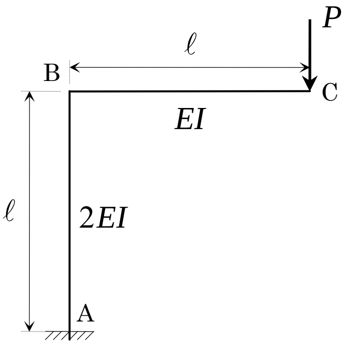
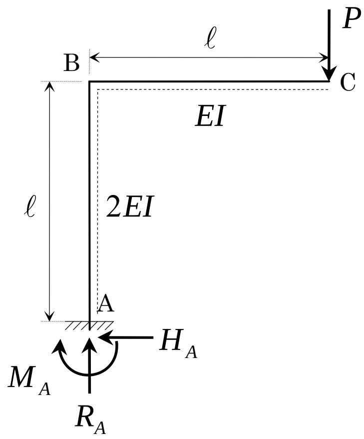
構造力学演習Ⅱ（2017-Report №. 9） 2017/11/21 出題

【問題 UL-R-1】下図に示す静定ラーメンの C 点の鉛直たわみ v_C とたわみ角 θ_C を求めよ。ただし、AB, BC 間の曲げ剛性は、それぞれ $2EI$, EI で一定とし、軸方向力・せん断力の影響は無視する。



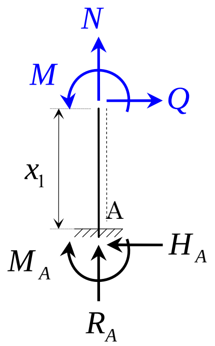
【解答】

右図において、支点反力を求めると、$R_A = P$，$H_A = 0$，$M_A = -P \cdot \ell$



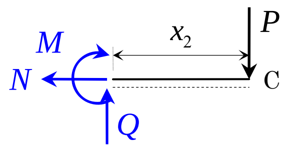
次に、下図のように、A～B 間，B～C 間に分けて断面力を求める。

A～B 間について、



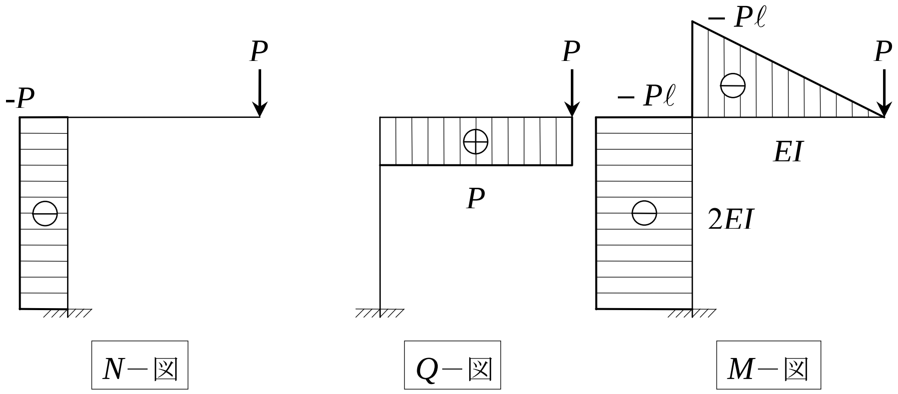
$$N = -R_A = -P$$
$$Q = H_A = 0$$
$$M = H_A \cdot x_1 + M_A = -P \cdot \ell$$

B～C 間について、

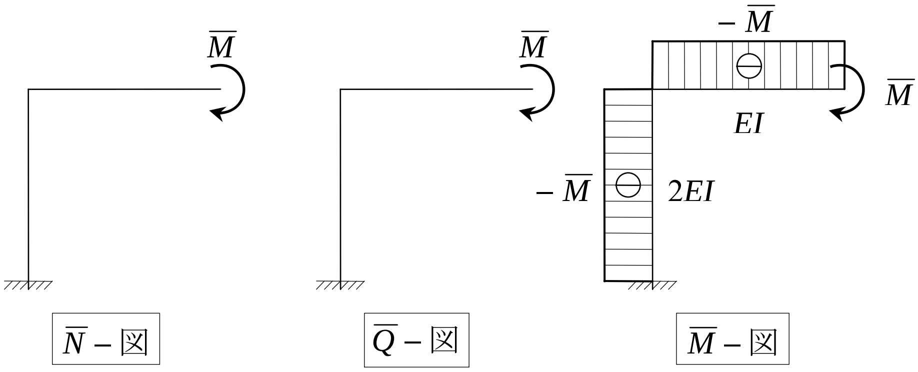


$$N = 0$$
$$Q = P$$
$$M = -P \cdot x_2$$

これらを図示すると、下図のようになる。



C 点に単位の集中モーメント $\overline{M}=1$ が作用する場合は、同様にして、
支点反力を求めると、$\overline{R}_A=0$，$\overline{H}_A=0$，$\overline{M}_A=-\overline{M}$ であり、
これらを図示すると、下図のようになる。



したがって、C 点の鉛直たわみ v_C とたわみ角 θ_C は、次のようになる。

$$v_C=\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx$$

$$=\frac{1}{2EI}\cdot\int_0^{\ell}(-P\ell)\cdot(-\ell)\cdot dx+\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\ell}(-Px)\cdot(-x)\cdot dx=\frac{P\ell^3}{2EI}+\frac{P}{EI}\cdot\frac{\ell^3}{3}=\frac{5}{6}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore \boxed{v_C=\frac{5}{6}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

$$\theta_C=\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx$$

$$=\frac{1}{2EI}\cdot\int_0^{\ell}(-P\ell)\cdot(-1)\cdot dx+\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\ell}(-Px)\cdot(-1)\cdot dx=\frac{P\ell^2}{2EI}+\frac{P}{EI}\cdot\frac{\ell^2}{2}=\frac{P\ell^2}{EI}$$

$$\therefore \boxed{\theta_C=\frac{P\ell^2}{EI}}$$

AB，BC 間の引張剛性をそれぞれ $2EA$，EA、せん断剛性をそれぞれ $2GA$，GA とし、軸方向力・せん断力の影響を考慮すると、C 点の鉛直たわみ v_C は、次のようになる。

$$v_C=\int\frac{N\overline{N}}{EA}dx+\int\kappa\frac{Q\overline{Q}}{GA}dx+\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx$$

$$=\frac{1}{2EA}\cdot\int_0^{\ell}(-P)\cdot(-1)\cdot dx+\frac{\kappa}{GA}\cdot\int_0^{\ell}P\cdot 1\cdot dx+\frac{1}{2EI}\cdot\int_0^{\ell}(-P\ell)\cdot(-\ell)\cdot dx+\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\ell}(-Px)\cdot(-x)\cdot dx$$

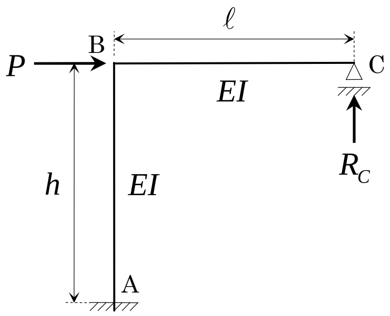
$$=\frac{P\ell}{2EA}+\kappa\frac{P\ell}{GA}+\frac{P\ell^3}{2EI}+\frac{P}{EI}\cdot\frac{\ell^3}{3}=\frac{P\ell}{2EA}+\kappa\frac{P\ell}{GA}+\frac{5}{6}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore \boxed{v_C=\frac{1}{2}\cdot\frac{P\ell}{EA}+\kappa\frac{P\ell}{GA}+\frac{5}{6}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

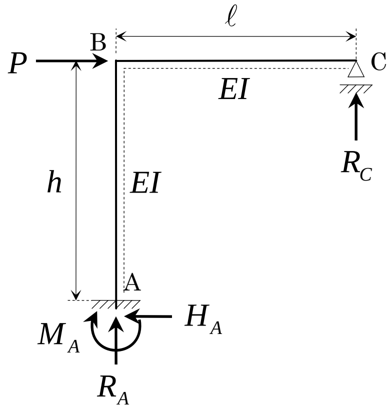
また、C 点のたわみ角 θ_C については、軸方向力・せん断力の影響はない。

$$\theta_C=\int\frac{N\overline{N}}{EA}dx+\int\kappa\frac{Q\overline{Q}}{GA}dx+\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx=\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx$$

【問題 LW-R-1】下図に示す 1 次不静定ラーメンの支点 C の支点反力 R_C を〝**最小仕事の原理**〟を用いて求めよ。ただし、各部材の曲げ剛性は、EI で一定とし、せん断力の影響は無視する。



【解答】



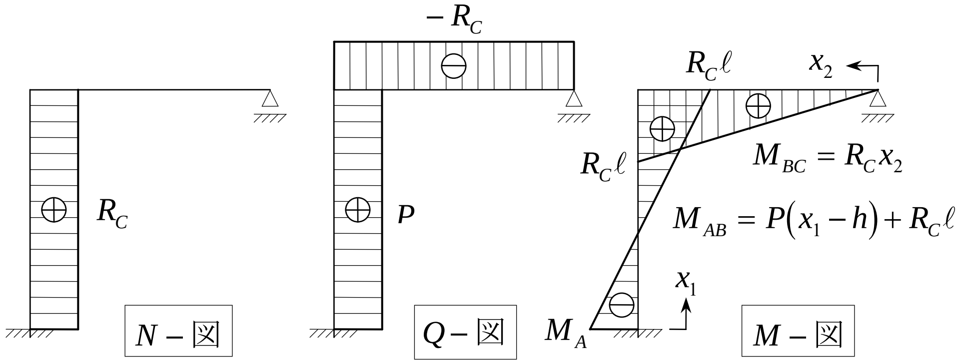
右図に示すように、支点 C の支点反力 R_C を不静定力として、支点反力 R_A， H_A， M_A を求めると、次のようになる。

$$R_A = -R_C$$

$$H_A = P$$

$$M_A = R_C \cdot \ell - P \cdot h$$

これに基づき断面力図を図示すると、下図のようになる。



これらより、全ての断面力による全ひずみエネルギーU は、次のようになる。

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \cdot \int \kappa \frac{Q^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{M^2}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{2EA} \cdot \int_0^h R_C^2 dx_1 + \frac{\kappa}{2GA} \cdot \left[\int_0^h P^2 dx_1 + \int_0^\ell R_C^2 dx_2 \right]$$

$$+ \frac{1}{2EI} \cdot \left[\int_0^h \left\{ P \cdot (x_1 - h) + R_C \cdot \ell \right\}^2 dx_1 + \int_0^\ell (R_C \cdot x_2)^2 dx_2 \right]$$

これを、R_C で偏微分すると、〝最小仕事の原理〟より、次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial R_C}=\frac{1}{EA}\cdot\int_0^h R_C dx_1+\frac{\kappa}{GA}\cdot\int_0^\ell R_C dx_2+\frac{1}{EI}\cdot\left[\int_0^h\left\{P\cdot\left(x_1-h\right)+R_C\cdot\ell\right\}\cdot\ell\cdot dx_1+\int_0^\ell R_C\cdot x_2^2 dx_2\right]$$

$$=\frac{R_C h}{EA}+\kappa\frac{R_C\ell}{GA}+\frac{1}{EI}\cdot\left\{\ell\cdot\left[P\frac{x_1^2}{2}-Phx_1+R_C\ell x_1\right]_0^h+R_C\frac{\ell^3}{3}\right\}$$

$$=\frac{R_C h}{EA}+\kappa\frac{R_C\ell}{GA}+\frac{1}{EI}\cdot\left\{\ell\cdot\left(P\frac{h^2}{2}-Ph^2+R_C\ell h\right)+R_C\frac{\ell^3}{3}\right\}$$

$$=\frac{R_C h}{EA}+\kappa\frac{R_C\ell}{GA}+\frac{1}{EI}\cdot\left\{\left(h\ell^2+\frac{\ell^3}{3}\right)\cdot R_C-\frac{1}{2}Ph^2\ell\right\}$$

$$=\frac{R_C h}{EA}+\kappa\frac{R_C\ell}{GA}+\frac{\ell}{EI}\cdot\left\{\left(h+\frac{\ell}{3}\right)\cdot\ell\cdot R_C-\frac{1}{2}Ph^2\right\}$$

$$=\left\{\frac{h}{EA}+\kappa\frac{\ell}{GA}+\frac{\ell^2}{EI}\cdot\left(h+\frac{\ell}{3}\right)\right\}\cdot R_C-\frac{Ph^2\ell}{2EI}=0$$

$$\therefore\boxed{R_C=\frac{\dfrac{Ph^2\ell}{2EI}}{\dfrac{h}{EA}+\kappa\dfrac{\ell}{GA}+\dfrac{\ell^2}{EI}\cdot\left(h+\dfrac{\ell}{3}\right)}}$$

ここで、軸方向力とせん断力を無視して、曲げモーメントのみを考慮すると、

$$R_C=\frac{\dfrac{Ph^2}{2}}{\left(h+\dfrac{\ell}{3}\right)\cdot\ell}=\frac{3h^2}{2\ell\cdot(3h+\ell)}P$$

さらに、$\ell=h$ とすると、$R_C=\dfrac{3}{8}P$ となる。