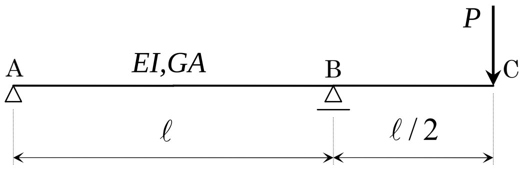
構造力学演習Ⅱ（2017-Report №.７）　　　　2017/11/07 出題

【問題 SE-B-1】下図に示す張出ばりのひずみエネルギーU を求めよ。ただし、はりの曲げ剛性は EI, せん断弾性係数は G, 断面積は A とする。



【解答】

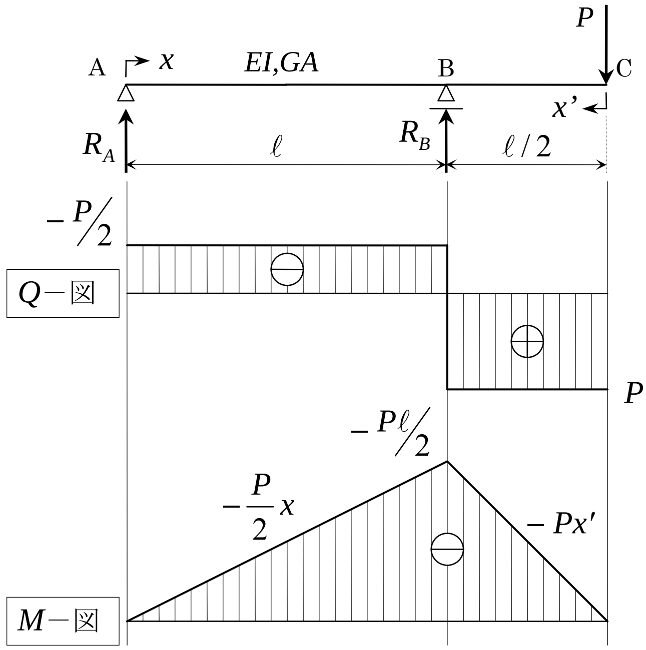
支点反力を R_A， R_B とすると、

$$R_A + R_B = P$$

$$R_B \cdot \ell = P \cdot \left(\ell + \frac{\ell}{2} \right)$$

$$\therefore R_B = \frac{3}{2} P \quad R_A = -\frac{1}{2} P$$

これより、断面力図は、右図のようになる。
したがって、ひずみエネルギーU は、次のようになる。



$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}\ell} \left(\frac{M^2}{EI} + \kappa \frac{Q^2}{GA} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \left(\frac{1}{EI} \cdot \frac{P^2}{4} x^2 + \frac{\kappa}{GA} \cdot \frac{P^2}{4} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\ell} \left(\frac{1}{EI} \cdot P^2 x'^2 + \frac{\kappa}{GA} \cdot P^2 \right) dx'$$

$$U = \frac{P^2}{8EI}\int_0^{\ell} x^2 dx + \frac{\kappa P^2}{8GA}\ell + \frac{P^2}{2EI}\int_0^{\frac{1}{2}\ell} x'^2 dx' + \frac{\kappa P^2}{2GA} \cdot \frac{\ell}{2}$$

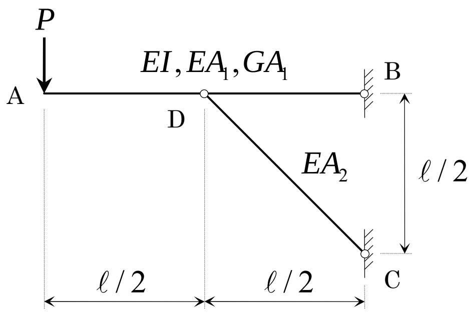
$$= \frac{P^2}{8EI} \cdot \frac{\ell^3}{3} + \frac{P^2}{2EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^3}{8} + \frac{\kappa P^2}{8GA} \cdot (\ell + 2\ell)$$

$$= \frac{P^2 \ell^3}{48EI} \cdot (2+1) + \frac{3}{8} \cdot \frac{\kappa P^2 \ell}{GA} = \frac{P^2 \ell^3}{16EI} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\kappa P^2 \ell}{GA}$$

$$\therefore \boxed{U = \frac{1}{16} \cdot \frac{P^2 \ell^3}{EI} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\kappa P^2 \ell}{GA}}$$

【問題 SE-S-1】下図に示す構造物のひずみエネルギーUを求めよ。

ただし、各部材のヤング係数，せん断弾性係数は、E，Gであり、部材AB，部材CDの断面積は、それぞれA_1，A_2である。また、部材ABの断面２次モーメントは、Iである。



【解答】

B，C点の支点反力をH_B，V_B，R_Cとすると、

水平方向の力の釣合から、

$$H_B + R_C\cos 45^\circ = 0$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$V_B + R_C\sin 45^\circ = P$$

B点回りのモーメントの釣合から、

$$P\cdot\ell = R_C\cos 45^\circ\times\frac{\ell}{2} \qquad \therefore R_C = 2\sqrt{2}P$$

よって、　$H_B = -2P$，$V_B = -P$

このとき、断面力図は、右図のようになる。

各部材に作用する各断面力によるひずみエネルギーを考えると、次のようになる。

$$U_{AB}^{M} = 2\times\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\ell}\left\{\frac{(-Px)^2}{EI}\right\}dx = \frac{P^2}{EI}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\ell}x^2dx$$

$$= \frac{P^2}{EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\ell^3}{8} = \frac{P^2\ell^3}{24EI}$$

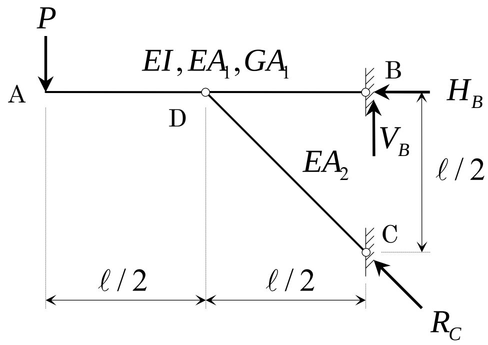
$$U_{AB}^{Q} = 2\times\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\ell}\left\{\kappa\frac{(-P)^2}{GA_1}\right\}dx = \kappa\frac{P^2}{GA_1}\cdot\frac{\ell}{2} = \kappa\frac{P^2\ell}{2GA_1}$$

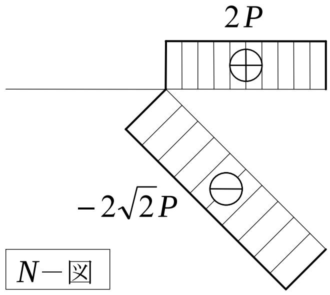
$$U_{AB}^{N} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{EA_1}\cdot(2P)^2\cdot\frac{1}{2}\ell = \frac{P^2\ell}{EA_1}$$

$$U_{CD}^{N} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{EA_2}\cdot\left(-2\sqrt{2}P\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\ell = \frac{2\sqrt{2}P^2\ell}{EA_2}$$

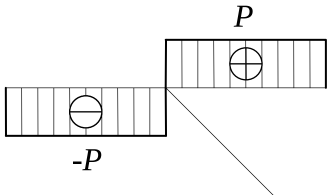
したがって、全ひずみエネルギーUは、各ひずみエネルギーの和で表されるから、次のようになる。

$$\boxed{\begin{aligned}U &= U_{AB}^{M} + U_{AB}^{Q} + U_{AB}^{N} + U_{CD}^{N}\\ &= \frac{P^2\ell^3}{24EI} + \kappa\frac{P^2\ell}{2GA_1} + \frac{P^2\ell}{EA_1} + \frac{2\sqrt{2}P^2\ell}{EA_2}\end{aligned}}$$

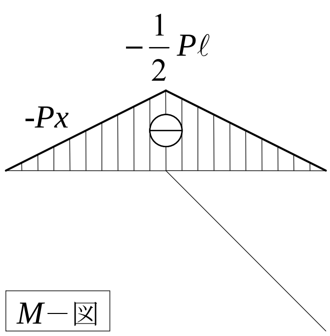




N－図



Q－図



M－図