構造力学演習Ⅱ（2017-Report №. 5） 2017/10/10 出題

【問１】右図に示すような片持ばりに等分布荷重 q と B 点に集中モーメント M_0 が作用するとき、

(1) たわみ：$y\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

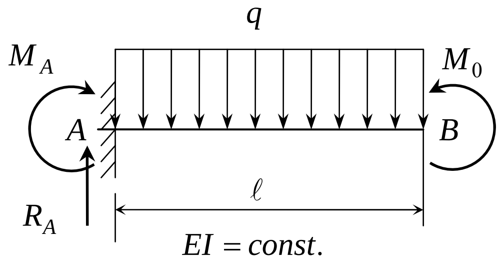
(2) たわみ角：$\theta\left(\dfrac{x}{\ell}\right)=y'\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

の式を求めよ。また、

(3) B 点のたわみ y_B とたわみ角 θ_B を求めよ。

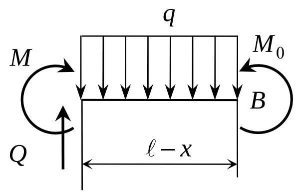
(4) $y_B=0$ となる M_0 を求め、そのときのたわみ角 θ'_B を求めよ。

ただし、はりの曲げ剛性は、EI で一定とする。



【解答】

《解法Ⅰ》右図にように考えて曲げモーメントを求め、$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$ の式から求める方法



(1)(2) モーメントの釣合から、$M+q(\ell-x)\cdot\dfrac{\ell-x}{2}=M_0$

はりのたわみと曲げモーメントの関係式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$ にこれを用いると、

$$EIy''=-M=\frac{1}{2}q(\ell-x)^2-M_0$$

これを逐次積分すると、

$$EIy'=-\frac{1}{6}q(\ell-x)^3-M_0x+C_1$$

$$EIy=\frac{1}{24}q(\ell-x)^4-M_0\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$

これに以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1，C_2 を求める。

1) $x=0$ のとき、$\theta=y'=0$ より、 $-\dfrac{1}{6}q\ell^3+C_1=0$ $\therefore C_1=\dfrac{1}{6}q\ell^3$

2) $x=0$ のとき、$y=0$ より、 $\dfrac{1}{24}q\ell^4+C_2=0$ $\therefore C_2=-\dfrac{1}{24}q\ell^4$

よって、はりのたわみ角 $\theta(x)$ とたわみ $y(x)$ の式は、次のようになる。

$$EIy'=-\frac{1}{6}q(\ell-x)^3-M_0x+\frac{1}{6}q\ell^3$$

$$EIy=\frac{1}{24}q(\ell-x)^4-M_0\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}q\ell^3x-\frac{1}{24}q\ell^4$$

これを等分布荷重の式と集中モーメントの式に分けて表すと、次のようになる。

$$EIy'=\left\{\frac{1}{6}q\ell^3-\frac{1}{6}q(\ell-x)^3\right\}-M_0x$$

$$EIy=\left\{\frac{1}{24}q(\ell-x)^4+\frac{1}{6}q\ell^3x-\frac{1}{24}q\ell^4\right\}-M_0\frac{x^2}{2}$$

これをさらに $\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$ の形で表すと、次のようになる。

$$EIy' = q\ell^3\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}^3\right]-M_0x$$

$$EIy = q\ell^4\left[\frac{1}{24}\left\{1-\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}^4+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)-\frac{1}{24}\right]-M_0\frac{x^2}{2}$$

よって、はりのたわみ角$\theta\left(\frac{x}{\ell}\right)$とたわみ$y\left(\frac{x}{\ell}\right)$の式は、次のようになる。

$$\boxed{\theta\left(\frac{x}{\ell}\right)=\frac{q\ell^3}{EI}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}^3\right]-\frac{M_0\ell}{EI}\left(\frac{x}{\ell}\right)}$$

$$\boxed{y\left(\frac{x}{\ell}\right)=\frac{q\ell^4}{EI}\left[\frac{1}{24}\left\{1-\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}^4+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)-\frac{1}{24}\right]-\frac{M_0\ell^2}{2EI}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2}$$

(3) B 点のたわみy_Bとたわみ角θ_Bは、次のようになる。

$$\boxed{\theta_B=\theta(1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{q\ell^3}{EI}-\frac{M_0\ell}{EI}}$$

$$\boxed{y_B=y(1)=\frac{q\ell^4}{EI}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right]-\frac{M_0\ell^2}{2EI}=\frac{1}{8}\cdot\frac{q\ell^4}{EI}-\frac{M_0\ell^2}{2EI}}$$

(4) B 点のたわみ$y_B=0$となるのは、

$$y_B=\frac{1}{8}\cdot\frac{q\ell^4}{EI}-\frac{M_0\ell^2}{2EI}=0 \qquad \therefore \boxed{M_0=\frac{1}{4}\cdot q\ell^2}$$

このときのたわみ角θ'_Bは、次のようになる。

$$\theta'_B=\frac{1}{6}\cdot\frac{q\ell^3}{EI}-\frac{1}{4}\cdot\frac{q\ell^3}{EI}=\frac{2-3}{12}\cdot\frac{q\ell^3}{EI}=-\frac{1}{12}\cdot\frac{q\ell^3}{EI} \qquad \therefore \boxed{\theta'_B=-\frac{1}{12}\cdot\frac{q\ell^3}{EI}}$$

《別解》

$$EIy''=-M=\frac{1}{2}q(\ell-x)^2-M_0=\frac{1}{2}q\ell^2-q\ell x+\frac{1}{2}qx^2-M_0$$

これを逐次積分すると、

$$EIy'=\frac{1}{2}q\ell^2x-\frac{1}{2}q\ell x^2+\frac{1}{6}qx^3-M_0x+C_1$$

$$EIy=\frac{1}{4}q\ell^2x^2-\frac{1}{6}q\ell x^3+\frac{1}{24}qx^4-M_0\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$

これに以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1, C_2を求める。

1) $x=0$のとき、$\theta=y'=0$より、 $C_1=0$

2) $x=0$のとき、 $y=0$より、 $C_2=0$

よって、はりのたわみ角$\theta(x)$とたわみ$y(x)$の式は、次のようになる。

$$EIy'=\frac{1}{2}q\ell^2x-\frac{1}{2}q\ell x^2+\frac{1}{6}qx^3-M_0x$$

$$EIy=\frac{1}{4}q\ell^2x^2-\frac{1}{6}q\ell x^3+\frac{1}{24}qx^4-M_0\frac{x^2}{2}$$

これを$\left(\frac{x}{\ell}\right)$の形で表すと、次のようになる。

$$EIy' = q\ell^3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right] - M_0 x$$

$$EIy = q\ell^4\left[\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{x}{\ell}\right)^4\right] - M_0\frac{x^2}{2}$$

よって、はりのたわみ角$\theta\left(\frac{x}{\ell}\right)$とたわみ$y\left(\frac{x}{\ell}\right)$の式は、次のようになる。

$$\boxed{\theta\left(\frac{x}{\ell}\right) = \frac{q\ell^3}{EI}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right] - \frac{M_0\ell}{EI}\left(\frac{x}{\ell}\right)}$$

$$\boxed{y\left(\frac{x}{\ell}\right) = \frac{q\ell^4}{EI}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{x}{\ell}\right)^4\right] - \frac{M_0\ell^2}{2EI}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2}$$

(3) B 点のたわみy_Bとたわみ角θ_Bは、次のようになる。

$$\boxed{\theta_B = \theta(1) = \frac{q\ell^3}{EI}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right] - \frac{M_0\ell}{EI} = \frac{1}{6}\cdot\frac{q\ell^3}{EI} - \frac{M_0\ell}{EI}}$$

$$\boxed{y_B = y(1) = \frac{q\ell^4}{EI}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right] - \frac{M_0\ell^2}{2EI} = \frac{6-4+1}{24}\cdot\frac{q\ell^4}{EI} - \frac{M_0\ell^2}{2EI} = \frac{1}{8}\cdot\frac{q\ell^4}{EI} - \frac{M_0\ell^2}{2EI}}$$

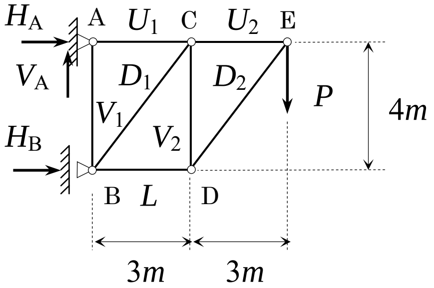
【問２】下図－Aに示す静定トラスについて、次の設問に答えよ。

(1) 支点反力 H_A, V_A, H_B を求めよ。

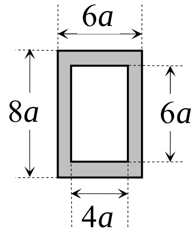
(2) すべての部材力 U_1, U_2, D_1, D_2, V_1, V_2, L を求めよ。

(3) 荷重 P を漸次増加するとき、最初に座屈を起こす荷重 P_{CR} とその部材を求めよ。

なお、各部材は、ヤング係数 E で、その断面は下図－Bに示すような中空長方形断面とする。



図－A



図－B

【解答】

(1) 水平方向の力の釣合から、$H_A + H_B = 0$

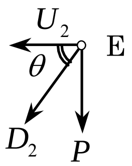
鉛直方向の力の釣合から、$V_A = P$

A 点回りのモーメントの釣り合いから、$H_B \times 4m = P \times 6m \quad \therefore H_B = \dfrac{3}{2}P$ また、$H_A = -\dfrac{3}{2}P$

以上をまとめると、$\boxed{H_A = -\dfrac{3}{2}P}$, $\boxed{V_A = P}$, $\boxed{H_B = \dfrac{3}{2}P}$

(2) 〝節点法〟を用いて、各部材力を求めると、次のようになる。

①E 点について、$\sin\theta = \dfrac{4}{5}, \cos\theta = \dfrac{3}{5}$ だから、

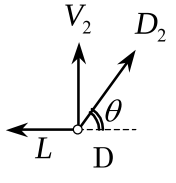


鉛直方向の力の釣合から、$P + D_2 \sin\theta = 0 \qquad \therefore D_2 = -\dfrac{P}{\sin\theta} = -\dfrac{5}{4}P$

水平方向の力の釣合から、$U_2 + D_2 \cos\theta = 0$

$\therefore U_2 = -D_2 \cos\theta = \dfrac{5}{4}P \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{4}P$

②D 点について、



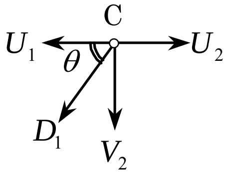
鉛直方向の力の釣合から、$D_2 \sin\theta + V_2 = 0$

$\therefore V_2 = -D_2 \sin\theta = \dfrac{5}{4}P \cdot \dfrac{4}{5} = P$

水平方向の力の釣合から、$L = D_2 \cos\theta$

$\therefore L = D_2 \cos\theta = -\dfrac{5}{4}P \cdot \dfrac{3}{5} = -\dfrac{3}{4}P$

③C 点について、

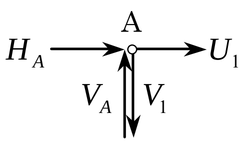


鉛直方向の力の釣合から、$D_1 \sin\theta + V_2 = 0 \qquad \therefore D_1 = -\dfrac{V_2}{\sin\theta} = -\dfrac{5}{4}P$

水平方向の力の釣合から、$U_1 + D_1 \cos\theta = U_2$

$\therefore U_1 = U_2 - D_1 \cos\theta = \dfrac{3}{4}P - \left(-\dfrac{5}{4}P\right) \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{4}P + \dfrac{3}{4}P = \dfrac{3}{2}P$

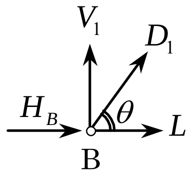
④A 点について、



鉛直方向の力の釣合から、$V_1 = V_A = P$

水平方向の力の釣合から、$U_1 + H_A = \dfrac{3}{2}P - \dfrac{3}{2}P = 0$ (check O.K.)

⑤B 点について、



鉛直方向の力の釣合から、

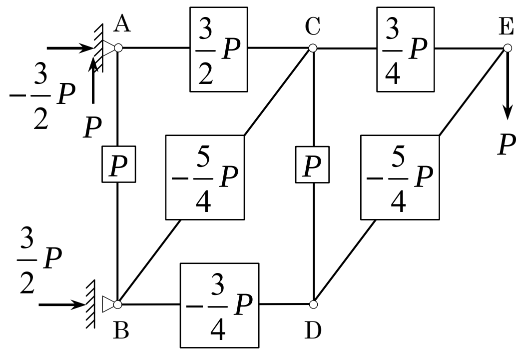
$$V_1 + D_1 \sin\theta = P - \frac{5}{4}P \cdot \frac{4}{5} = 0 \text{（check O.K.）}$$

水平方向の力の釣合から、

$$H_B + L + D_1 \cos\theta = \frac{3}{2}P - \frac{3}{4}P - \frac{5}{4}P \cdot \frac{3}{5} = 0 \text{（check O.K.）}$$

以上をまとめると、

$$\boxed{U_1 = \frac{3}{2}P},\ \boxed{U_2 = \frac{3}{4}P},\ \boxed{D_1 = D_2 = -\frac{5}{4}P},\ \boxed{V_1 = V_2 = P},\ \boxed{L = -\frac{3}{4}P}$$



(3) 荷重 P を漸次増加するとき、最初に座屈を起こす荷重 P_{CR} とその部材を求める。

まず、圧縮力が作用する部材は、BC(D_1)，DE(D_2)，BD(L)の 3 部材であり、部材長 BC=DE かつ $D_1= D_2$ であるから、部材 BC(D_1)と DE(D_2)，部材 BD(L)の 2 種類の部材について、座屈を起こす荷重 P_{CR} を比較して小さい方が最初に座屈することになる。

ここで、両端回転支持の場合の最小座屈荷重は、$\dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2}$ で表される。

ここに、ℓ ：部材長，I ：弱軸に関する断面 2 次モーメントである。

2 種類の部材の座屈を起こす荷重 P_{CR} は、次のようになる。

①部材 BC(D_1)と DE(D_2)の座屈を起こす荷重 P_{CR}^{D} について

$$\frac{5}{4}P_{CR}^{D} = \frac{\pi^2 EI}{5^2} \qquad \therefore P_{CR}^{D} = \frac{4}{5}\cdot\frac{\pi^2 EI}{5^2} = \frac{4}{125}\pi^2 EI$$

②部材 BD(L)の座屈を起こす荷重 P_{CR}^{L} について

$$\frac{3}{4}P_{CR}^{L} = \frac{\pi^2 EI}{4^2} \qquad \therefore P_{CR}^{L} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2 EI}{4^2} = \frac{1}{12}\pi^2 EI$$

ここで、座屈を起こす荷重 P_{CR} を比較すると、次のようになる。

$$P_{CR}^{D} = \frac{4}{125}\pi^2 EI = \frac{48}{125\cdot 12}\pi^2 EI < P_{CR}^{L} = \frac{1}{12}\pi^2 EI = \frac{125}{125\cdot 12}\pi^2 EI \qquad \therefore P_{CR}^{D} < P_{CR}^{L}$$

したがって、$\boxed{\text{最初に座屈を起こす部材は、部材 BC}(D_1)\text{と DE}(D_2)}$ である。

次に、断面 2 次モーメント I は、弱軸に関する断面 2 次モーメントであるから、

$$I = \frac{8a\cdot(6a)^3}{12} - \frac{6a\cdot(4a)^3}{12} = 144a^4 - 32a^4 = 112a^4$$

よって、最初に座屈を起こす荷重 P_{CR} は、次のようになる。

$$P_{CR} = P_{CR}^{D} = \frac{4}{125}\pi^2 EI = \frac{4}{125}\pi^2 E\cdot 112a^4 = \frac{448}{125}\pi^2 Ea^4 \qquad \therefore \boxed{P_{CR} = \frac{448}{125}\pi^2 Ea^4}$$

【問３】下図に示す一辺の長さが r の正六角形断面の『断面の核』を以下の手順で求め、図示せよ。

なお、y, z 軸は、主軸である。

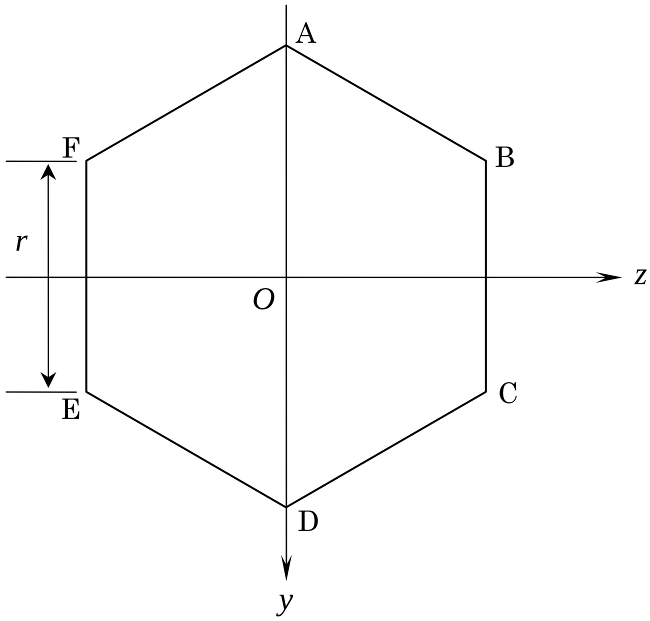
(1) 正六角形断面の面積 A を求めよ。

(2) 正六角形断面軸の y 軸と z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_z を求めよ。

(3) 直線 BC が中立軸になるときの荷重位置 $B'\left(e_y, e_z\right)$ を求めよ。

(4) 直線 AB が中立軸になるときの荷重位置 $A'\left(e_y, e_z\right)$ を求めよ。

(5) 『断面の核』を斜線で図示せよ。



【解答】

(1) 一辺の長さが r の正六角形断面の面積 A は、一辺の長さが r の正三角形の面積の 6 倍であるから、

$$A = 6\times\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\sin 60^\circ\right) = 3r^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2 \qquad \therefore \boxed{A = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2}$$

(2) 正六角形断面軸の y 軸と z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_z は次のようになる。

$$I_y = \frac{r\cdot\left(\sqrt{3}r\right)^3}{12} + \left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)\times\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2 + \frac{\frac{r}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^3}{36}\right\}\times 4 = \frac{3\sqrt{3}r^4}{12} + \left\{\frac{\sqrt{3}r^2}{2}\times\frac{r^2}{12} + \frac{3\sqrt{3}r^4}{144}\right\}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}r^4}{12} + \frac{\sqrt{3}r^4}{24} + \frac{\sqrt{3}r^4}{48} = \frac{12+2+1}{48}\sqrt{3}r^4 = \frac{15}{48}\sqrt{3}r^4 = \frac{5\sqrt{3}}{16}r^4$$

$$I_z = \frac{\sqrt{3}r\cdot r^3}{12} + \left\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}r\cdot\frac{r}{2}\right)\times\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}r\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^3}{36}\right\}\times 2 = \frac{\sqrt{3}r^4}{12} + \left\{\frac{\sqrt{3}r^2}{2}\times\left(\frac{2r}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}r^4}{144}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}r^4}{12} + \frac{2\sqrt{3}r^4}{9} + \frac{\sqrt{3}r^4}{144} = \frac{12+2\cdot 16+1}{144}\sqrt{3}r^4 = \frac{45}{144}\sqrt{3}r^4 = \frac{5\sqrt{3}}{16}r^4$$

$$\therefore \boxed{I_y = I_z = \frac{5\sqrt{3}}{16}r^4} \quad\Rightarrow\quad y\ 軸と\ z\ 軸は主軸$$

従って、正六角形断面軸の y 軸と z 軸に関する断面半径は、次のようになる。

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{16} r^4}{\frac{3\sqrt{3}}{2} r^2} = \frac{5}{16} \cdot \frac{2}{3} r^2 = \frac{5}{24} r^2$$

(3) 直線 BC が中立軸になるときの荷重位置 $B'(e_y, e_z)$ を求める。

直線 BC の y 切片は $n_y = \infty$,　z 切片は $n_z = \frac{\sqrt{3}}{2} r$ だから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{5}{24} r^2}{\infty} = 0, \quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{5}{24} r^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} r} = -\frac{5}{24} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} r = -\frac{5\sqrt{3}}{36} r$$

$$\therefore \boxed{B'(e_y, e_z) = \left(0, -\frac{5\sqrt{3}}{36} r\right)}$$

(4) 直線 AB が中立軸になるときの荷重位置 $A'(e_y, e_z)$ を求める。

直線 AB の y 切片は $n_y = -r$,　z 切片は $n_z = \sqrt{3} r$ だから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{5}{24} r^2}{-r} = \frac{5}{24} r, \quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{5}{24} r^2}{\sqrt{3} r} = -\frac{5}{24} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} r = -\frac{5\sqrt{3}}{72} r$$

$$\therefore \boxed{A'(e_y, e_z) = \left(\frac{5}{24} r, -\frac{5\sqrt{3}}{72} r\right)}$$

(5)『断面の核』を図示すると、斜線部分のようになる。