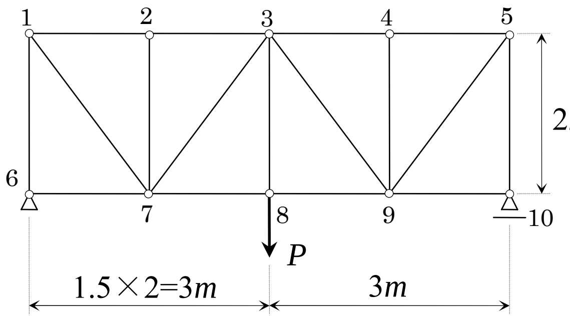
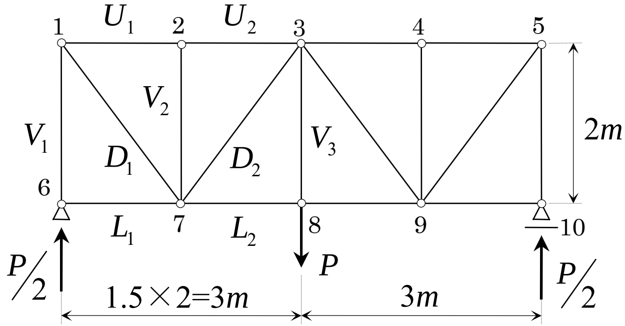
構造力学演習Ⅱ（2017-Report №.４）　　2017/10/03 出題

【問題 CM-BT-3】下図のトラスは、直径（外径）$50mm$，肉厚 $2mm$ の鋼管で作られている。漸次増加する荷重 P が何 $tonf$ に達したとき、どの部材が座屈するか。
ただし、鋼のヤング率 $E = 2.1 \times 10^6\ kgf / cm^2$ とする。



【解答】



右図のように、トラス構造と荷重の対称性より、部材力 U_1，U_2，V_1，V_2，V_3，D_1，D_2，L_1，L_2 を求めて、最大圧縮力とそれが作用する部材を調べる。
部材力の算定には、〝節点法〟を用いる。

点６での釣合から、$V_1 = -\dfrac{P}{2}$ 　　$L_1 = 0$

点１での釣合から、

$$V_1 + \frac{4}{5}D_1 = 0 \qquad \therefore D_1 = -\frac{5}{4}V_1 = \frac{5}{8}P$$

$$U_1 + \frac{3}{5}D_1 = 0 \qquad \therefore U_1 = -\frac{3}{5}D_1 = -\frac{3}{8}P$$

点２での釣合から、$U_2 = U_1 = -\dfrac{3}{8}P$ 　　$V_2 = 0$

点７での釣合から、

$$V_2 + \frac{4}{5}\left(D_1 + D_2\right) = 0 \qquad \therefore D_2 = -D_1 = -\frac{5}{8}P$$

$$L_1 + \frac{3}{5}D_1 = L_2 + \frac{3}{5}D_2 \qquad \therefore L_2 = L_1 + \frac{3}{5}\left(D_1 - D_2\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{8}P + \frac{5}{8}P\right) = \frac{3}{4}P$$

点８での釣合から、$V_3 = P$

座屈は、圧縮力が作用する部材 3-7 または部材 1-2（2-3）または部材 1-6 で発生する可能性がある。しかし、部材 3-7 は、部材 1-2（2-3）や部材 1-6 よりも長く、かつ、その部材力（圧縮）が大きい。

よって、座屈は、部材 3-7 または部材 3-9 で発生し、その部材力は $-\dfrac{5}{8}P$ である。

したがって、座屈荷重 P_{CR} は、次のようになる。

$$\frac{5}{8}P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 \times 2.1 \times 10^6 \times \dfrac{\pi \cdot \left(5^4 - 4.6^4\right)}{64}}{\left(250\right)^2}$$

$$\boxed{\therefore P_{CR} = \frac{\pi^3 \times 2.1 \times 10^6 \times \left(5^4 - 4.6^4\right) \times 8}{5 \times 250^2 \times 64} = 4616.639135 \cdots \left(kgf\right) \cong 4.62\left(tonf\right)}$$

【問題 EL-OB-2】右下図に示すような“張出ばり”の D 点に集中荷重 P が作用するとき、

(1) せん断力図（Q-図），曲げモーメント図（M-図）を図示せよ。

(2) 〝弾性荷重〟が載荷された〝共役ばり〟を図示せよ。

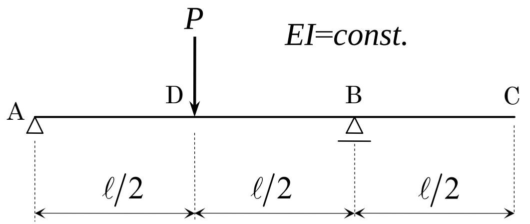
(3) 次のたわみ角とたわみを求めよ。

① A 点のたわみ角 θ_A と B 点のたわみ角 θ_B

② C 点のたわみ角 θ_C とたわみ v_C

③ D 点のたわみ v_D

ただし、はりの曲げ剛性は EI で一定とする。



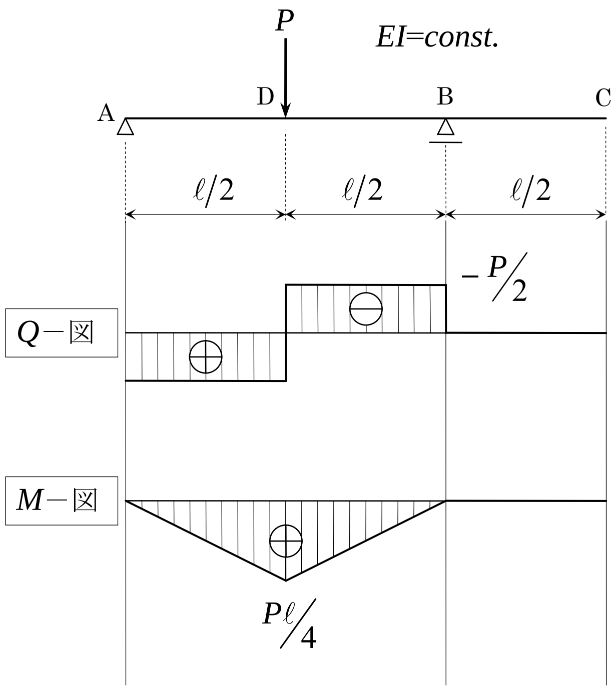
【解答】

(1) 支点反力を R_A， R_B とすると、

$$R_A + R_B = P \qquad R_B \cdot \ell = P \cdot \frac{\ell}{2}$$

$$\therefore R_B = \frac{1}{2}P = R_A$$

これより、断面力図は、右図のようになる。



(2) 次に、〝弾性荷重〟（＝曲げモーメント／曲げ剛性）を求めると、

$$\alpha = \frac{P\ell}{4EI}$$

また、「張出ばり」の〝共役ばり〟を考えると、

A 点…回転支点　→　回転支点

$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} = 0 \\ \tilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$

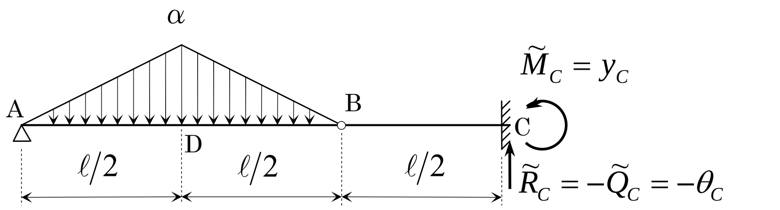
B 点…移動支点　→　ヒンジ

$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta_\ell = \theta_r \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} = 0 \\ \tilde{Q}_\ell = \tilde{Q}_r \end{pmatrix}$$

C 点…自由端　→　固定端

$$\begin{pmatrix} y \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} \neq 0 \\ \tilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$

となるから、〝弾性荷重〟を載荷した〝共役ばり〟は、右図のようになる。



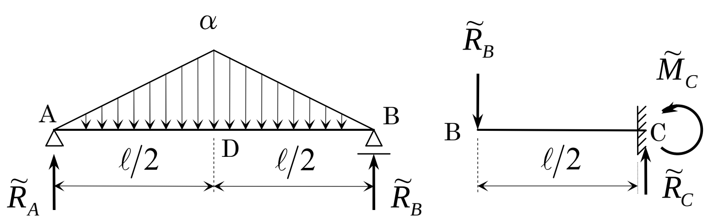
(3) これを下図のように「単純ばり」と「片持ばり」に分解して考える。

このとき、支点反力 $\tilde{R}_A$， $\tilde{R}_B$， $\tilde{R}_C$， $\tilde{M}_C$ は、「単純ばり」部分と「片持ばり」部分での釣合条件から次のように求まる。

「単純ばり」部分より、

$$\tilde{R}_A + \tilde{R}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad \tilde{R}_B \cdot \ell = \frac{1}{2}\alpha\ell \cdot \frac{1}{2}\ell$$

$$\therefore \tilde{R}_B = \frac{1}{4}\alpha\ell = \tilde{R}_A$$



「片持ばり」部分より、

$$\tilde{R}_C = \tilde{R}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad \tilde{M}_C + \tilde{R}_B \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \qquad \therefore \tilde{M}_C = \frac{1}{4}\alpha\ell \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{8}\alpha\ell^2$$

① A 点のたわみ角 θ_A と B 点のたわみ角 θ_B

$$\theta_A = \tilde{R}_A = \frac{1}{4}\alpha\ell = \frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^2}{EI} \qquad \theta_B = \tilde{Q}_B = -\tilde{R}_B = -\frac{1}{4}\alpha\ell = -\frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}$$

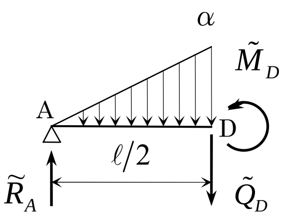
$$\therefore \boxed{\theta_A = \frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}},\ \boxed{\theta_B = -\frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}}$$

② C 点のたわみ角 θ_C とたわみ v_C

$$\theta_C = \tilde{Q}_C = -\tilde{R}_C = -\frac{1}{4}\alpha\ell = -\frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^2}{EI} \qquad v_C = \tilde{M}_C = -\frac{1}{8}\alpha\ell^2 = -\frac{1}{32}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore \boxed{\theta_C = -\frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}},\ \boxed{v_C = -\frac{1}{32}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

③ D 点のたわみ v_D

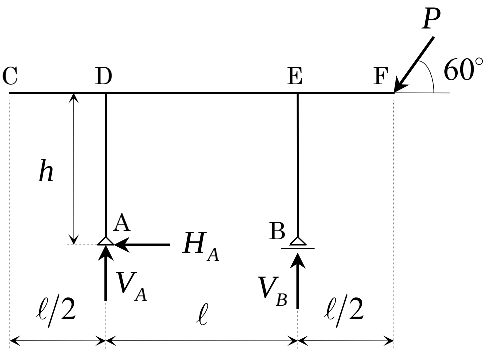


$$\tilde{Q}_D + \frac{1}{2}\alpha\frac{1}{2}\ell = \tilde{R}_A \quad \therefore \tilde{Q}_D = \tilde{R}_A - \frac{1}{4}\alpha\ell = \frac{1}{4}\alpha\ell - \frac{1}{4}\alpha\ell = 0 \quad \therefore \theta_D = \tilde{Q}_D = 0$$

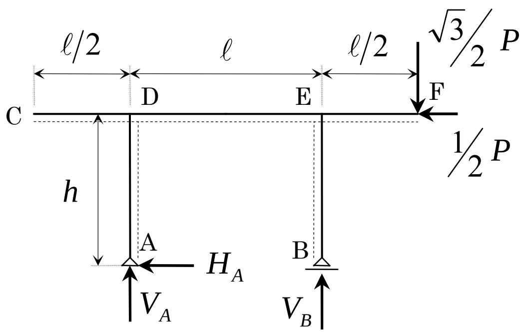
$$\tilde{M}_D + \frac{1}{4}\alpha\ell\times\frac{1}{3}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \tilde{R}_A\frac{\ell}{2} \quad \therefore \tilde{M}_D = \frac{1}{4}\alpha\ell\cdot\frac{\ell}{2} - \frac{1}{24}\alpha\ell^2 = \frac{3-1}{24}\alpha\ell^2 = \frac{1}{12}\alpha\ell^2$$

$$v_D = \tilde{M}_D = \frac{1}{12}\alpha\ell^2 = \frac{1}{48}\cdot\frac{P\ell^3}{EI} \qquad \therefore \boxed{v_D = \frac{1}{48}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

【問題 SF-R-2】下図に示す静定ラーメンの断面力図、すなわち、軸方向力図（N－図），せん断力図（Q－図），曲げモーメント図（M－図）を図示せよ。



【解答】



荷重 P を鉛直方向と水平方向に分解すると、

鉛直荷重　　$P\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}P$

水平荷重　　$P\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}P$

となり、右図のようになる。

このとき、支点反力 V_A，H_A，V_B を剛体の釣合条件より求めると、次のようになる。

水平方向の力の釣合から、　　$H_A + \dfrac{1}{2}P = 0 \quad \therefore H_A = -\dfrac{1}{2}P$

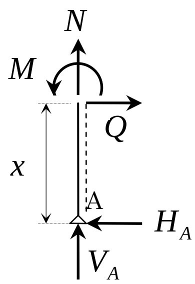
鉛直方向の力の釣合から、　　$V_A + V_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}P$

A 点回りのモーメントの釣合から、　　$V_B \cdot \ell + \dfrac{1}{2}P \cdot h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}P \cdot \left(\ell + \dfrac{\ell}{2}\right)$

$$\therefore V_B = \frac{3\sqrt{3}}{4}P - \frac{1}{2}P \cdot \frac{h}{\ell} = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{\ell}\right) \qquad \therefore V_A = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

これらを用いて、部材 AD，BE，CD，DE，EF 毎に断面力 N，Q，M を求めて行く。

部材 AD について、

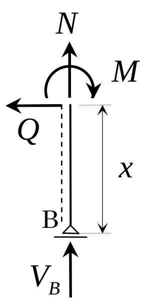


$$N + V_A = 0 \qquad \therefore N = -V_A = -\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Q = H_A = -\frac{1}{2}P$$

$$M = H_A x = -\frac{1}{2}Px$$

部材 BE について、

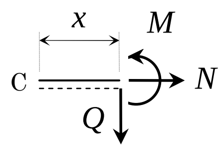


$$N + V_B = 0 \qquad \therefore N = -V_B = -\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{\ell}\right)$$

$$Q = 0$$
$$M = 0$$

部材 CD について、

$$N = Q = M = 0$$

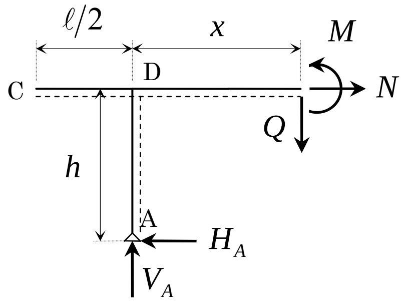


部材 DE について、

$$N = H_A = -\frac{1}{2}P$$

$$Q = V_A = \frac{P}{2}\cdot\left(\frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$M = V_A x + H_A h = \frac{P}{2}\cdot\left(\frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot x - \frac{1}{2}Ph$$

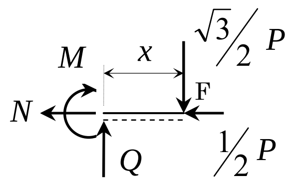


部材 EF について、

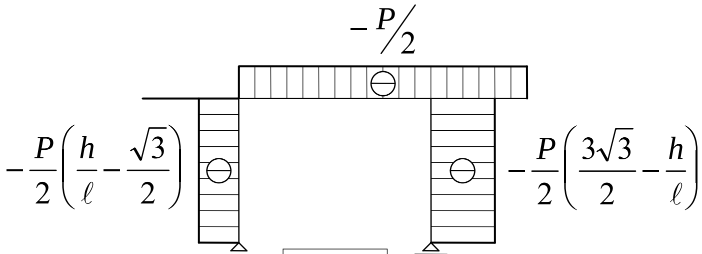
$$N + \frac{1}{2}P = 0 \qquad \therefore N = -\frac{1}{2}P$$

$$Q = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

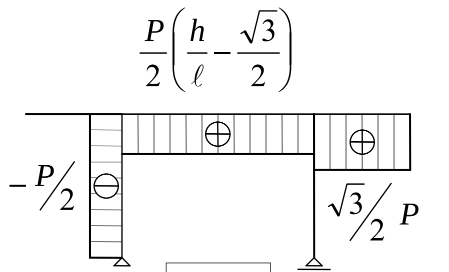
$$M + \frac{\sqrt{3}}{2}Px = 0 \qquad \therefore M = -\frac{\sqrt{3}}{2}Px$$



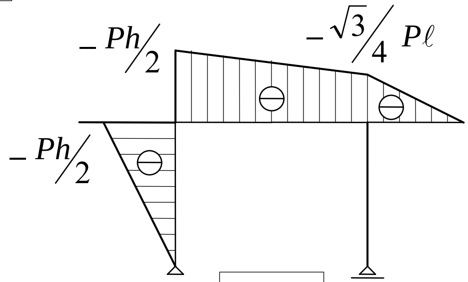
以上をまとめて、断面力図を図示すると下図のようになる。



N－図



Q－図



M－図