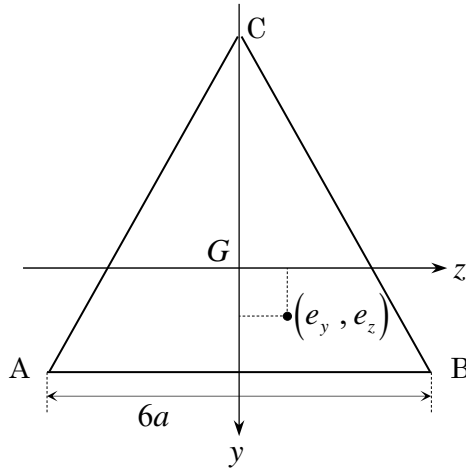


【問題 CM-CS-3】

下図に示す一辺の長さが $6a$ の“正三角形断面” ABC の“断面の核”を求め、図示せよ。



【解答】

図に示す重心 G を通る y, z 軸は主軸となるから、 z 軸に関する断面 2 次モーメント I_y, I_z は、次のようになる。

$$\frac{1}{2} I_y = \frac{3\sqrt{3}a \cdot (3a)^3}{36} + \left(\frac{1}{2} \times 3\sqrt{3}a \times 3a \right) \times (a)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} a^4 + \frac{9\sqrt{3}}{2} a^4 = \frac{27\sqrt{3}}{4} a^4 \quad \therefore I_y = \frac{27\sqrt{3}}{2} a^4$$

$$I_z = \frac{6a \cdot (3\sqrt{3}a)^3}{36} = \frac{27 \cdot 3\sqrt{3}}{6} a^4 = \frac{27\sqrt{3}}{2} a^4$$

また、断面積 A は、 $A = \frac{1}{2} \times 6a \times 3\sqrt{3}a = 9\sqrt{3}a^2$ だから、 y, z 軸に関する回転半径をそれぞれ r_y, r_z とすると、

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{27\sqrt{3}}{2} a^4}{9\sqrt{3}a^2} = \frac{3}{2} a^2 \qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{27\sqrt{3}}{2} a^4}{9\sqrt{3}a^2} = \frac{3}{2} a^2$$

ここで、載荷荷重の偏心位置を (e_y, e_z) とすると、中立軸は、 $1 + \frac{e_y}{r_y^2} y + \frac{e_z}{r_z^2} z = 0$ と表され、

中立軸が y, z 軸と交わる点すなわち切片 n_y, n_z は、次のようになる。

$$n_y = -\frac{r_z^2}{e_y}, \quad n_z = -\frac{r_y^2}{e_z} \qquad \text{逆に、} \quad e_y = -\frac{r_z^2}{n_y}, \quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z}$$

よって、“断面の核”の端の位置を決めるためには、中立軸が次の 2 通り (3 通り) の限界位置にある場合について、載荷荷重の偏心位置 (e_y, e_z) を求めればよい。

(1) 中立軸が AB となる時、切片は、 $n_y = \sqrt{3}a, n_z = \pm\infty$ となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{\sqrt{3}a} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} a = -\frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{\pm\infty} = 0$$

$$\therefore (e_y, e_z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} a, 0 \right)$$

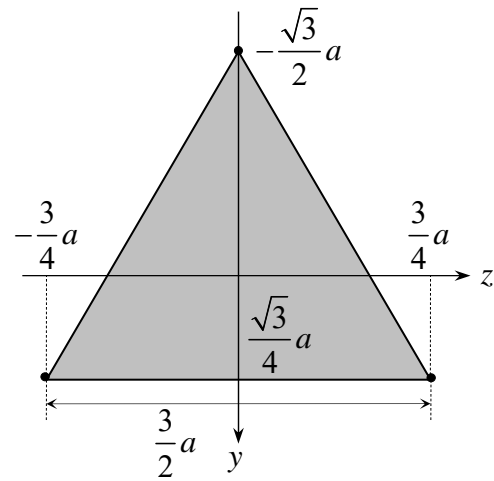
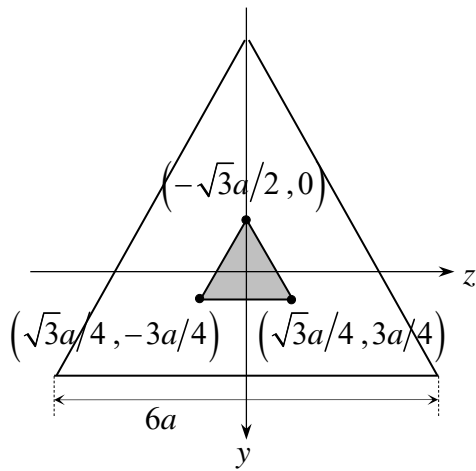
(2) 中立軸が BC または AC となる時、切片は、 $n_y = -2\sqrt{3}a$ 、 $n_z = \pm 2a$ となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{-2\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{\pm 2a} = \mp \frac{3}{4}a$$

$$\therefore (e_y, e_z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a, \mp \frac{3}{4}a \right)$$

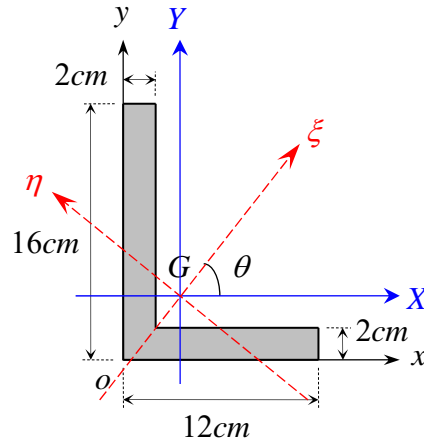
以上をまとめて、「断面の核」を塗りつぶして図示すると下図のようになる。



『断面の核』拡大図
 (一辺 $\frac{3}{2}a$ の正三角形)

【問題 CS-L-3】 下図に示す“L型断面”について、以下の設問に答えよ。

- (1) L型断面の重心 $G(x_G, y_G)$ を求めよ。
- (2) 重心 $G(x_G, y_G)$ を通る X 軸に関する断面 2 次モーメント I_X を求めよ。
- (3) 重心 $G(x_G, y_G)$ を通る Y 軸に関する断面 2 次モーメント I_Y を求めよ。
- (4) 重心 $G(x_G, y_G)$ を通る X, Y 軸に関する断面相乗モーメント I_{XY} を求めよ。
- (5) 主軸 ξ, η の方向 θ を求めよ。
- (6) 主断面 2 次モーメント I_1, I_2 を求めよ。



【解答】

右図に示すように L 型断面を $PL. I$ と $PL. II$ の 2 つの長方形断面要素に分けて考える。

(1)~(4) 重心 $G(x_G, y_G)$ を通る X, Y 軸に関する断面 2 次モーメント I_X, I_Y および断面相乗モーメント I_{XY} は、次のような手順で求める。

① o - xy 座標系において、重心 $G(x_G, y_G)$ を求める。

② G - XY 座標系において、 X, Y 軸に関する断面 2 次モーメント I_X, I_Y および断面相乗モーメント I_{XY} を求める。

その際には、次のような関係を用いる。

$$x_G = \frac{G_y}{A} \quad y_G = \frac{G_x}{A}$$

ここに、 A : 断面積, x_G, y_G : 重心の x, y 座標

G_x, G_y : x, y 軸に関する断面 1 次モーメント

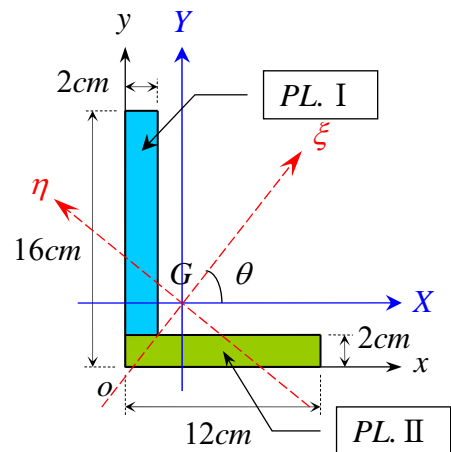
$$I_X = I_x + A \cdot y_G^2 \quad I_Y = I_y + A \cdot x_G^2 \quad I_{XY} = I_{xy} + A \cdot x_G \cdot y_G$$

ここに、 A : 断面積, x_G, y_G : X, Y 軸の o - yz 座標系における x, y 座標

I_x, I_y, I_{xy} : x, y 軸に関する断面 2 次モーメントおよび断面相乗モーメント

I_X, I_Y, I_{XY} : X, Y 軸に関する断面 2 次モーメントおよび断面相乗モーメント

以上を表にして計算を行うと、以下のようになる。



	各要素の 断面積 A_i	各要素の 重心位置 y_G^i	各要素の 断面 1 次モーメント $G_x^i = A_i \cdot y_G^i$	各要素重心と全体重心の 偏心による断面 2 次モーメント $A_i \cdot (y_G^i - y_G)^2$	各要素の重心に関 する断面 2 次モーメント $I_{x_G}^i$
PL. I	$2 \times 14 = 28$	$2 + \frac{14}{2} = 9$	$28 \times 9 = 252$	$28 \cdot \left(9 - \frac{69}{13}\right)^2 \cong 381.73$	$\frac{2 \cdot 14^3}{12} \cong 457.33$
PL. II	$12 \times 2 = 24$	$\frac{2}{2} = 1$	$24 \times 1 = 24$	$24 \cdot \left(1 - \frac{69}{13}\right)^2 \cong 445.35$	$\frac{12 \cdot 2^3}{12} = 8$
合計	$A = 52$		$G_x = 276$	$A \cdot (y_G)^2 \cong 827.08$	$I_{x_G} \cong 465.33$

$$y_G = \frac{G_x}{A} = \frac{276}{52} = \frac{69}{13} \cong 5.31(\text{cm})$$

$$I_Z = I_{z_G} + A \cdot (y_G)^2 \cong 465.33 + 827.08 = 1292.41(\text{cm}^4)$$

	各要素の 断面積 A_i	各要素の 重心位置 z_G^i	各要素の 断面 1 次モーメント $G_y^i = A_i \cdot z_G^i$	各要素重心と全体重心の 偏心による断面 2 次モーメント $A_i \cdot (z_G^i - z_G)^2$	各要素の重心に関 する断面 2 次モーメント $I_{y_G}^i$
PL. I	28	$\frac{2}{2} = 1$	$28 \times 1 = 28$	$28 \cdot \left(1 - \frac{43}{13}\right)^2 \cong 149.11$	$\frac{14 \cdot 2^3}{12} \cong 9.33$
PL. II	24	$\frac{12}{2} = 6$	$24 \times 6 = 144$	$24 \cdot \left(6 - \frac{43}{13}\right)^2 \cong 173.96$	$\frac{2 \cdot 12^3}{12} = 288$
合計	$A = 52$		$G_y = 172$	$A \cdot (z_G)^2 \cong 323.08$	$I_{y_G} \cong 297.33$

$$z_G = \frac{G_y}{A} = \frac{172}{52} = \frac{43}{13} \cong 3.31(\text{cm})$$

$$I_Y = I_{y_G} + A \cdot (z_G)^2 \cong 323.08 + 297.33 = 620.41(\text{cm}^4)$$

	各要素の 断面積 A_i	各要素の 重心位置 y_G^i	各要素の 重心位置 x_G^i	各要素重心と全体重心の 偏心による断面相乗モーメント $A_i \cdot (y_G^i - y_G) \cdot (x_G^i - x_G)$	各要素の重心に関する 断面相乗モーメント $I_{x_G y_G}^i$
PL. I	28	9	1	$28 \cdot \left(9 - \frac{69}{13}\right) \cdot \left(1 - \frac{43}{13}\right)$ $\cong -238.58$	0 〔各要素は、要素重心に 関して点対称だから〕
PL. II	24	1	6	$12 \cdot \left(1 - \frac{69}{13}\right) \cdot \left(6 - \frac{43}{13}\right)^2$ $\cong -278.34$	0 〔各要素は、要素重心に 関して点対称だから〕
合計	$A = 52$			$A \cdot (y_G) \cdot (x_G) \cong -516.92$	$I_{x_G y_G} = 0$

$$I_{XY} = I_{x_G y_G} + A \cdot (y_G) \cdot (x_G) \cong 0 + (-516.92) = -516.92(\text{cm}^4)$$

以上をまとめると、

$$y_G = \frac{69}{13} \cong 5.31(\text{cm})$$

$$z_G = \frac{43}{13} \cong 3.31(\text{cm})$$

$$I_X = 1292.41(\text{cm}^4)$$

$$I_Y = 620.41(\text{cm}^4)$$

$$I_{YZ} = -516.92(\text{cm}^4)$$

(5) 主軸 ξ , η の方向 θ は、 $\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2I_{XY}}{I_Y - I_X}$ で表されるから、

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{-2 \times 516.92}{620.41 - 1292.41} \right) \cong \frac{1}{2} \tan^{-1}(1.538462) = 0.494210553(\text{radian}) = 28.48807(^{\circ})$$

$$\therefore \theta \cong 28.5(^{\circ})$$

(6) 主断面 2 次モーメント I_1, I_2 は、 $\left. \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$ で表されるから、

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2}(1292.41 + 620.41) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1292.41 - 620.41)^2 + 4 \times (-516.92)^2} \\ &= 956.41 \pm 616.53 \\ &= \begin{cases} 1572.94 \\ 339.88 \end{cases} (cm^4) \end{aligned} \quad \therefore \boxed{\begin{cases} I_1 = 1572.94 \\ I_2 = 339.88 \end{cases} (cm^4)}$$

【check】

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \quad \dots\dots(14)$$

$$I_\eta = \int_A \xi^2 dA = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \quad \dots\dots(15)$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \quad \dots\dots(16)$$

上記の式に、 $I_x = 1292.41 (cm^4)$, $I_y = 620.41 (cm^4)$, $I_{yz} = -516.92 (cm^4)$, $\theta \cong 28.5(^{\circ})$ を代入すると、

$$\begin{aligned} I_\xi &\cong \frac{1}{2}(1292.41 + 620.41) + \frac{1}{2}(1292.41 - 620.41)\cos(2 \times 28.5) - (-516.92)\sin(2 \times 28.5) \\ &\cong 956.41 + 182.99 + 433.52 \cong 1572.92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_\eta &\cong \frac{1}{2}(1292.41 + 620.41) - \frac{1}{2}(1292.41 - 620.41)\cos(2 \times 28.5) + (-516.92)\sin(2 \times 28.5) \\ &\cong 956.41 - 182.99 - 433.52 \cong 339.90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\xi\eta} &\cong \frac{1}{2}(1292.41 - 620.41)\sin(2 \times 28.5) + (-516.92)\cos(2 \times 28.5) \\ &\cong 281.29 - 281.54 \cong -0.25 \end{aligned}$$

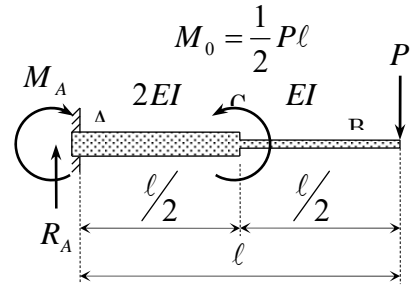
となり、正確には、 $I_\xi = I_1$, $I_\eta = I_2$, $I_{\xi\eta} = 0$ となる。

これより、軸 ξ が「強軸」、軸 η が「弱軸」であることがわかる。

【問題 EL-HCL-3】右図に示すような変断面片持ばりの先端 B 点に集中荷重 P ，C 点に集中曲げモーメント $M_0 = \frac{1}{2}Pl$ が作用するとき、以下の設問に答えよ。

ただし、はりの曲げ剛性は、A～C 間が $2EI$ ，C～B 間が EI とする。

- (1) 支点反力 R_A と支点曲げモーメント M_A を求めよ。
- (2) せん断力図 (Q -図) と曲げモーメント図 (M -図) を図示せよ。
- (3) “弾性荷重” を載荷した “共役ばり” を図示せよ。
- (4) B 点のたわみ y_B とたわみ角 θ_B を求めよ。
- (5) C 点のたわみ y_C とたわみ角 θ_C を求めよ。



【解答】

- (1) 支点反力 R_A と支点曲げモーメント M_A を求める。

鉛直方向の力の釣合から、 $R_A = P$

A 点回りのモーメントの釣合から、

$$M_A + P \cdot l = M_0 = \frac{1}{2}Pl$$

$$\therefore \boxed{R_A = P}, \quad \boxed{M_A = -\frac{1}{2}Pl}$$

- (2) せん断力図 (Q -図) と曲げモーメント図 (M -図) を図示すると、右図のようになる。

- (3) “弾性荷重” を載荷した “共役ばり” を図示すると、右図のようになる。

- (4) B 点のたわみ y_B とたわみ角 θ_B を求めるために、“弾性荷重” を載荷した “共役ばり” の B 点の支点反力 \tilde{R}_B と支点曲げモーメント \tilde{M}_B を求める。

鉛直方向の力の釣合から、

$$\tilde{R}_B = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot \frac{l}{2}$$

$$\therefore \tilde{R}_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \alpha l = \frac{3}{4} \alpha l = -\frac{3}{16} \cdot \frac{Pl^2}{EI} = -\theta_B$$

B 点回りのモーメントの釣合から、

$$\begin{aligned} \tilde{M}_B + \left(\frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot \frac{l}{2}\right) \cdot \left(\frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \\ + \left(\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{l}{2}\right) \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = 0 \end{aligned}$$

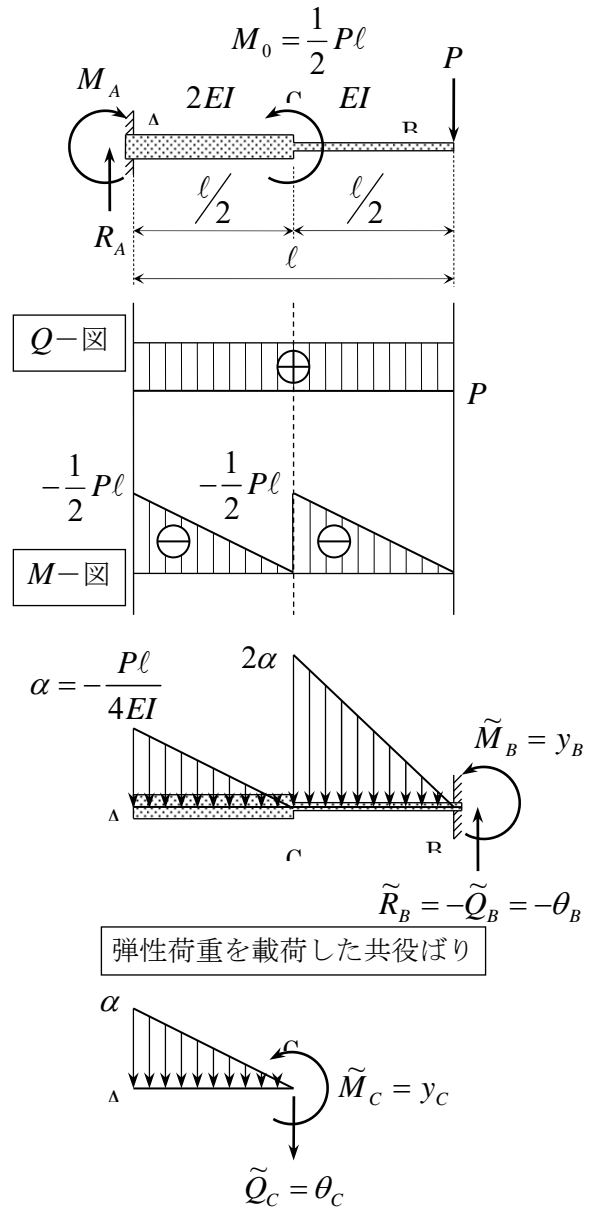
$$\therefore \tilde{M}_B + \frac{1}{6} \alpha l^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \alpha l^2 = 0$$

$$\tilde{M}_B = -\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{24}\right) \cdot \alpha l^2 = -\frac{3}{8} \alpha l^2$$

$$\therefore \begin{aligned} &= \frac{3}{32} \cdot \frac{Pl^3}{EI} = y_B \end{aligned}$$

したがって、 $\boxed{\theta_B = \frac{3}{16} \cdot \frac{Pl^2}{EI}}, \quad \boxed{y_B = \frac{3}{32} \cdot \frac{Pl^3}{EI}}$

- (5) 右最下図のように考えて、C 点のたわみ y_C とたわみ角 θ_C を求める。



鉛直方向の力の釣合から、 $\tilde{Q}_c + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \quad \therefore \tilde{Q}_c = -\frac{1}{4} \alpha \ell = \frac{1}{16} \cdot \frac{P \ell^2}{EI} = \theta_c$

C点回りのモーメントの釣合から、 $\tilde{M}_c + \left(\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\ell}{2}\right) \cdot \left(\frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = 0 \quad \therefore \tilde{M}_c = -\frac{1}{12} \alpha \ell^2 = \frac{1}{48} \cdot \frac{P \ell^3}{EI} = y_c$

したがって、 $\theta_c = \frac{1}{16} \cdot \frac{P \ell^2}{EI}$, $y_c = \frac{1}{48} \cdot \frac{P \ell^3}{EI}$