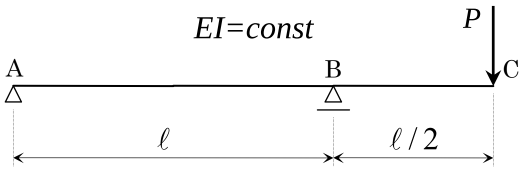
構造力学演習Ⅱ（2017-Report №.２） 2017/09/12 出題

【問題 EL-OB-1】下図に示す“張出ばり”の C 点のたわみ角 θ_C とたわみ y_C を求めよ。ただし、はりの曲げ剛性は EI で一定とする。



【解答】

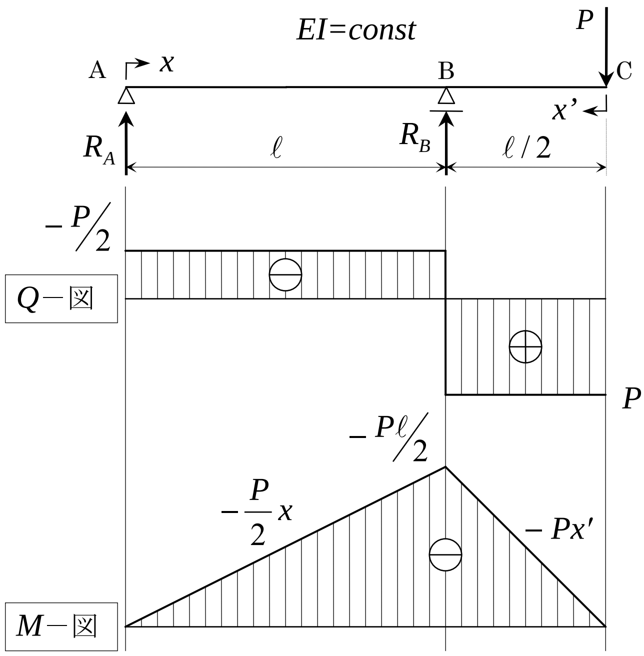
支点反力を R_A， R_B とすると、

$$R_A + R_B = P$$

$$R_B \cdot \ell = P \cdot \left(\ell + \frac{\ell}{2}\right)$$

$$\therefore R_B = \frac{3}{2}P \quad R_A = -\frac{1}{2}P$$

これより、断面力図は、右図のようになる。



次に、〝弾性荷重〟（＝曲げモーメント／曲げ剛性）を求めると、

$$\alpha = -\frac{P\ell}{2EI}$$

また、「張出ばり」の〝共役ばり〟を考えると、

A 点…回転支点　→　回転支点

$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} = 0 \\ \tilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$

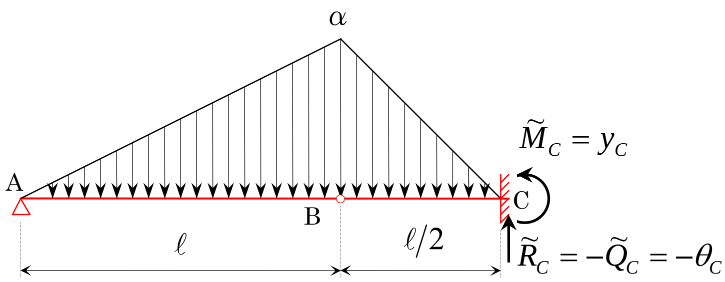
B 点…移動支点　→　ヒンジ

$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta_\ell = \theta_r \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} = 0 \\ \tilde{Q}_\ell = \tilde{Q}_r \end{pmatrix}$$

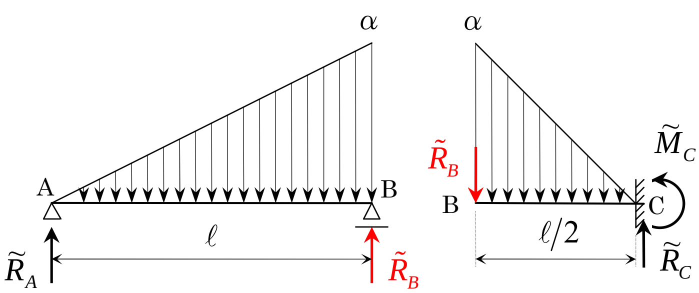
C 点…自由端　→　固定端

$$\begin{pmatrix} y \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} \neq 0 \\ \tilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$

となるから、〝弾性荷重〟を載荷した〝共役ばり〟は、右図のようになる。



これを下図のように「単純ばり」と「片持ばり」に分解して考える。



このとき、支点反力 $\tilde{R}_A$， $\tilde{R}_B$， $\tilde{R}_C$， $\tilde{M}_C$ は、「単純ばり」部分と「片持ばり」部分での釣合条件から次のように求まる。

「単純ばり」部分より、

$$\tilde{R}_A + \tilde{R}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad \tilde{R}_B \cdot \ell = \frac{1}{2}\alpha\ell \cdot \frac{2}{3}\ell = \frac{1}{3}\alpha\ell^2 \qquad \therefore \tilde{R}_B = \frac{1}{3}\alpha\ell,\quad \tilde{R}_A = \frac{1}{6}\alpha\ell$$

「片持ばり」部分より、

$$\tilde{R}_C = \tilde{R}_B + \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}\alpha\ell + \frac{1}{4}\alpha\ell = \frac{7}{12}\alpha\ell \qquad \therefore \boxed{\theta_C = -\tilde{R}_C = -\frac{7}{12}\cdot\left(-\frac{P\ell}{2EI}\right)\cdot\ell = \frac{7}{24}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}}$$

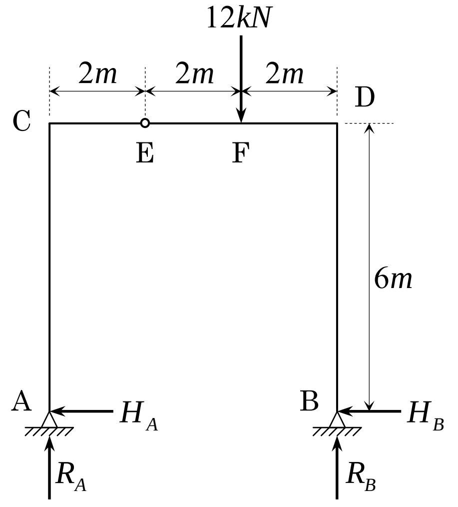
$$\tilde{M}_C + \tilde{R}_B \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \left(\frac{\ell}{2}\cdot\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\therefore -\tilde{M}_C = \frac{1}{3}\alpha\ell \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{12}\alpha\ell^2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)\cdot\alpha\ell^2 = \frac{1}{4}\alpha\ell^2$$

$$\therefore \boxed{y_C = \tilde{M}_C = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{P\ell}{2EI}\right)\cdot\ell^2 = \frac{P\ell^3}{8EI}}$$

【問題 SF-R-3】右図に示す静定ラーメンの軸力図（N－図），せん断力図（Q－図），曲げモーメント図（M－図）を描け。

　なお、ラーメンの曲げモーメントは、部材の内側が引張で変形するような曲げモーメントを正として扱うものとする。また、軸力図はせん断力図の正負と同じ扱いで描くこと。



【解答】

まず、支点反力を求める。

　鉛直方向の力の釣合から、$R_A + R_B = 12$

　水平方向の力の釣合から、$H_A + H_B = 0$

　構造全体について、A 点回りのモーメントの釣合から、$R_B \times 6m = 12kN \times 4m$

　　$\therefore R_B = 8\,kN$ よって、$R_A = 4\,kN$

　右側の構造について、E 点回りのモーメントの釣合から、$R_B \times 4m = 12kN \times 2m + H_B \times 6m$

　　$\therefore H_B = \dfrac{4}{3}kN$ よって、$H_A = -\dfrac{4}{3}kN$

次に、以下のように４つに分解して断面力を求める。

1) A～C 間について、

$N + R_A = 0$

$\therefore N = -R_A = -4$

$Q = H_A = -\dfrac{4}{3}$

$M = H_A \cdot x_1 = -\dfrac{4}{3}x_1$

2) D～(E)F 間について、

$N = H_A = -\dfrac{4}{3}$

$Q = R_A = 4$

$M = H_A \times 6m + R_A \cdot x_2$

$\therefore M = -8 + 4x_2$

3) F～D 間について、

$N + H_B = 0$

$\therefore N = -H_B = -\dfrac{4}{3}$

$Q + R_B = 0$

$\therefore Q = -R_B = -8$

$M + H_B \times 6m = R_B \cdot x_3$

$\therefore M = 8x_3 - 8$

4) D～B 間について、

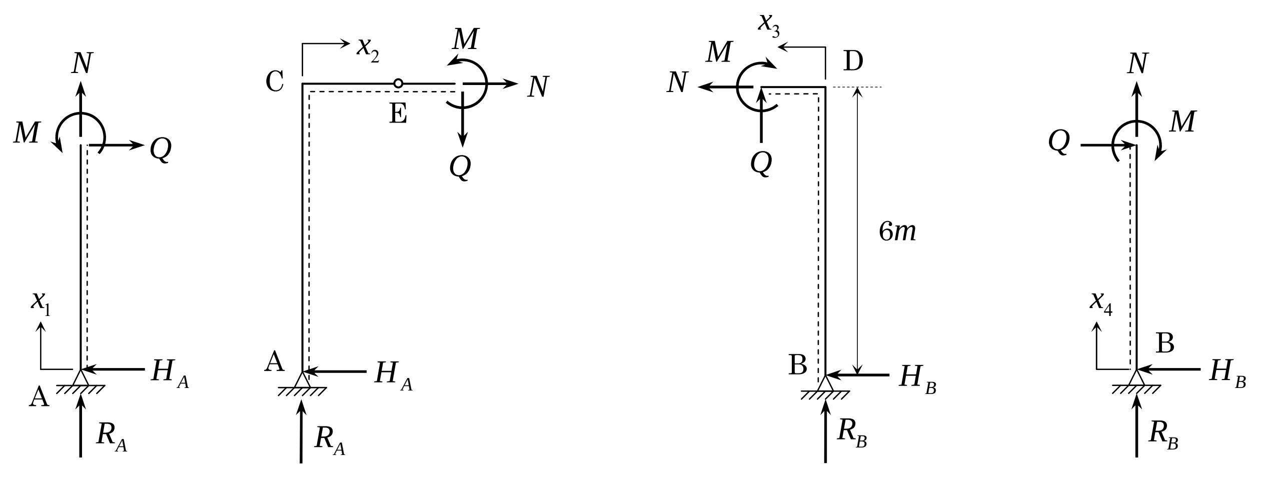
$N + R_B = 0$

$\therefore N = -R_B = -8$

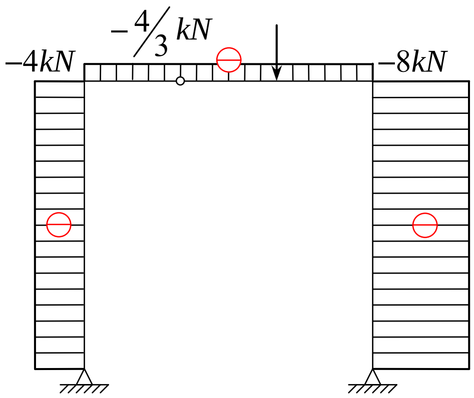
$Q = H_B = \dfrac{4}{3}$

$M + H_B \cdot x_4 = 0$

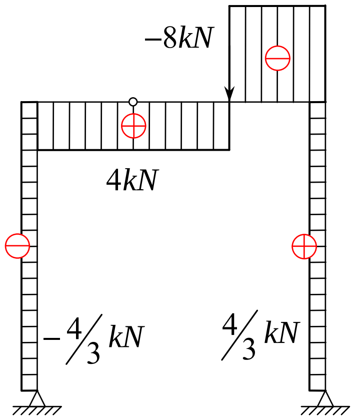
$\therefore M = -H_B \cdot x_4 = -\dfrac{4}{3}x_4$



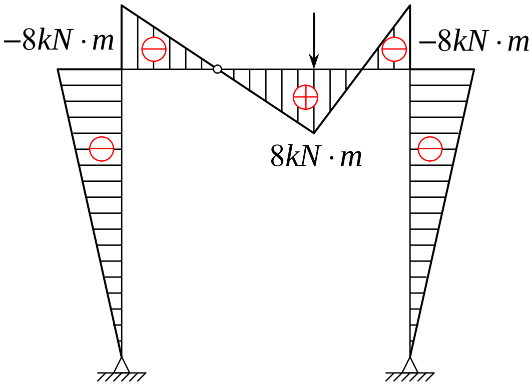
以上より、断面力図を図示すると、下図のようになる。



軸力図



せん断力図

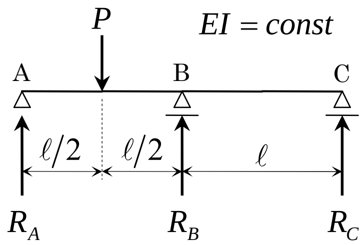


曲げモーメント図

【問題 BD-N-1】下図に示すような曲げ剛性 EI が一定な“連続ばり”について、以下の設問に答えよ。

(1) 支点反力 R_A， R_B， R_C を求めよ。

(2) 断面力図（Q－図，M－図）を図示せよ。



【解答】 《解法 I 》

(1) 連続ばり ABC の支点 B を取り外し、単純ばり化して、次のように考える。

①単純ばり AC に荷重 P が載荷されたときの B 点のたわみ y_B^1 と A, C 点の支点反力 R_A^1， R_C^1 を求める。

②単純ばり AC において、B 点に鉛直上方向に未知の外力 X が作用するときの B 点のたわみ y_B^2 と A, C 点の支点反力 R_A^2， R_C^2 を求める。

③連続ばり ABC においては、B 点のたわみはゼロであるから、①と②で求めた B 点のたわみ y_B^1 と y_B^2 は、大きさが等しく、方向が逆にならなければならない。

④上記③の条件を用いて、②の未知の外力 X の大きさを求めれば、B 点の支点反力 R_B に他ならない。すなわち、 R_B=X である。

⑤上記④で求めた外力 X の大きさを用いて、A, C 点の支点反力 R_A^2，R_C^2 を表せば、連続ばり ABC における A, C 点の支点反力 R_A， R_C は、 $R_A = R_A^1 + R_A^2$， $R_C = R_C^1 + R_C^2$ で求められる。

上記のように考えれば、右図のように、問題は分解され、$\boxed{\text{A}}$と$\boxed{\text{B}}$の状態の和で表される。

まず、$\boxed{\text{A}}$の状態について、A, C 点の支点反力 R_A^1，R_C^1 を求めると、

$$2\ell \cdot R_A^1 = \frac{3}{2}\ell \cdot P \quad \therefore R_A^1 = \frac{3}{4}P$$

$$2\ell \cdot R_C^1 = \frac{1}{2}\ell \cdot P \quad \therefore R_C^1 = \frac{1}{4}P$$

このとき、荷重 P の右側のたわみ y_R は、教科書の表から次のように表される。

$$y_R = \frac{Pa^2b^2}{6EI\ell}\left(2\frac{x'}{b} + \frac{x'}{a} - \frac{x'^3}{ab^2}\right)$$

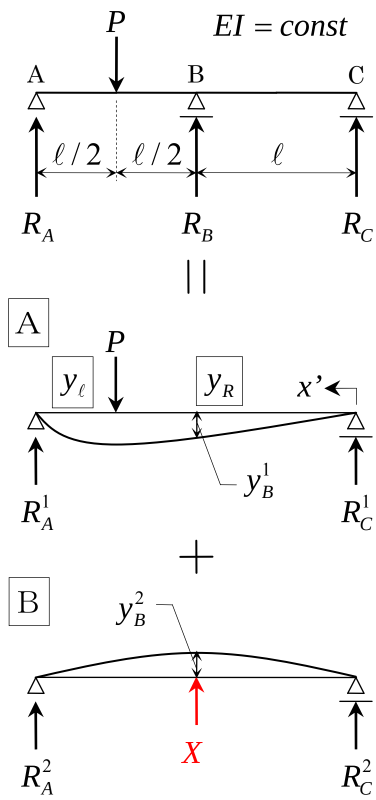
これを用いて、B 点のたわみ y_B^1 を求めるために、

$\ell \to 2\ell$， $a = \dfrac{\ell}{2}$， $b = \dfrac{3}{2}\ell$， $x' = \ell$ とおくと、次のようになる。

$$y_B^1 = \frac{P\frac{1}{4}\ell^2 \cdot \frac{9}{4}\ell^2}{6EI \cdot 2\ell}\left(2\frac{\ell}{\frac{3}{2}\ell} + \frac{\ell}{\frac{1}{2}\ell} - \frac{\ell^3}{\frac{1}{2}\ell \cdot \frac{9}{4}\ell^2}\right)$$

$$= \frac{3P\ell^3}{64EI}\left(2 \cdot \frac{2}{3} + 2 - \frac{8}{9}\right) = \frac{3P\ell^3}{64EI} \cdot \frac{12+18-8}{9}$$

$$= \frac{3P\ell^3}{64EI} \cdot \frac{22}{9} = \frac{11}{96} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$



次に、$\boxed{\mathrm{B}}$の状態について、B 点のたわみ y_B^2 を考えると、

$$y_B^2 = -\frac{X \cdot 8\ell^3}{48EI} = -\frac{X\ell^3}{6EI}$$

ここで、連続ばり ABC においては、B 点のたわみはゼロであるから、

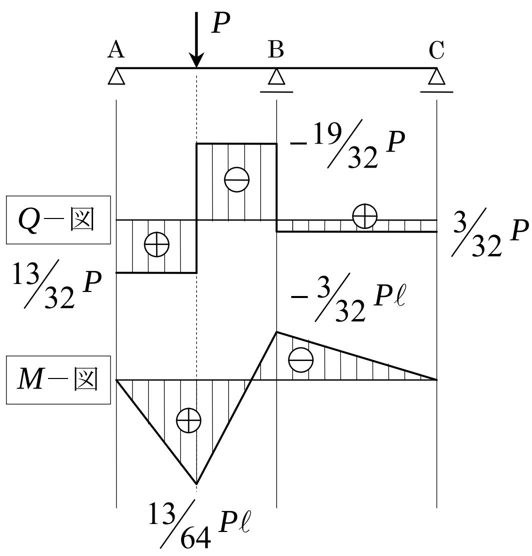
$$y_B^1 + y_B^2 = \frac{11}{96} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} - \frac{X\ell^3}{6EI} = 0 \qquad \therefore X = \frac{6 \cdot 11}{96} P = \frac{11}{16} P$$

また、A, C 点の支点反力 R_A^2, R_C^2 は、$R_A^2 = R_C^2 = -\dfrac{X}{2} = -\dfrac{11}{32} P$

以上より、

$$\boxed{\begin{aligned} R_A &= R_A^1 + R_A^2 = \left(\frac{3}{4} - \frac{11}{32}\right) \cdot P = \frac{24-11}{32} P = \frac{13}{32} P \\ R_B &= X = \frac{11}{16} P \\ R_C &= R_C^1 + R_C^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{11}{32}\right) \cdot P = \frac{8-11}{32} P = -\frac{3}{32} P \end{aligned}}$$

(2) 断面力図（Q－図，M－図）を図示すると、下図のようになる。



【解答】《解法Ⅱ》

(1) 連続ばり ABC の支点 C を取り外し、張出ばり化して、次のように考える。

①張出ばり AC に荷重 P が載荷されたときの B 点のたわみ角 $\theta_B = \theta_{B\ell} = \theta_{Br}$ と A, B 点の支点反力 R_A^1, R_B^1 を求める。

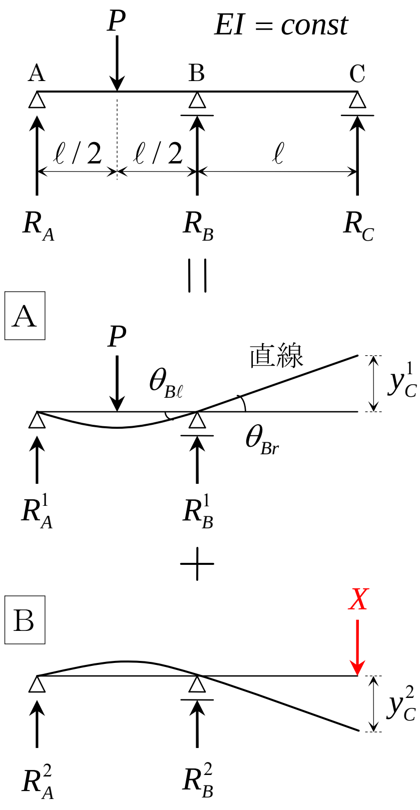
②張出ばり AC において、C 点に鉛直下方向に未知の外力 X が作用するときの C 点のたわみ y_C^2 と A, B 点の支点反力 R_A^2, R_B^2 を求める。

③連続ばり ABC においては、C 点のたわみはゼロであるから、①と②で求めた C 点のたわみ y_C^1 と y_C^2 は、大きさが等しく、方向が逆にならなければならない。

④上記③の条件を用いて、②の未知の外力 X の大きさを求めれば、C 点の支点反力 R_C に他ならない。すなわち、$R_C = -X$ である。

⑤上記④で求めた外力 X の大きさを用いて、A, B 点の支点反力 R_A^2, R_B^2 を表せば、連続ばり ABC における A, B 点の支点反力 R_A, R_B は、$R_A = R_A^1 + R_A^2$, $R_B = R_B^1 + R_B^2$ で求められる。

上記のように考えれば、右図のように、問題は分解され、$\boxed{\mathrm{A}}$ と $\boxed{\mathrm{B}}$ の状態の和で表される。



まず、$\boxed{\mathrm{A}}$ の状態について、A, B 点の支点反力 R_A^1, R_B^1 を求めると、

$$R_A^1 + R_B^1 = P\,,\quad R_A^1 \ell = P \cdot \frac{\ell}{2} \qquad \therefore R_A^1 = R_B^1 = \frac{P}{2}$$

このとき、B 点のたわみ角 θ_B は、教科書の表から、

$$\theta_B = -\frac{P\ell^2}{16EI} \qquad \therefore \theta_{B\ell} = \theta_{Br} = -\frac{P\ell^2}{16EI}$$

これを用いて、C 点のたわみ y_C^1 を求めると、次のようになる。

$$y_C^1 = \theta_{Br} \cdot \ell = -\frac{P\ell^3}{16EI}$$

次に、$\boxed{\mathrm{B}}$ の状態について、A, B 点の支点反力 R_A^2, R_B^2 を求めると、

$$R_A^2 + R_B^2 = X\,,\quad R_B^2 \ell = X \cdot 2\ell$$

$$\therefore R_A^2 = -X\,,\quad R_B^2 = 2X$$

このとき、BC 間のたわみ y_1 は、教科書の表から、

$$y_1 = \frac{P\ell^3}{6EI} \cdot \frac{x_1}{\ell} \cdot \left(2\frac{a}{\ell} + 3\frac{a}{\ell} \cdot \frac{x_1}{\ell} - \frac{x_1^2}{\ell^2} \right)$$

と表され、$P = X$, $a = \ell$, $x_1 = \ell$ とおくと、C 点のたわみ y_C^2 は、次のようになる。

$$y_C^2 = \frac{X\ell^3}{6EI} \cdot \frac{\ell}{\ell} \cdot \left(2\frac{\ell}{\ell} + 3\frac{\ell}{\ell} \cdot \frac{\ell}{\ell} - \frac{\ell^2}{\ell^2} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{X\ell^3}{EI}$$

ここで、連続ばり ABC においては、C 点のたわみはゼロであるから、

$$y_C^1 + y_C^2 = -\frac{P\ell^3}{16EI} + \frac{2}{3} \cdot \frac{X\ell^3}{EI} = 0 \qquad \therefore X = \frac{P\ell^3}{16EI} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{EI}{\ell^3} = \frac{3}{32} P$$

以上より、$\boxed{\begin{array}{l} R_A = R_A^1 + R_A^2 = \dfrac{1}{2}P - X = \dfrac{1}{2}P - \dfrac{3}{32}P = \dfrac{16-3}{32}P = \dfrac{13}{32}P \\ R_B = R_B^1 + R_B^2 = \dfrac{1}{2}P + 2X = \dfrac{1}{2}P + \dfrac{3}{16}P = \dfrac{8+3}{16}P = \dfrac{11}{16}P \\ R_C = -X = -\dfrac{3}{32}P \end{array}}$

(2) 断面力図（Q－図，M－図）を図示すると、下図のようになる。《解法Ⅰの(2)と同じなので省略》

【解答】《解法Ⅲ》

(1) 連続ばり ABC では、支点 B に曲げモーメントが発生する。そこで、支点 B に曲げモーメント M_B が作用する２つの単純ばり化して、次のように考える。

①単純ばり AB に荷重 P と B 点に未知の曲げモーメント M_B が作用するときの B 点のたわみ角 $\theta_{B\ell}$ を求める。

②単純ばり BC において、B 点に未知の曲げモーメント M_B が作用するときの B 点のたわみ角 θ_{Br} を求める。

③連続ばり ABC においては、B 点のたわみ角は等しいから、①と②で求めた B 点のたわみ角 $\theta_{B\ell}$ と θ_{Br} は、$\theta_{B\ell}=\theta_{Br}$ でなければならない。

④上記③の条件を用いて、未知の曲げモーメント M_B の大きさを求める。

⑤上記④で求めた曲げモーメント M_B を用いて、

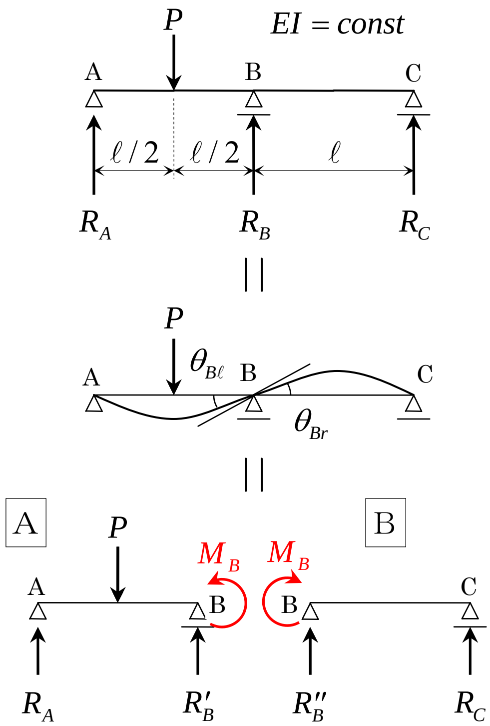
a) ①の場合の $A,\ B$ 点の支点反力 R_A，R'_B を求める。

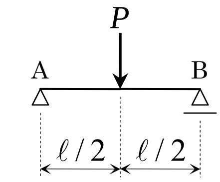
b) ②の場合の $B,\ C$ 点の支点反力 R''_B，R_C を求める。

c) 連続ばり ABC における B 点の支点反力 R_B は、$R_B=R'_B+R''_B$ で求められる。

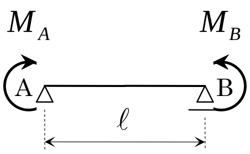
上記のように考えれば、右下図のように、問題は分解され、$\boxed{\text{A}}$ と $\boxed{\text{B}}$ の状態の和で表される。

ここで、下図のような場合のたわみ角は、教科書の表から、次のように表される。





$$\theta_A=-\theta_B=\frac{P\ell^2}{16EI}$$



$$\theta_A=\frac{\ell}{6EI}\left(2M_A+M_B\right)$$

$$\theta_B=\frac{-\ell}{6EI}\left(M_A+2M_B\right)$$

したがって、B 点のたわみ角 $\theta_{B\ell}$ と θ_{Br} は、次のようになる。

$$\theta_{B\ell}=-\frac{P\ell^2}{16EI}-\frac{\ell}{6EI}\cdot 2M_B$$

$$\theta_{Br}=\frac{\ell}{6EI}\cdot 2M_B$$

いま、$\theta_{B\ell}=\theta_{Br}$ であるから、

$$-\frac{P\ell^2}{16EI}-\frac{M_B\ell}{3EI}=\frac{M_B\ell}{3EI}\qquad \therefore\frac{2M_B\ell}{3EI}=-\frac{P\ell^2}{16EI}\qquad \therefore M_B=-\frac{P\ell^2}{16EI}\cdot\frac{3EI}{2\ell}=-\frac{3}{32}P\ell$$

そこで、$\boxed{\text{A}}$ の状態について、$A,\ B$ 点の支点反力 R_A，R'_B を求めると、

$$R_A\ell=P\cdot\frac{\ell}{2}+M_B\qquad \therefore R_A=\frac{P}{2}-\frac{3}{32}P=\frac{13}{32}P$$

$$R_A+R'_B=P\qquad \therefore R'_B=P-R_A=P-\frac{13}{32}P=\frac{19}{32}P$$

次に、$\boxed{\text{B}}$ の状態について、$B,\ C$ 点の支点反力 R''_B，R_C を求めると、

$$R_C\ell=M_B\qquad \therefore R_C=\frac{M_B}{\ell}=-\frac{3}{32}P$$

$$R_C+R''_B=0\qquad \therefore R''_B=-R_C=\frac{3}{32}P$$

したがって、連続ばり ABC における B 点の支点反力 R_B は、$R_B = R'_B + R''_B$ から、

$$R_B = R'_B + R''_B = \frac{19}{32}P + \frac{3}{32}P = \frac{22}{32}P = \frac{11}{16}P$$

以上より、

$$\boxed{\begin{aligned} R_A &= \frac{13}{32}P \\ R_B &= \frac{11}{16}P \\ R_C &= -\frac{3}{32}P \end{aligned}}$$

〔***Check***〕

〝3連モーメントの定理〟を適用すると、$\dfrac{4\ell}{I}M_B = 6E \cdot \left(-\dfrac{P\ell^2}{16EI}\right)$

$$\therefore M_B = -\frac{3}{8} \cdot \frac{P\ell^2}{I} \cdot \frac{I}{4\ell} = -\frac{3}{32}P\ell$$

⑵ 断面力図（Q−図，M−図）を図示すると、下図のようになる。《解法Ⅰの⑵と同じなので省略》