構造力学演習Ⅱ（2017-Report №10）　　　　2017/11/28 出題

【問題 UL-R-3】下図－A に示す静定ラーメンについて、A 点の鉛直上方への変位 Δ_A を〝**単位荷重法**〟を用いて以下のような手順で求めよ。ただし、曲げ剛性 EI は一定とし、軸方向力・せん断力の影響は無視する。また、曲げモーメントは、点線側が〝引張〟となる曲げモーメントを〝正〟とする。

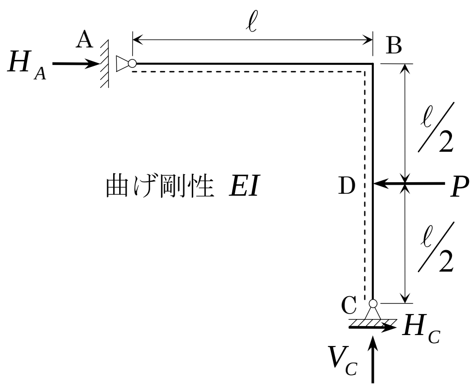
⑴ 図－A に示す支点反力 H_A，V_C，H_C を求めよ。

⑵ 図－A の曲げモーメント図（M －図）を図示せよ。

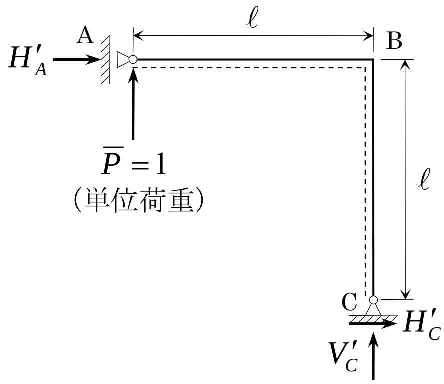
⑶ 下図－B に示すように、A 点に単位荷重 $\overline{P}=1$ が作用した場合の支点反力 H'_A，V'_C，H'_C を求めよ。

⑷ 図－B の曲げモーメント図（$\overline{M}$ －図）を図示せよ。

⑸ 〝**単位荷重法**〟$\left(1\times\Delta_A=\displaystyle\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx\right)$ を適用して、A 点の鉛直上方への変位 Δ_A を求めよ。



【図－A】



【図－B】

【解答】

問題の図において、左図【図－A】を〝与系〟、右図【図－B】を〝仮想系〟として考える。

まず、両系について支点反力を求め、曲げモーメント図を得る。

〝与系〟について、

水平方向の力の釣合から、　$H_A+H_C=P$

鉛直方向の力の釣合から、　$V_C=0$

C 点回りのモーメントの釣合から、　$P\cdot\dfrac{\ell}{2}=H_A\cdot\ell$

以上より、$\boxed{H_A=\dfrac{P}{2}}$, $\boxed{H_C=\dfrac{P}{2}}$, $\boxed{V_C=0}$

〝仮想系〟について、

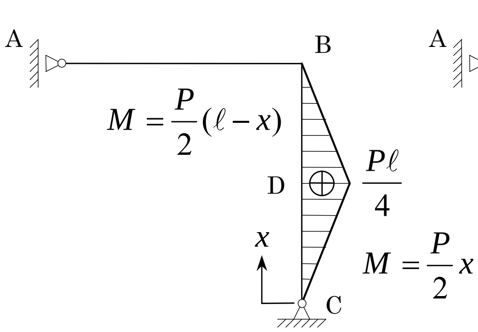
水平方向の力の釣合から、　$H'_A+H'_C=0$

鉛直方向の力の釣合から、　$V'_C+\overline{P}=0$

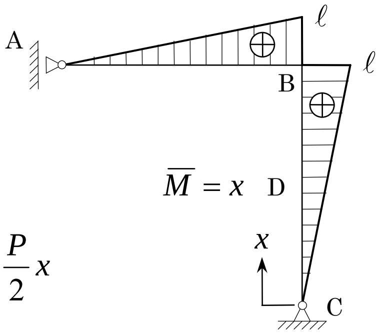
C 点回りのモーメントの釣合から、　$\overline{P}\cdot\ell+H'_A\cdot\ell=0$

以上より、$\boxed{H'_A=-\overline{P}=-1}$, $\boxed{H'_C=\overline{P}=1}$, $\boxed{V'_C=-\overline{P}=-1}$

これらより、曲げモーメント図を図示すると、下図のようになる。



〝与系〟M−図



〝仮想系〟$\overline{M}$ −図

A 点の鉛直上方への変位 Δ_A を〝単位荷重法〟を用いて求めると、次のようになる。

$$\Delta_A\times 1=\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx=\frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{1}{2}Px\right)\cdot x\,dx+\frac{1}{EI}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\left\{\frac{1}{2}P\left(\ell-x\right)\right\}\cdot x\,dx$$

$$=\frac{P}{2EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}}x^2dx+\frac{P}{2EI}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\left(\ell x-x^2\right)dx=\frac{P}{2EI}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\ell}{2}}+\left[\frac{\ell}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\right\}$$

$$=\frac{P}{2EI}\left\{\frac{\ell^3}{24}+\frac{\ell^3}{2}-\frac{\ell^3}{3}-\frac{\ell^3}{8}+\frac{\ell^3}{24}\right\}=\frac{P\ell^3}{2EI}\cdot\frac{1+12-8-3+1}{24}=\frac{P\ell^3}{2EI}\cdot\frac{3}{24}=\frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore\boxed{\Delta_A=\frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

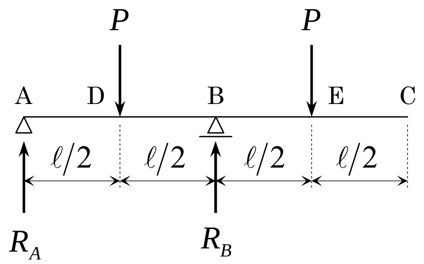
《別解》

〝積分公式〟を用いると、

$$\Delta_A\times 1=\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx=\frac{1}{EI}\cdot\left\{\frac{\frac{\ell}{2}}{3}\cdot\frac{P\ell}{4}\cdot\frac{\ell}{2}+\frac{\frac{\ell}{2}}{6}\cdot\frac{P\ell}{4}\cdot\left(\ell+2\cdot\frac{\ell}{2}\right)\right\}=\frac{1}{EI}\cdot\left(\frac{1}{48}+\frac{2}{48}\right)\cdot P\ell^3=\frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore\boxed{\Delta_A=\frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

【問題 UL-OB-1】下図に示す曲げ剛性 EI が一定な張出ばりの C 点の鉛直変位 v_C を〝**単位荷重法**〟を用いて求めよ。



曲げ剛性 EI=const.

【解答】

まず、実荷重に対する支点反力 R_A, R_B を求める。

鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R_B = 2P$

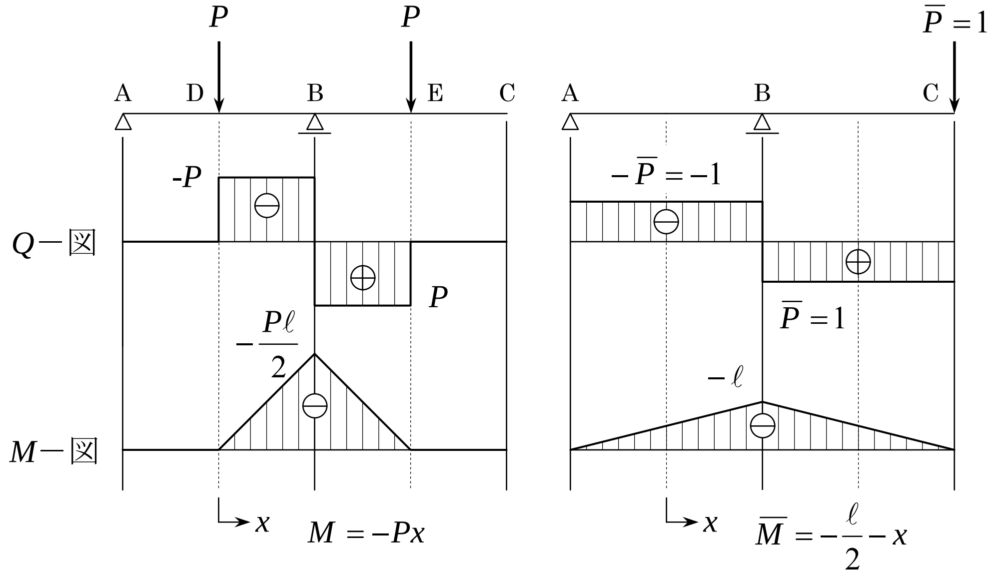
A 点回りのモーメントの釣合から、$R_B \cdot \ell = P \cdot \dfrac{1}{2}\ell + P \cdot \dfrac{3}{2}\ell \quad \therefore R_B = 2P$ よって、$R_A = 0$

次に、C 点に仮想荷重 $\overline{P} = 1$ が載荷された場合の支点反力 $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$ を求める。

鉛直方向の力の釣合から、 $\overline{R}_A + \overline{R}_B = \overline{P} = 1$

A 点回りのモーメントの釣合から、$\overline{R}_B \cdot \ell = \overline{P} \cdot 2\ell \quad \therefore \overline{R}_B = 2\overline{P} = 2$ よって、$\overline{R}_A = -\overline{P} = -1$

以上、2 通りの場合の断面力図を図示すると、下図のようになる。



したがって、C 点の鉛直変位 v_C を〝単位荷重法〟を用いて求めると、次のようなる。

$$1 \times v_C = \int_0^{2\ell} \overline{M} \cdot \frac{M}{EI}\,dx = 2 \times \int_0^{\frac{\ell}{2}} \overline{M} \cdot \frac{M}{EI}\,dx = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(-\frac{\ell}{2} - x\right) \cdot (-Px)\,dx$$

$$= \frac{2P}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(\frac{\ell}{2} + x\right) \cdot x\,dx = \frac{2P}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(\frac{\ell}{2}x + x^2\right) dx = \frac{2P}{EI} \cdot \left[\frac{\ell}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\ell}{2}} \qquad \therefore \boxed{v_C = \frac{5}{24} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}}$$

$$= \frac{2P}{EI} \cdot \left(\frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell^2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^3}{8}\right) = \frac{2P}{EI} \cdot \left(\frac{\ell^3}{16} + \frac{\ell^3}{24}\right) = \frac{2P\ell^3}{EI} \cdot \frac{3+2}{48} = \frac{5}{24} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

《別解》
〝積分公式〟を用いると、

$$1\times v_C=\int_0^{2\ell}\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}dx=2\times\int_0^{\frac{\ell}{2}}\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}dx=\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}}M\cdot\bar{M}dx$$

$$=\frac{2}{EI}\cdot\frac{\frac{\ell}{2}}{6}\cdot\left\{\left(-\frac{\ell}{2}\right)+2\cdot(-\ell)\right\}\cdot\left\{-\frac{P\ell}{2}\right\}=\frac{2}{EI}\cdot\frac{\ell}{12}\cdot\frac{5}{2}\ell\cdot\frac{P\ell}{2}=\frac{5}{24}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore\ \boxed{v_C=\frac{5}{24}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$