_1\ell+2C_2=-\dfrac{q\ell^2}{12}$　　………②

①−②より、　　$C_2=-\dfrac{q\ell^2}{20}+\dfrac{q\ell^2}{12}=\dfrac{-3+5}{60}q\ell^2=\dfrac{q\ell^2}{30}\qquad\therefore C_2=\dfrac{1}{30}q\ell^2$

これを、②に代入すると、$C_1\ell=-\dfrac{q\ell^2}{12}-\dfrac{q\ell^2}{15}=\dfrac{-5-4}{60}q\ell^2=-\dfrac{9}{60}q\ell^2=-\dfrac{3}{20}q\ell^2\quad\therefore C_1=-\dfrac{3}{20}q\ell$

よって、

$$EIy''' = \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{3}{20}q\ell = \frac{q\ell}{20}\cdot\left\{10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 3\right\}$$

$$EIy'' = \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6} - \frac{3}{20}q\ell x + \frac{1}{30}q\ell^2 = \frac{q\ell^2}{60}\cdot\left\{10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 9\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + 2\right\}$$

$$EIy' = \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24} - \frac{3}{40}q\ell x^2 + \frac{1}{30}q\ell^2 x = \frac{q\ell^3}{120}\cdot\left\{5\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 9\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}$$

$$EIy = \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120} - \frac{1}{40}q\ell x^3 + \frac{1}{60}q\ell^2 x^2 = \frac{q\ell^4}{120}\cdot\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - 3\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}$$

したがって、はりのたわみ角$\theta(x)$とたわみ$y(x)$の式は、次のようになる。

$$\boxed{\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24EI} - \frac{3q\ell}{40EI}x^2 + \frac{q\ell^2}{30EI}x = \frac{q\ell^3}{120EI}\cdot\left\{5\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 9\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\} \\ y(x) &= \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120EI} - \frac{q\ell}{40EI}x^3 + \frac{q\ell^2}{60EI}x^2 = \frac{q\ell^4}{120EI}\cdot\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - 3\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\} \end{aligned}}$$

(2) 上記(1)より、せん断力$Q = -EIy'''$，曲げモーメント$M = -EIy''$は、次の式で表される。

$$EIy''' = \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{3}{20}q\ell = \frac{q\ell}{20}\cdot\left\{10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 3\right\}$$

$$EIy'' = \frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6} - \frac{3}{20}q\ell x + \frac{1}{30}q\ell^2 = \frac{q\ell^2}{60}\cdot\left\{10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 9\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + 2\right\}$$

したがって、A点，B点それぞれの支点反力R_A，R_Bと支点モーメントM_A，M_Bは、次のようになる。

$$R_A = Q_A = \left[-EIy'''\right]_{x=0} = -\left[EIy'''\right]_{x=0} = -\left(-\frac{3}{20}q\ell\right) = \frac{3}{20}q\ell$$

$$R_B = -Q_B = -\left[-EIy'''\right]_{x=\ell} = \left[EIy'''\right]_{x=\ell} = \frac{7}{20}q\ell$$

$$M_A = \left[-EIy''\right]_{x=0} = -\left[EIy''\right]_{x=0} = -\frac{1}{30}q\ell^2$$

$$M_B = \left[-EIy''\right]_{x=\ell} = -\left[EIy''\right]_{x=\ell} = -\frac{1}{20}q\ell^2$$

$$\therefore\ \boxed{R_A = \frac{3}{20}q\ell},\ \boxed{R_B = \frac{7}{20}q\ell},\ \boxed{M_A = -\frac{1}{30}q\ell^2},\ \boxed{M_B = -\frac{1}{20}q\ell^2}$$

(3) (1)で得たたわみ角$\theta(x)$の式において、$X = \dfrac{x}{\ell}$として、$\theta(x) = 0$を解くと、

$$5X^4 - 9X^2 + 4X = 0 \qquad \therefore X(X-1)(5X^2+5X-4) = 0$$

ここで、$0 < X < 1$だから、$5X^2 + 5X - 4 = 0$より、$X = \dfrac{-5+\sqrt{105}}{10} = 0.524695076\cdots \cong 0.5247$

よって、$x_{\max} = \dfrac{-5+\sqrt{105}}{10}\ell$のとき、たわみ$y(x)$は、次のような最大たわみ$y_{\max}$となる。

$$y_{\max} = \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \left\{ \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right)^5 - 3 \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right)^2 \cdot \left\{ \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right) + 2 \right\}$$

$$= \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \left(\frac{13-\sqrt{105}}{10} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{13-\sqrt{105}}{10} \right) \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right) - 3 \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{105}}{10} \right) + 2 \right\}$$

$$= \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{-65-105+18\sqrt{105}+150-30\sqrt{105}+200}{100}$$

$$= \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{180-12\sqrt{105}}{100} = \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{45-3\sqrt{105}}{25} = \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{585+315-84\sqrt{105}}{250}$$

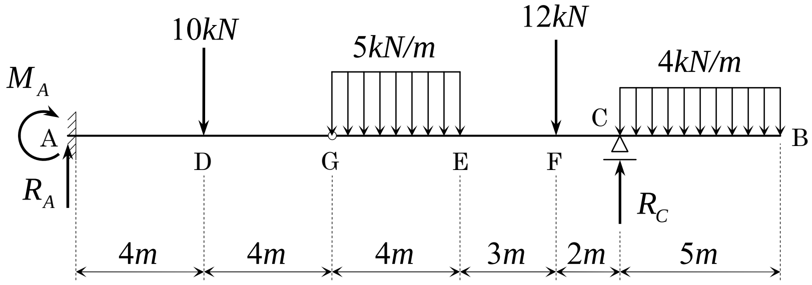
$$= \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{900-84\sqrt{105}}{250} = \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{450-42\sqrt{105}}{125} = 0.157024542\cdots\frac{q\ell^4}{120EI} \cong 0.1570 \cdot \frac{q\ell^4}{120EI}$$

したがって、$\boxed{x_{\max} = \frac{-5+\sqrt{105}}{10}\ell \cong 0.5247\ell}$のとき、$\boxed{y_{\max} = \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{450-42\sqrt{105}}{125} \cong 0.1570 \cdot \frac{q\ell^4}{120EI}}$

【問題 SF-G-4】下図に示す静定ゲルバーばりについて、以下の設問に答えよ。

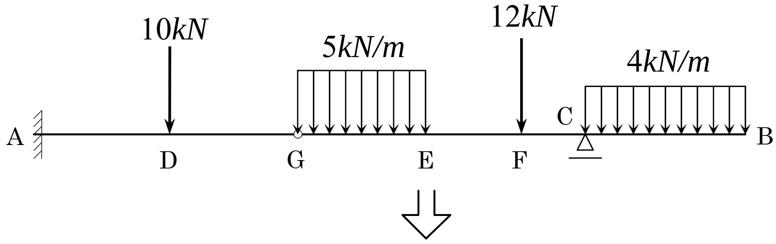
(1) 支点反力 R_A， M_A， R_C を求めよ。

(2) 断面力図、即ち、せん断力図（Q−図），曲げモーメント図（M−図）を図示せよ。

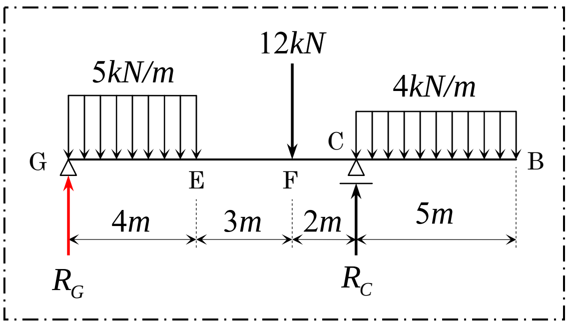


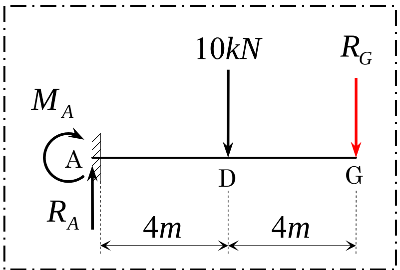
【解答】

(1)静定ゲルバーばりを下図のように〝張出ばり〟と〝片持ばり〟の 2 つに分解して考える。



〝張出ばり〟





〝片持ばり〟

まず、〝張出ばり〟について解くと、

$$R_C + R_G = 5\times4 + 12 + 4\times5 = 52$$

$$R_C \times (4+3+2) = 5\times4\times2 + 12\times(4+3) + 4\times5\times(4+3+2+2.5) \qquad \therefore 9R_C = 40+84+230 = 354$$

$$\therefore R_C = \frac{118}{3} \cong 39.33 \ (kN) \qquad \text{また、} R_G = \frac{156-118}{3} = \frac{38}{3} \cong 12.67 \ (kN)$$

次に、〝片持ばり〟について解くと、

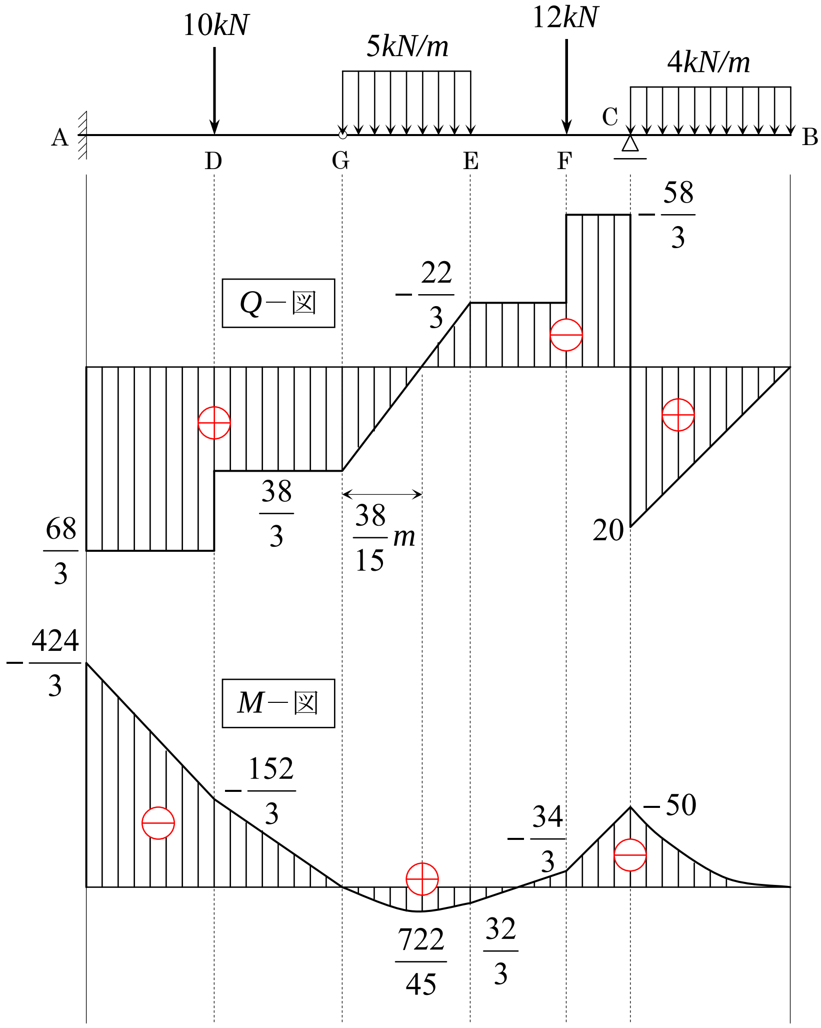
$$R_A = 10 + R_G = 10 + \frac{38}{3} = \frac{68}{3} \cong 22.67 \ (kN)$$

$$M_A + 10\times4 + R_G\times(4+4) = 0 \quad \therefore M_A = -40 - \frac{304}{3} = -\frac{424}{3} \cong -141.33 \ (kN\cdot m)$$

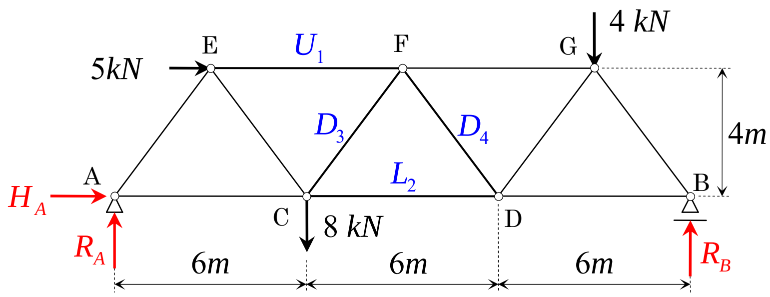
以上より、支点反力 R_A， M_A， R_C をまとめると、次のようになる。

$$\boxed{R_A = \frac{68}{3} \cong 22.67 \ (kN)}, \quad \boxed{M_A = -\frac{424}{3} \cong -141.33 \ (kN\cdot m)}, \quad \boxed{R_C = \frac{118}{3} \cong 39.33 \ (kN)}$$

(2)せん断力図（Qー図），曲げモーメント図（Mー図）を図示すると、下図のようになる。



【問題 SF-T-1】下図に示す静定ワーレントラスの部材力 U_1， D_3， D_4， L_2 を求めよ。



【解答】

まず、支点反力 H_A， R_A， R_B を求めると、

水平方向の力の釣合から、 $H_A+5=0 \quad \therefore H_A=-5\ (kN)$

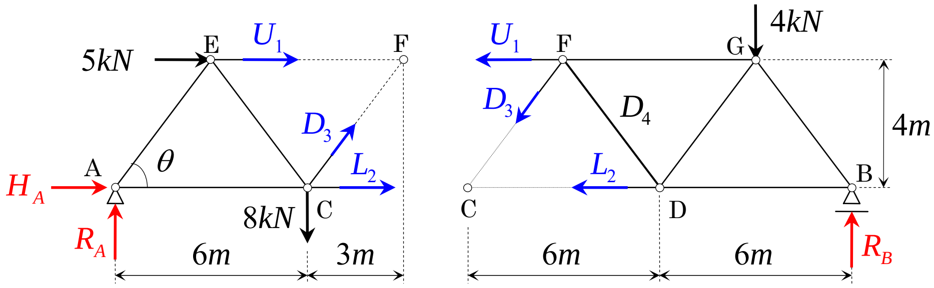
鉛直方向の力の釣合から、 $R_A+R_B=8+4=12$

A 点回りのモーメントの釣合から、

$$R_B\times 18m=8kN\times 6m+4kN\times 15m+5kN\times 4m$$
$$=48+60+20=128$$

$\therefore R_B=\dfrac{128}{18}=\dfrac{64}{9}\ (kN)$ 　　よって、 $R_A=\dfrac{44}{9}\ (kN)$

次に、下図に示すように $t-t$ で切断して、左自由体と右自由体それぞれについて考えると、



$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

［左自由体について］　　　　　　［右自由体について］

水平方向の力の釣合から、

$$H_A+5+U_1+\frac{3}{5}D_3+L_2=0 \qquad U_1+L_2+\frac{3}{5}D_3=0$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5}D_3+R_A=8 \qquad \frac{4}{5}D_3+4=R_B$$

$$\therefore \frac{4}{5}D_3=8-\frac{44}{9}=\frac{28}{9} \qquad \therefore \frac{4}{5}D_3=\frac{64}{9}-4=\frac{28}{9}$$

$$\therefore D_3=\frac{28}{9}\cdot\frac{5}{4}=\frac{35}{9}\ (kN)$$

F 点回りのモーメントの釣合から、

$$4L_2+4H_A+8kN\times 3m=R_A\times 9m \qquad 4L_2+4kN\times 6m=R_B\times 9m$$

$$\therefore 4L_2-20+24=44 \qquad \therefore 4L_2+24=64$$

$$\therefore 4L_2=40$$

$$\therefore L_2=10\ (kN)$$

C 点回りのモーメントの釣合から、

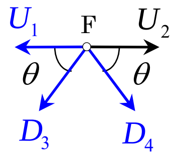
$$4U_1+5kN\times 4m+R_A\times 6m=0 \qquad 4U_1+R_B\times 12m=4kN\times 9m$$

$$\therefore 4U_1 + 20 + \frac{44}{9} \cdot 6 = 0 \qquad \therefore 4U_1 + \frac{64}{9} \cdot 12 = 36$$

$$\therefore 4U_1 = -\frac{88}{3} - 20 = -\frac{148}{3} \qquad \therefore 4U_1 = 36 - \frac{256}{3} = -\frac{148}{3}$$

$$\therefore U_1 = -\frac{148}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{37}{3}\,(kN)$$

さらに、F 点での力の釣合を考えると、



水平方向の力の釣合から、 $U_1 + \frac{3}{5}D_3 = U_2 + \frac{3}{5}D_4$

鉛直方向の力の釣合から、 $\frac{4}{5}D_3 + \frac{4}{5}D_4 = 0$

$$\therefore D_4 = -D_3 = -\frac{35}{9}\,(kN)$$

以上をまとめると、

$\boxed{U_1 = -\frac{37}{3}\,(kN)}$, $\boxed{D_3 = \frac{35}{9}\,(kN)}$, $\boxed{D_4 = -\frac{35}{9}\,(kN)}$, $\boxed{L_2 = 10\,(kN)}$