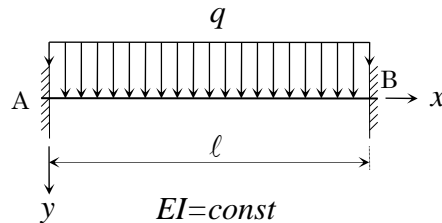


【問題 BD4-B-3】 下図に示すような曲げ剛性  $EI$  が一定の“両端固定ばり”について、以下の設問に答えよ。

- (1) たわみ角  $\theta(x)$  とたわみ  $y(x)$  の式
- (2) 最大のたわみ  $y_{\max}$  とその発生位置  $x_{\max}$
- (3) せん断力図 ( $Q$ -図) と曲げモーメント図 ( $M$ -図) を求めよ。



【解答】

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す4階の微分方程式  $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q$  を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''' = qx + C_1$$

$$EIy''' = \frac{q}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

$$EIy'' = \frac{q}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を求める。

(a)  $x = 0$  のとき、 $y' = 0$  より、  $C_3 = 0$

(b)  $x = 0$  のとき、 $y = 0$  より、  $C_4 = 0$

(c)  $x = l$  のとき、 $y' = 0$  より、  $\frac{q}{6}l^3 + \frac{C_1}{2}l^2 + C_2l = 0$  .....①

(d)  $x = l$  のとき、 $y = 0$  より、  $\frac{q}{24}l^4 + \frac{C_1}{6}l^3 + \frac{C_2}{2}l^2 = 0$  .....②

①を変形すると、  $ql^2 + 3C_1l + 6C_2 = 0$  .....①'

②を変形すると、  $ql^2 + 4C_1l + 12C_2 = 0$  .....②'

①'  $\times 2 -$  ②' より、  $ql^2 + 2C_1l = 0$   $\therefore C_1 = -\frac{q}{2}l$

これを①'に代入すると、  $6C_2 = -ql^2 - 3 \cdot \left(-\frac{q}{2}l\right) \cdot l = \frac{q}{2}l^2$   $\therefore C_2 = \frac{q}{12}l^2$

よって、たわみ角  $\theta(x)$  とたわみ  $y(x)$  の式は、次のようになる。

$$EIy''' = qx - \frac{q}{2}l$$

$$EIy'' = \frac{q}{2}x^2 - \frac{q}{2}lx + \frac{q}{12}l^2$$

$$EIy' = \frac{q}{6}x^3 - \frac{q}{4}lx^2 + \frac{q}{12}l^2x$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 - \frac{q}{12}lx^3 + \frac{q}{24}l^2x^2$$

$$\therefore \begin{cases} \theta(x) = y'(x) = \frac{q}{6EI}x^3 - \frac{q}{4EI}lx^2 + \frac{q}{12EI}l^2x \\ y(x) = \frac{q}{24EI}x^4 - \frac{q}{12EI}lx^3 + \frac{q}{24EI}l^2x^2 \end{cases}$$

これらを整理すると、次のようになる。

$$\begin{cases} \theta(x) = \frac{ql^3}{12EI} \cdot \left\{ 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right) + 1 \right\} \cdot \left(\frac{x}{l}\right) \\ y(x) = \frac{ql^4}{24EI} \cdot \left\{ \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right) + 1 \right\} \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{cases}$$

(2) 最大のたわみ  $y_{\max}$  は、たわみ角  $\theta(x) = \frac{dy}{dx} = 0$  のときに生ずるから、

$$\left\{ 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right) + 1 \right\} \cdot \left(\frac{x}{l}\right) = 0 \quad \therefore \left(\frac{x}{l}\right) \cdot \left\{ 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right) - 1 \right\} \cdot \left\{ \left(\frac{x}{l}\right) - 1 \right\} = 0 \quad \therefore \frac{x}{l} = 0, \frac{1}{2}, 1$$

ここで、 $0 < \frac{x}{l} < 1$  でないと意味を持たないから、 $\frac{x}{l} = \frac{1}{2}$  すなわち、 $x_{\max} = \frac{1}{2}l$  のとき、次のような最大のたわみ  $y_{\max}$  を生じる。

$$y_{\max} = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{24EI} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) = \frac{ql^4}{384EI} = 0.002604166 \dots \frac{ql^4}{EI} \doteq 0.00260 \cdot \frac{ql^4}{EI}$$

整理すると、

$$\boxed{x_{\max} = \frac{1}{2}l} \text{ のとき、 } \boxed{y_{\max} = \frac{ql^4}{384EI} \doteq 0.00260 \cdot \frac{ql^4}{EI}}$$

ちなみに、両端単純支持の場合は、 $y_{\max} = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI} \doteq 0.01302 \cdot \frac{ql^4}{EI}$  である。

(3) 支点反力  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $R_A$ ,  $R_B$  を求めると、以下のようになる。

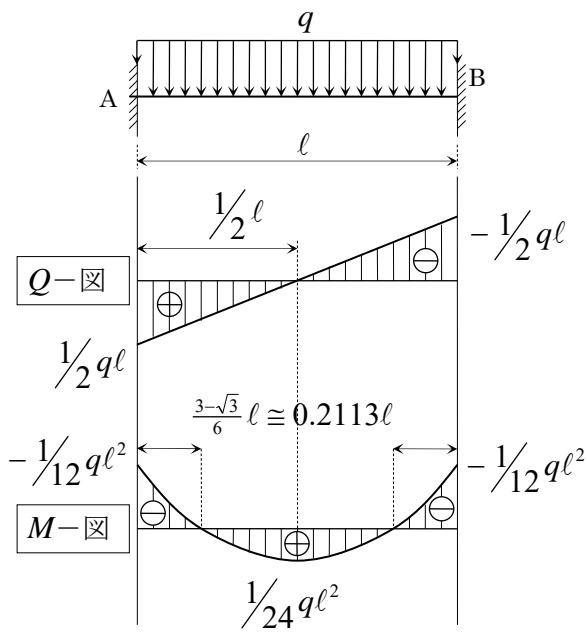
$$M = -EIy'' \text{ より、} \quad M_A = -EIy''|_{x=0} = -\frac{1}{12}q\ell^2 = M_B$$

$$Q = -EIy''' \text{ より、} \quad R_A = Q_A = -EIy'''|_{x=0} = \frac{1}{2}q\ell = R_B$$

以上より、

$$\boxed{M_A = M_B = -\frac{1}{12}q\ell^2}, \quad \boxed{R_A = R_B = \frac{1}{2}q\ell}$$

せん断力図 ( $Q$ -図)、曲げモーメント図 ( $M$ -図) を図示すると、下図のようになる。



曲げモーメントの最大値を求めると、

$$\begin{aligned} M_{\max} &= -EIy''|_{x=\frac{1}{2}\ell} \\ &= -\frac{q}{2} \cdot \frac{1}{4} \ell^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ell - \frac{1}{12} q \ell^2 \\ &= \left( -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) \cdot q \ell^2 \\ &= \frac{-3+6-2}{24} q \ell^2 \\ &= \frac{1}{24} q \ell^2 \end{aligned}$$

$$M = -EIy'' = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{1}{2}q\ell x - \frac{1}{12}q\ell^2 = 0 \text{ を解くと、}$$

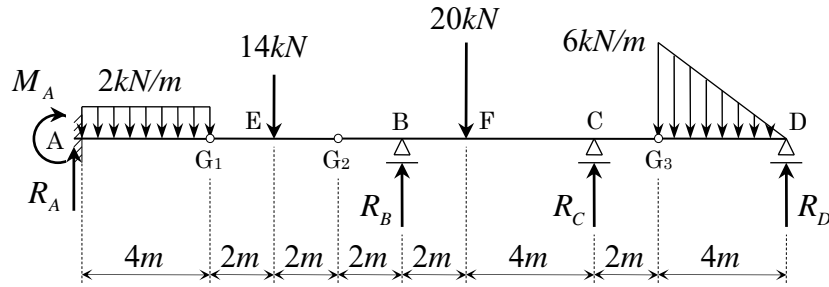
$$-6x^2 + 6\ell x - \ell^2 = 0$$

$$\therefore 6x^2 - 6\ell x + \ell^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \ell$$

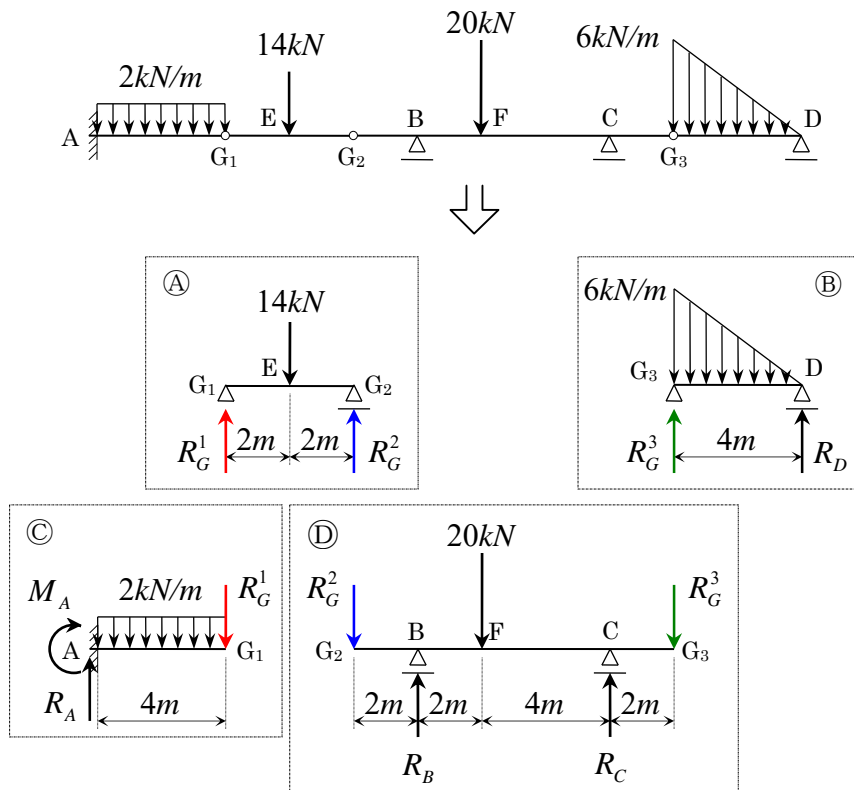
【問題 SF-G-2】 下図に示す静定ゲルバーばりについて、以下の設問に答えよ。

- (1) 支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ,  $R_D$  を求めよ。  
 (2) 断面力図、即ち、せん断力図 ( $Q$ -図), 曲げモーメント図 ( $M$ -図) を図示せよ。



【解答】

- (1) 静定ゲルバーばりを下図のように4つに分解して考える。



①について解くと、 $R_G^1 = R_G^2 = \frac{14}{2} = 7 \text{ (kN)}$

②について解くと、 $R_D + R_G^3 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$

$4R_D = 12 \cdot \frac{4}{3} = 16 \quad \therefore R_D = 4 \text{ (kN)}$  また、 $R_G^3 = 8 \text{ (kN)}$

③について解くと、 $R_A = 2 \cdot 4 + R_G^1 = 8 + 7 = 15 \text{ (kN)}$

$M_A + 8 \cdot 2 + R_G^1 \cdot 4 = 0 \quad \therefore M_A = -16 - 28 = -44 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$

④について解くと、 $R_B + R_C = R_G^2 + 20 + R_G^3 = 7 + 20 + 8 = 35$

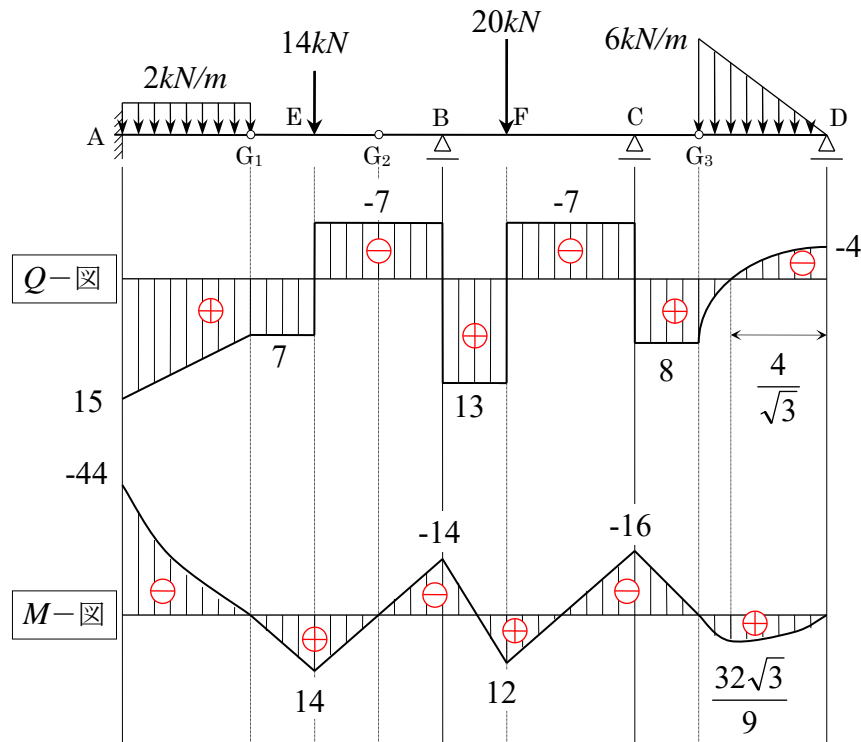
$6R_C + 2R_G^2 = 20 \cdot 2 + R_G^3 \cdot 8 \quad 6R_C = 40 + 64 - 14 = 90$

$\therefore R_C = 15 \text{ (kN)}$  また、 $R_B = 20 \text{ (kN)}$

以上より、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ,  $R_D$  をまとめると、次のようになる。

$$R_C = 15 (kN), \quad M_A = -44 (kN \cdot m), \quad R_B = 20 (kN), \quad R_C = 15 (kN), \quad R_D = 4 (kN)$$

(2)せん断力図 (Q-図), 曲げモーメント図 (M-図) を図示すると、下図のようになる。



なお、区間  $G_3D$  の変曲点については、右図のように考えて求めた。

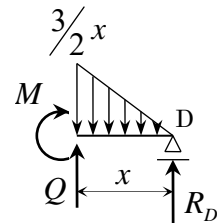
$$Q + R_D = \frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{2}x = \frac{3}{4}x^2 \quad \therefore Q = \frac{3}{4}x^2 - 4$$

$Q = 0$  となるのは、 $x^2 = \frac{16}{3}$  のときであり、 $x > 0$  であるから、

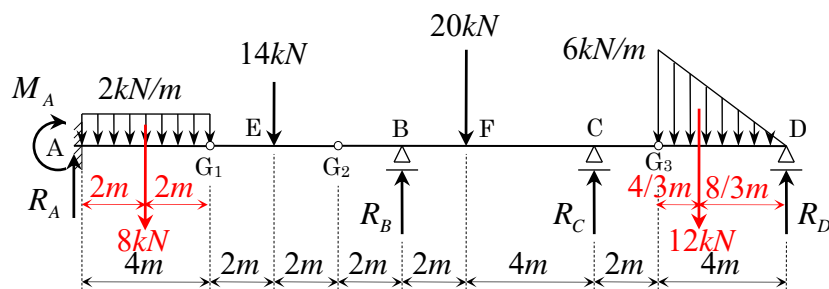
$$\therefore x = \frac{4}{\sqrt{3}} \cong 2.309 (m)$$

$$\text{このとき、} M + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = R_D \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore M = \frac{16}{\sqrt{3}} - \frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{32}{3\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{9} \cong 6.158 (kN \cdot m)$$



**【別解】**



ゲルバー梁全体に対して、剛体の釣合条件を適用する。

鉛直方向の力の釣合

$$R_A + R_B + R_C + R_D = 8 + 14 + 20 + 12 = 54 \quad \therefore R_A + R_B + R_C + R_D = 54 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

A点回りのモーメントの釣合

$$\begin{aligned} R_B \cdot 10m + R_C \cdot 16m + R_D \cdot 22m \\ = M_A + 8kN \cdot 2m + 14kN \cdot 6m + 20kN \cdot 12m + 12kN \cdot (18 + 4/3)m \\ 10R_B + 16R_C + 22R_D = M_A + 16 + 84 + 240 + 216 + 16 = M_A + 572 \\ \therefore 10R_B + 16R_C + 22R_D = M_A + 572 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

G<sub>1</sub>点回りのモーメントの釣合

$$\text{(左側)} \quad M_A + R_A \cdot 4m = 8kN \cdot 2m \quad \therefore M_A + 4R_A = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}_L$$

$$\begin{aligned} \text{(右側)} \quad R_B \cdot 6m + R_C \cdot 12m + R_D \cdot 18m = 14kN \cdot 2m + 20kN \cdot 8m + 12kN \cdot (14 + 4/3)m \\ 6R_B + 12R_C + 18R_D = 28 + 160 + 168 + 16 = 372 \quad \therefore R_B + 2R_C + 3R_D = 62 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}_R \end{aligned}$$

G<sub>2</sub>点回りのモーメントの釣合

$$\begin{aligned} \text{(左側)} \quad M_A + R_A \cdot 8m = 8kN \cdot 6m + 14kN \cdot 2m \\ M_A + 8R_A = 48 + 28 = 76 \quad \therefore M_A + 8R_A = 76 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(右側)} \quad R_B \cdot 2m + R_C \cdot 8m + R_D \cdot 14m = 20kN \cdot 4m + 12kN \cdot (10 + 4/3)m \\ 2R_B + 8R_C + 14R_D = 80 + 120 + 16 = 216 \quad \therefore R_B + 4R_C + 7R_D = 108 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}_R \end{aligned}$$

G<sub>3</sub>点回りのモーメントの釣合

$$\begin{aligned} \text{(左側)} \quad M_A + R_A \cdot 18m + R_B \cdot 8m + R_C \cdot 2m = 8kN \cdot 16m + 14kN \cdot 12m + 20kN \cdot 6m \\ M_A + 18R_A + 8R_B + 2R_C = 128 + 168 + 120 = 416 \\ \therefore M_A + 18R_A + 8R_B + 2R_C = 416 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}_L \end{aligned}$$

$$\text{(右側)} \quad R_D \cdot 4m = 12kN \cdot 4/3m \quad 4R_D = 16 \quad \therefore R_D = 4kN \quad \cdots \cdots \textcircled{5}_R$$

支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ,  $R_D$  (5つの未知数) に対して、①～⑤の5つの方程式を用いれば、一意的に支点反力は計算できる。ただし、③～⑤の3つの方程式については、(左側) (右側) のいずれか一方を用いる。

例えば、①, ②, ③<sub>L</sub>, ④<sub>L</sub>, ⑤<sub>R</sub>を用いれば次のようになる。

$$R_A + R_B + R_C + R_D = 54 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$10R_B + 16R_C + 22R_D = M_A + 572 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$M_A + 4R_A = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}_L$$

$$M_A + 8R_A = 76 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}_L$$

$$R_D = 4kN \quad \cdots \cdots \textcircled{5}_R$$

$$\textcircled{4}_L - \textcircled{3}_L \text{より、} 4R_A = 60 \quad \therefore R_A = 15kN$$

$$\text{これを} \textcircled{3}_L \text{に代入すると、} M_A + 4 \times 15 = 16 \quad \therefore M_A = -44kN \cdot m$$

これらと⑤<sub>R</sub>を①, ②に代入すると、

$$15 + R_B + R_C + 4 = 54 \quad \therefore R_B + R_C = 35 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}'$$

$$\begin{aligned} 10R_B + 16R_C + 22 \times 4 = -44 + 572 \quad \therefore 10R_B + 16R_C = 440 \\ \therefore 5R_B + 8R_C = 220 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}' \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}' \times 8 - \textcircled{2}' \text{より、} 3R_B = 35 \times 8 - 220 = 280 - 220 = 60$$

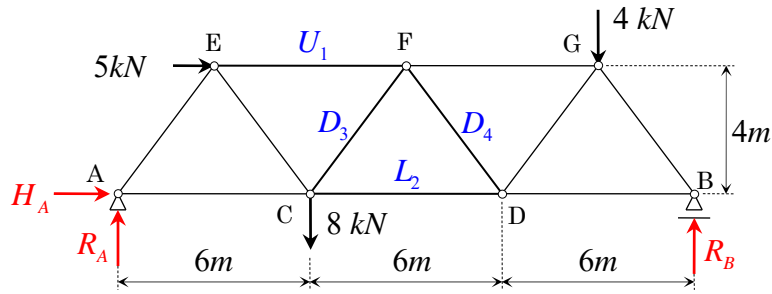
$$\therefore R_B = 20kN$$

$$\text{これを} \textcircled{1}' \text{に代入すると、} 20 + R_C = 35 \quad \therefore R_C = 15kN$$

以上をまとめると、

$$\boxed{R_A = 15kN}, \quad \boxed{M_A = -44kN \cdot m}, \quad \boxed{R_B = 20kN}, \quad \boxed{R_C = 15kN}, \quad \boxed{R_D = 4kN}$$

【問題 SF-T-1】 下図に示す静定ワーレントラスの部材力  $U_1$ ,  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $L_2$  を求めよ。



【解答】

まず、支点反力  $H_A$ ,  $R_A$ ,  $R_B$  を求めると、

水平方向の力の釣合から、

$$H_A + 5 = 0 \quad \therefore H_A = -5 \text{ (kN)}$$

鉛直方向の力の釣合から、

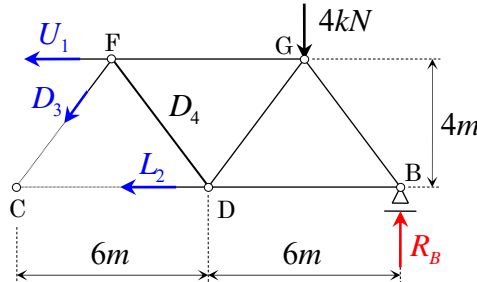
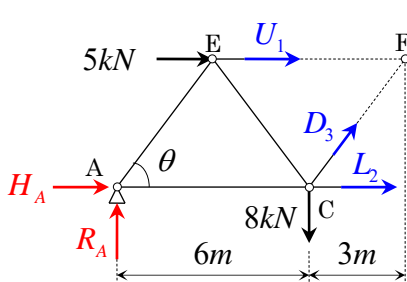
$$R_A + R_B = 8 + 4 = 12$$

A 点回りのモーメントの釣合から、

$$R_B \times 18m = 8kN \times 6m + 4kN \times 15m + 5kN \times 4m \\ = 48 + 60 + 20 = 128$$

$$\therefore R_B = \frac{128}{18} = \frac{64}{9} \text{ (kN)} \quad \text{よって、} R_A = \frac{44}{9} \text{ (kN)}$$

次に、下図に示すように  $t-t$  で切断して、左自由体と右自由体それぞれについて考えると、



$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

[左自由体について]

水平方向の力の釣合から、

$$H_A + 5 + U_1 + \frac{3}{5}D_3 + L_2 = 0$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5}D_3 + R_A = 8$$

$$\therefore \frac{4}{5}D_3 = 8 - \frac{44}{9} = \frac{28}{9}$$

$$\therefore D_3 = \frac{28}{9} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{9} \text{ (kN)}$$

F 点回りのモーメントの釣合から、

$$4L_2 + 4H_A + 8kN \times 3m = R_A \times 9m$$

$$\therefore 4L_2 - 20 + 24 = 44$$

$$\therefore 4L_2 = 40$$

$$\therefore L_2 = 10 \text{ (kN)}$$

C 点回りのモーメントの釣合から、

$$4U_1 + 5kN \times 4m + R_A \times 6m = 0$$

[右自由体について]

$$U_1 + L_2 + \frac{3}{5}D_3 = 0$$

$$\frac{4}{5}D_3 + 4 = R_B$$

$$\therefore \frac{4}{5}D_3 = \frac{64}{9} - 4 = \frac{28}{9}$$

$$4L_2 + 4kN \times 6m = R_B \times 9m$$

$$\therefore 4L_2 + 24 = 64$$

$$4U_1 + R_B \times 12m = 4kN \times 9m$$

$$\therefore 4U_1 + 20 + \frac{44}{9} \cdot 6 = 0$$

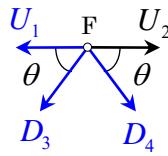
$$\therefore 4U_1 + \frac{64}{9} \cdot 12 = 36$$

$$\therefore 4U_1 = -\frac{88}{3} - 20 = -\frac{148}{3}$$

$$\therefore 4U_1 = 36 - \frac{256}{3} = -\frac{148}{3}$$

$$\therefore U_1 = -\frac{148}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{37}{3} \text{ (kN)}$$

さらに、 $F$  点での力の釣合を考えると、



水平方向の力の釣合から、

$$U_1 + \frac{3}{5}D_3 = U_2 + \frac{3}{5}D_4$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5}D_3 + \frac{4}{5}D_4 = 0$$

$$\therefore D_4 = -D_3 = -\frac{35}{9} \text{ (kN)}$$

以上をまとめると、

$$U_1 = -\frac{37}{3} \text{ (kN)}$$

$$D_3 = \frac{35}{9} \text{ (kN)}$$

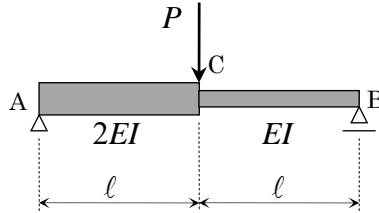
$$D_4 = -\frac{35}{9} \text{ (kN)}$$

$$L_2 = 10 \text{ (kN)}$$



【問題 EL-HSB-2】 下図に示すような“変断面単純ばり”の  $C$  点に集中荷重  $P$  が作用するとき、以下の設問に答えよ。ただし、 $A \sim C$  間の曲げ剛性は  $2EI$ 、 $C \sim B$  間の曲げ剛性は  $EI$  とする。

- (1)  $A$  点のたわみ角  $\theta_A$  と  $B$  点のたわみ角  $\theta_B$  を求めよ。
- (2)  $C$  点のたわみ角  $\theta_C$  とたわみ  $y_C$  を求めよ。
- (3) 最大のたわみ  $y_{\max}$  とその発生位置  $X$  ( $B$  点からの距離) を求めよ。



【解答】

まず、曲げモーメント図 ( $M$ -図) を描くと、右上図のようになる。

次に、境界条件を考慮して、“共役ばり”を作成し、これに“弾性荷重”を作用させると、右下図のようになる。

- (1) 右下図について、 $\alpha = \frac{Pl}{4EI}$  とおいて、支点反力  $\tilde{R}_A$ 、 $\tilde{R}_B$

を求めると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合から、

$$\tilde{R}_A + \tilde{R}_B = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot l + \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot l = \left(\frac{1}{2} + 1\right)\alpha l = \frac{3}{2}\alpha l$$

$B$  点回りのモーメントの釣合から、

$$\begin{aligned} \tilde{R}_A \cdot 2l &= \frac{1}{2} \alpha l \cdot \left(l + \frac{l}{3}\right) + \alpha l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{2} \alpha l \cdot \frac{4}{3} l + \frac{2}{3} \alpha l^2 \\ &= \frac{2}{3} \alpha l^2 + \frac{2}{3} \alpha l^2 = \frac{4}{3} \alpha l^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{R}_A = \frac{2}{3} \alpha l$$

$$\text{また、} \tilde{R}_B = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right)\alpha l = \frac{9-4}{6}\alpha l = \frac{5}{6}\alpha l$$

したがって、 $A$  点のたわみ角  $\theta_A$  と  $B$  点のたわみ角  $\theta_B$  は、次のようになる。

$$\theta_A = \tilde{Q}_A = \tilde{R}_A = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^2}{4EI} = \frac{1}{6} \cdot \frac{Pl^2}{EI} \qquad \theta_B = \tilde{Q}_B = -\tilde{R}_B = -\frac{5}{6} \cdot \frac{Pl^2}{4EI} = -\frac{5}{24} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$$

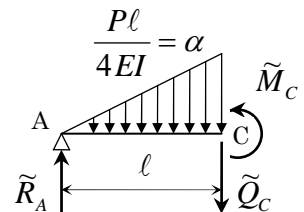
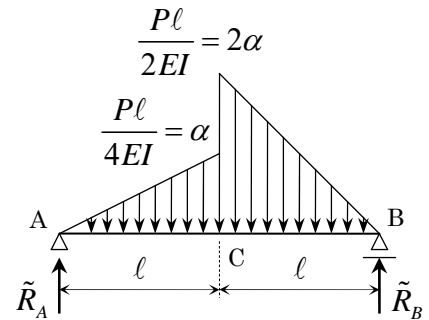
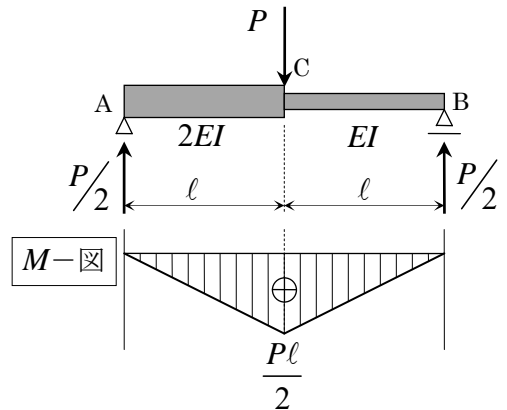
- (2)  $C$  点のたわみ角  $\theta_C$  とたわみ  $y_C$  は、右図について解いて、

$$\tilde{Q}_C + \frac{1}{2}\alpha l = \tilde{R}_A \qquad \therefore \tilde{Q}_C = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\alpha l = \frac{1}{6}\alpha l$$

$$\tilde{M}_C + \frac{1}{2}\alpha l \cdot \frac{l}{3} = \tilde{R}_A \cdot l \qquad \therefore \tilde{M}_C = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)\alpha l^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2$$

したがって、 $C$  点のたわみ角  $\theta_C$  とたわみ  $y_C$  は、次のようになる。

$$\theta_C = \tilde{Q}_C = \frac{1}{6} \cdot \frac{Pl^2}{4EI} = \frac{1}{24} \cdot \frac{Pl^2}{EI} \qquad y_C = \tilde{M}_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl^3}{4EI} = \frac{1}{8} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$



(3) 最大のたわみ  $y_{\max}$  とその発生位置  $X$  ( $B$  点からの距離) については、右図で考える。最大のたわみ  $y_{\max}$  が発生するのは、せん断力  $\tilde{Q}_x = 0$  となるときであるから、最大のたわみの発生位置  $X$  は、次のようになる。

$$\tilde{Q}_x + \tilde{R}_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha}{l} X \cdot X \quad \therefore \tilde{Q}_x + \frac{5}{6}\alpha l = \frac{\alpha}{l} X^2$$

ここで、 $\tilde{Q}_x = 0$  であるから、 $\frac{\alpha}{l} X^2 = \frac{5}{6}\alpha l$

$$\therefore X^2 = \frac{l}{\alpha} \cdot \frac{5}{6}\alpha l = \frac{5}{6}l^2 \quad \text{すなわち、} X > 0 \text{ より、} X = \frac{\sqrt{30}}{6}l$$

このとき、たわみ、すなわち、曲げモーメントは、次のようになる。

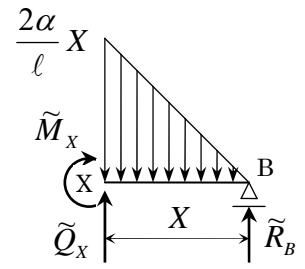
$$\tilde{M}_x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha}{l} \cdot \frac{\sqrt{30}}{6}l \cdot \frac{\sqrt{30}}{6}l \cdot \frac{X}{3} = \tilde{R}_B X \quad \therefore \tilde{M}_x + \frac{5}{6}\alpha l \cdot \frac{X}{3} = \frac{5}{6}\alpha l \cdot X$$

$$\therefore \tilde{M}_x = \frac{5}{6}\alpha l \cdot \frac{2}{3}X = \frac{5}{6}\alpha l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{30}}{6}l = \frac{5\sqrt{30}}{54}\alpha l^2$$

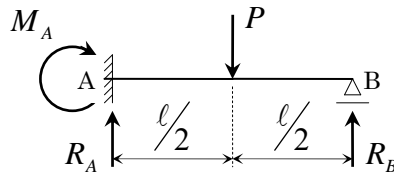
よって、最大のたわみ  $y_{\max}$  は、 $y_{\max} = \tilde{M}_x = \frac{5\sqrt{30}}{54}\alpha l^2 = \frac{5\sqrt{30}}{54} \cdot \frac{Pl^3}{4EI} = \frac{5\sqrt{30}}{216} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$

したがって、最大のたわみ  $y_{\max}$  とその発生位置  $X$  ( $B$  点からの距離) は、次のようになる。

$$X = \frac{\sqrt{30}}{6}l \text{ のとき、} \boxed{y_{\max} = \frac{5\sqrt{30}}{54}\alpha l^2 = \frac{5\sqrt{30}}{216} \cdot \frac{Pl^3}{EI}}$$



【問題 BD-N-3】 下図に示す“1次不静定ばり”の支点反力 $R_A$ ， $M_A$ ， $R_B$ と断面力図（ $Q$ -図， $M$ -図）を求めよ。



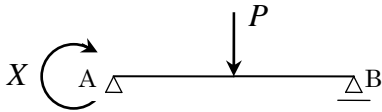
ただし、曲げ剛性 $EI$ は一定とし、不静定力 $X$ を下図のように

①  $A$  点の支点曲げモーメント

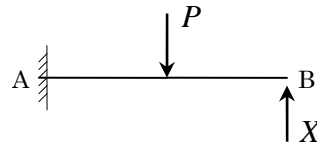
②  $B$  点の支点反力

の2通りに選んで解け。

①



②



【解答①】

$A$  点の支点曲げモーメントを不静定力に選ぶと、右図のようになる。

集中荷重 $P$ による $A$  点のたわみ角 $\theta_A^0$ は、教科書の表より、

$$\theta_A^0 = \frac{Pl^2}{16EI}$$

不静定モーメント $X$ による $A$  点のたわみ角 $\theta_A^1$ は、教科書の表より、

$$\theta_A^1 = \frac{l}{6EI}(2M_A + M_B) = \frac{Xl}{3EI} \quad (\because M_A = X, M_B = 0)$$

ここで、変位の適合条件より、 $\theta_A^0 + \theta_A^1 = 0$ だから、

$$\frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Xl}{3EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{3}{16}Pl = M_A$$

これを用いて、支点反力 $R_A$ ， $R_B$ を求めると、次のようになる。

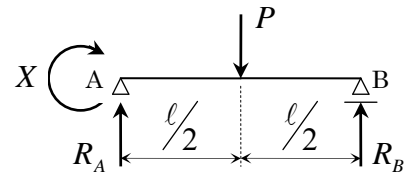
$$R_A \cdot l + X = P \cdot \frac{l}{2} \quad \therefore R_A = \frac{1}{2}P - \frac{X}{l} = \frac{1}{2}P + \frac{3}{16}P = \frac{11}{16}P$$

$$R_B \cdot l = X + P \cdot \frac{l}{2} \quad \therefore R_B = \frac{1}{2}P + \frac{X}{l} = \frac{1}{2}P - \frac{3}{16}P = \frac{5}{16}P$$

以上をまとめると、支点反力 $R_A$ ， $M_A$ ， $R_B$ は次のようになる。

$$\boxed{R_A = \frac{11}{16}P, \quad M_A = -\frac{3}{16}Pl, \quad R_B = \frac{5}{16}P}$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。（次頁参照）



【解答②】

$B$  点の支点反力を不静定力に選ぶと、右図のようになる。  
 集中荷重  $P$  による  $B$  点のたわみ  $y_B^0$  は、教科書の表より、

$$y_B^0 = \frac{Pa^3}{6EI} \left( 3\frac{\ell}{a} - 1 \right) = \frac{P \left( \frac{\ell}{2} \right)^3}{6EI} (6-1) = \frac{5P\ell^3}{48EI} \quad \left( \because a = \frac{\ell}{2} \right)$$

不静定力  $X$  による  $B$  点のたわみ  $y_B^1$  は、教科書の表より、

$$y_B^1 = -\frac{X\ell^3}{3EI}$$

ここで、変位の適合条件より、 $y_B^0 + y_B^1 = 0$  だから、

$$\frac{5P\ell^3}{48EI} - \frac{X\ell^3}{3EI} = 0 \quad \therefore X = \frac{5}{16}P = R_B$$

これを用いて、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$  を求めると、次のようになる。

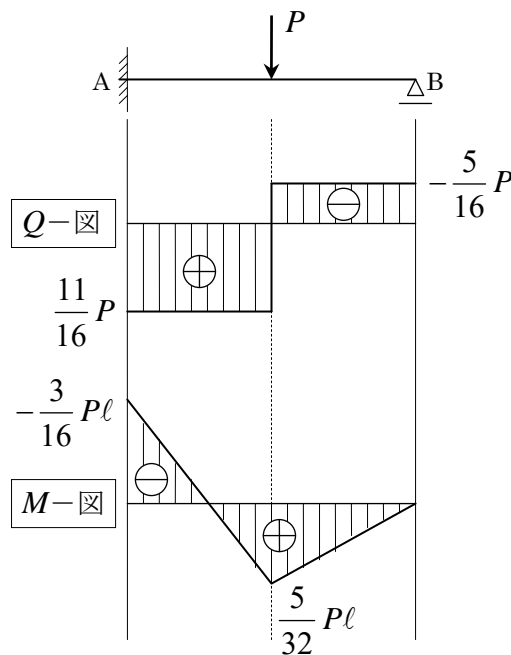
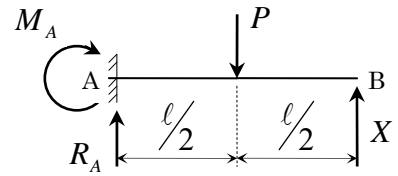
$$R_A + X = P \quad \therefore R_A = P - X = P - \frac{5}{16}P = \frac{11}{16}P$$

$$M_A + P \cdot \frac{\ell}{2} = X \cdot \ell \quad \therefore M_A = X \cdot \ell - \frac{1}{2}P\ell = \frac{5}{16}P\ell - \frac{1}{2}P\ell = -\frac{3}{16}P\ell$$

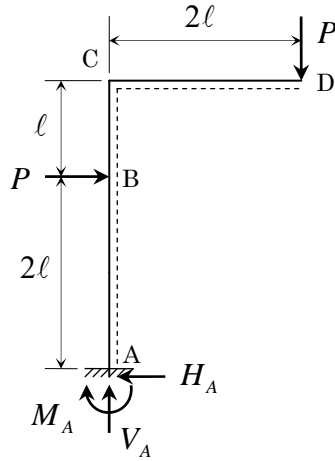
以上をまとめると、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  は次のようになる。

$$R_A = \frac{11}{16}P, \quad M_A = -\frac{3}{16}P\ell, \quad R_B = \frac{5}{16}P$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。



【問題 SF-R-1】 下図のような静定ラーメンの断面力図を図示せよ。



【解答】

まず、支点反力  $H_A$ ,  $V_A$ ,  $M_A$  を求める。

水平方向の力の釣合から、  $H_A = P$

鉛直方向の力の釣合から、  $V_A = P$

A 点回りのモーメントの釣合から、  $M_A + P \times 2l + P \times 2l = 0$

$$\therefore M_A = -4Pl$$

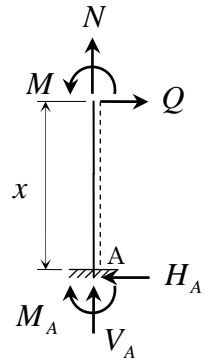
次に、断面力  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  を以下のように3つに分けて求める。

1) A~B 間

$$N + V_A = 0 \quad \therefore N = -V_A = -P$$

$$Q = H_A = P$$

$$M = M_A + H_A x \quad \therefore M = -4Pl + Px = P \cdot (x - 4l)$$



2) B~C 間

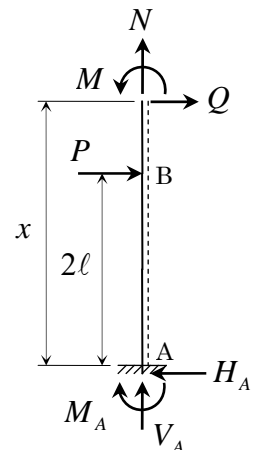
$$N + V_A = 0 \quad \therefore N = -V_A = -P$$

$$Q + P = H_A \quad \therefore Q = 0$$

$$M + P \cdot (x - 2l) = M_A + H_A x$$

$$\therefore M = -P \cdot (x - 2l) - 4Pl + Px$$

$$= -Px + 2Pl - 4Pl + Px = -2Pl$$



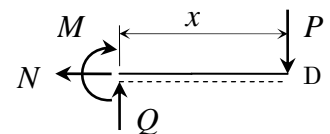
3) C~D 間

$$N = 0$$

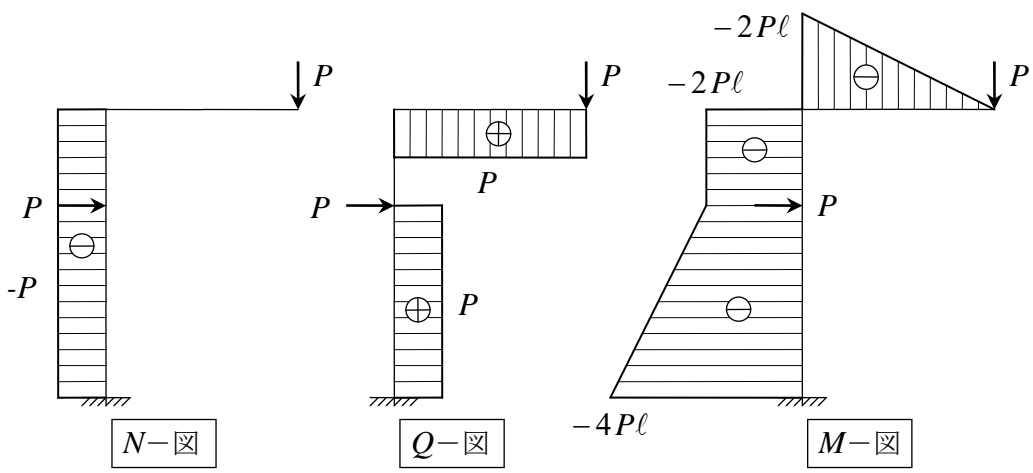
$$Q = P$$

$$M + Px = 0$$

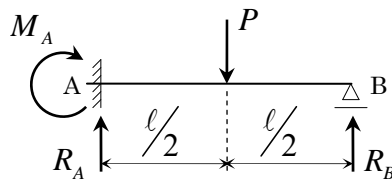
$$\therefore M = -Px$$



以上をまとめて、図示すると下図のようになる。

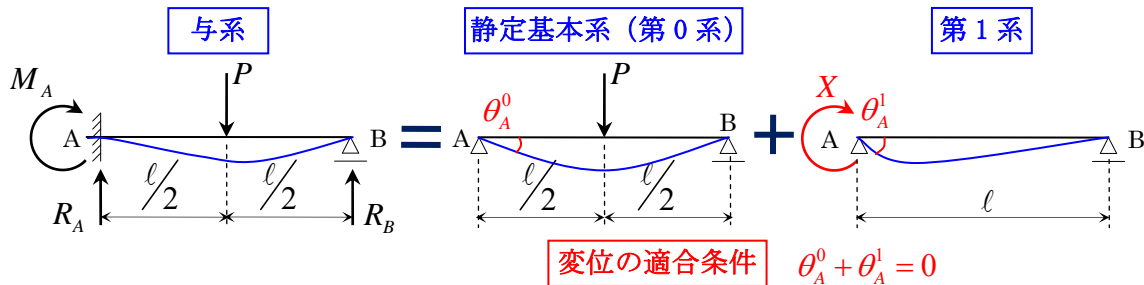


【問題 BD-N-3】 下図に示す“1次不静定ばり”の支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  と断面力図 ( $Q$ -図,  $M$ -図) を求めよ。

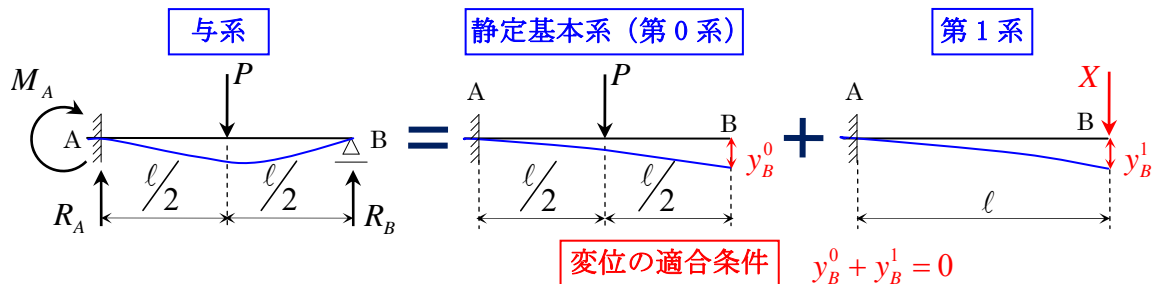


ただし、曲げ剛性  $EI$  は一定とし、不静定力  $X$  を①, ②のように2通り選んで解け。

① A 点の支点曲げモーメント  $\rightarrow$  静定基本系を「単純ばり」とする。



② B 点の支点反力  $\rightarrow$  静定基本系を「片持ばり」とする。



なお、“変位”を求めるには、《変形の公式を用いる方法》と《弾性荷重法を用いる方法》の2つの方法がある。下表は、資料「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」からの抜粋である。

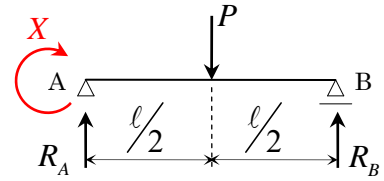
	荷重状態	特定点のたわみ角
単純ばり ②		$\theta_A = -\theta_B = \frac{Pl^2}{16EI}$
単純ばり ⑦		$\theta_A = \frac{l}{6EI}(2M_A + M_B)$ $\theta_B = \frac{-l}{6EI}(M_A + 2M_B)$
	荷重状態	特定点のたわみ
片持ばり ③		$y_{\max} = y_B = \frac{Pa^3}{6EI} \left( 3\frac{l}{a} - 1 \right)$
片持ばり ②		$y_{\max} = y_B = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$

《変形の公式を用いる方法》

【解答①】 (特定点のたわみ角の式を用いる)

A 点の支点曲げモーメントを不静定力に選ぶと、右図のようになる。  
集中荷重  $P$  による A 点のたわみ角  $\theta_A^0$  は、「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」(単純ばり②) より、

$$\theta_A^0 = \frac{Pl^2}{16EI}$$



不静定モーメント  $X$  による A 点のたわみ角  $\theta_A^1$  は、「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」(単純ばり⑦) において  $M_A = X, M_B = 0$  とおくことにより、

$$\theta_A^1 = \frac{l}{6EI}(2M_A + M_B) = \frac{Xl}{3EI}$$

ここで、変位の適合条件より、 $\theta_A^0 + \theta_A^1 = 0$  だから、

$$\frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Xl}{3EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{3}{16}Pl = M_A$$

これを用いて、支点反力  $R_A, R_B$  を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} R_A \cdot l + X &= P \cdot \frac{l}{2} & \therefore R_A &= \frac{1}{2}P - \frac{X}{l} = \frac{1}{2}P + \frac{3}{16}P = \frac{11}{16}P \\ R_B \cdot l &= X + P \cdot \frac{l}{2} & \therefore R_B &= \frac{1}{2}P + \frac{X}{l} = \frac{1}{2}P - \frac{3}{16}P = \frac{5}{16}P \end{aligned}$$

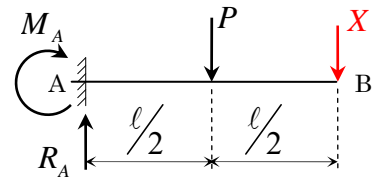
以上をまとめると、支点反力  $R_A, M_A, R_B$  は次のようになる。

$$\boxed{R_A = \frac{11}{16}P, \quad M_A = -\frac{3}{16}Pl, \quad R_B = \frac{5}{16}P}$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。(次頁参照)

【解答②】 (特定点のたわみの式を用いる)

B 点の支点反力を不静定力に選ぶと、右図のようになる。  
集中荷重  $P$  による B 点のたわみ  $y_B^0$  は、「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」(片持ばり③) において  $a = \frac{l}{2}$  とおくことにより、



$$y_B^0 = \frac{Pa^3}{6EI} \left( 3\frac{l}{a} - 1 \right) = \frac{P \left( \frac{l}{2} \right)^3}{6EI} \left\{ 3 \left( \frac{l}{\frac{l}{2}} \right) - 1 \right\} = \frac{Pl^3}{48EI} (6-1) = \frac{5Pl^3}{48EI}$$

不静定力  $X$  による B 点のたわみ  $y_B^1$  は、「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」(片持ばり②) において  $P = X$  とおくことにより、

$$y_B^1 = \frac{Xl^3}{3EI}$$

ここで、変位の適合条件より、 $y_B^0 + y_B^1 = 0$  だから、

$$\frac{5Pl^3}{48EI} + \frac{Xl^3}{3EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{5}{16}P = -R_B$$

これを用いて、支点反力  $R_A, M_A$  を求めると、次のようになる。

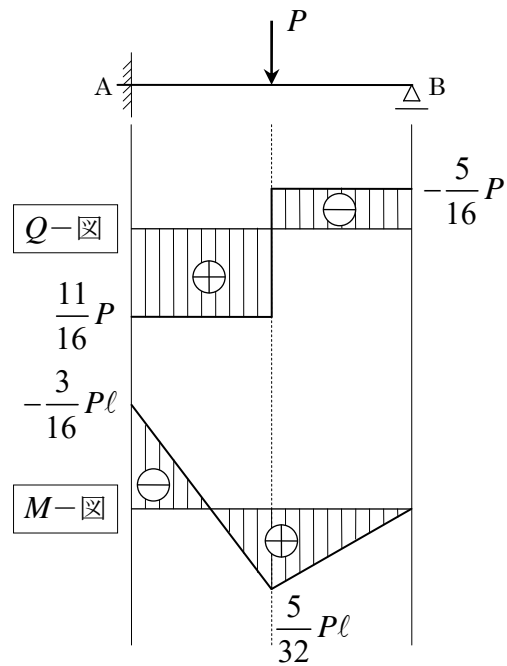
$$\begin{aligned} R_A &= P + X & \therefore R_A &= P - \frac{5}{16}P = \frac{11}{16}P \\ M_A + P \cdot \frac{l}{2} + X \cdot l &= 0 & \therefore M_A &= -\frac{1}{2}Pl - \left( -\frac{5}{16}P \right) \cdot l = -\frac{3}{16}Pl \end{aligned}$$



以上をまとめると、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  は次のようになる。

$$R_A = \frac{11}{16}P, \quad M_A = -\frac{3}{16}Pl, \quad R_B = \frac{5}{16}P$$

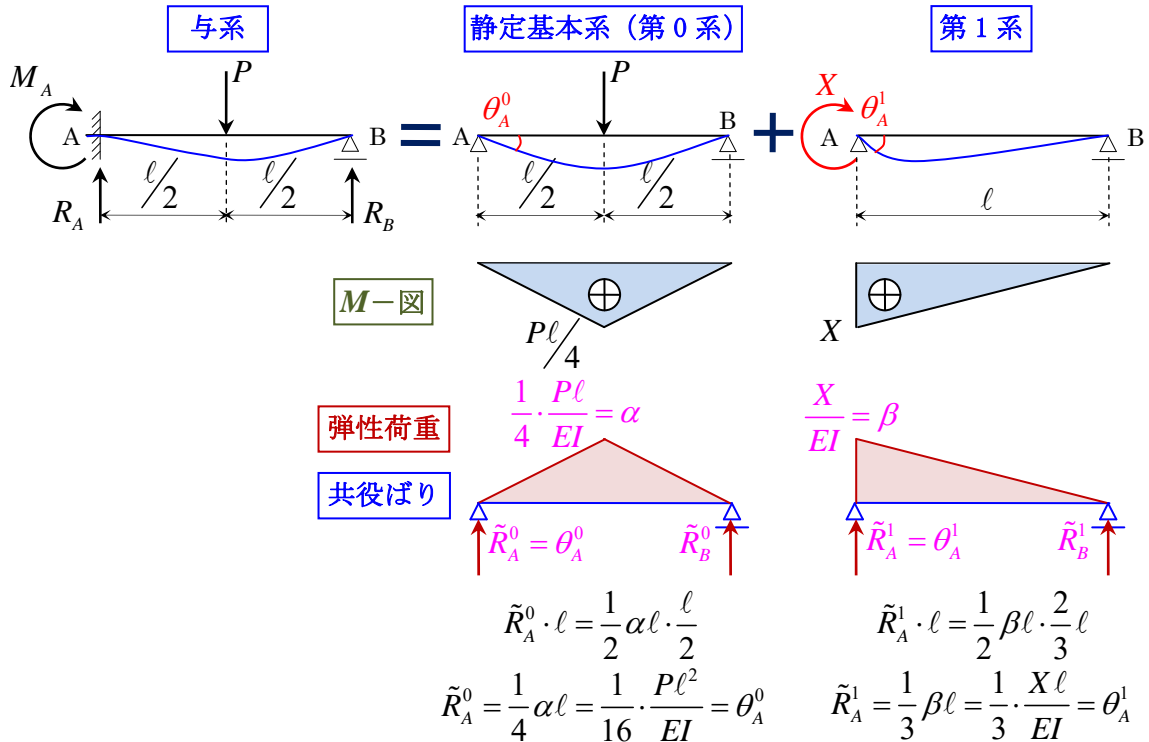
これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。



《弾性荷重法を用いる方法》

【解答①】

下図に示すように、「弾性荷重法」を用いて、「変形の公式を用いる方法」で利用した「単純ばりのA点のたわみ角」を求め、「変位の適合条件」より不静定力  $X = M_A$  を求める。



**変位の適合条件**  $\theta_A^0 + \theta_A^1 = 0$

$$\theta_A^0 + \theta_A^1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{Pl^2}{EI} + \frac{1}{3} \cdot \frac{X \ell}{EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{3}{16} Pl = M_A$$

得られた不静定力  $X = M_A$  を用いて、支点反力  $R_A$ ,  $R_B$  を求めると、次のようになる。

$$R_A \cdot \ell + X = P \cdot \frac{\ell}{2} \quad \therefore R_A = \frac{1}{2} P - \frac{X}{\ell} = \frac{1}{2} P + \frac{3}{16} P = \frac{11}{16} P$$

$$R_B \cdot \ell = X + P \cdot \frac{\ell}{2} \quad \therefore R_B = \frac{1}{2} P + \frac{X}{\ell} = \frac{1}{2} P - \frac{3}{16} P = \frac{5}{16} P$$

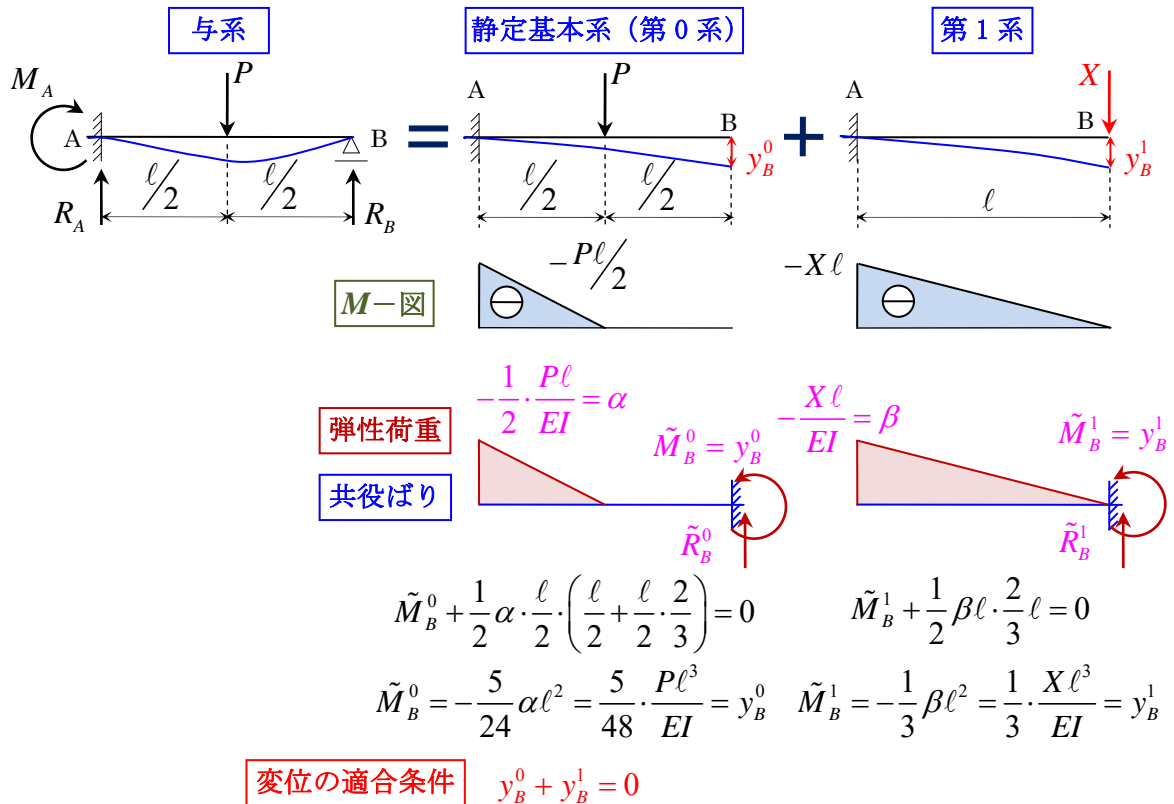
以上をまとめると、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  は次のようになる。

$$R_A = \frac{11}{16} P, \quad M_A = -\frac{3}{16} Pl, \quad R_B = \frac{5}{16} P$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。(前頁参照)

【解答②】

下図に示すように、「弾性荷重法」を用いて、「変形の公式を用いる方法」で利用した「片持ばりのB点のたわみ」を求め、「変位の適合条件」より不静定力  $X = -R_B$  を求める。



$$y_B^0 + y_B^1 = \frac{5}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EI} + \frac{1}{3} \cdot \frac{X \ell^3}{EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{5}{16} P = -R_B$$

得られた不静定力  $X = -R_B$  を用いて、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$  を求めると、次のようになる。

$$R_A = P + X \quad \therefore R_A = P - \frac{5}{16} P = \frac{11}{16} P$$

$$M_A + P \cdot \frac{\ell}{2} + X \cdot \ell = 0 \quad \therefore M_A = -\frac{1}{2} Pl - \left( -\frac{5}{16} P \right) \cdot \ell = -\frac{3}{16} Pl$$

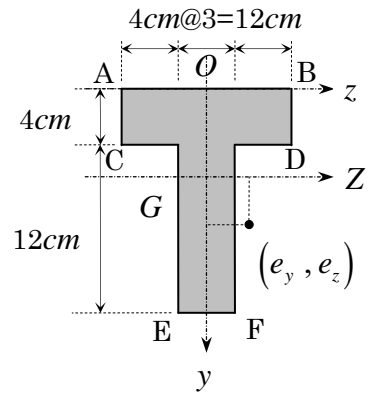
以上をまとめると、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  は次のようになる。

$$R_A = \frac{11}{16} P, \quad M_A = -\frac{3}{16} Pl, \quad R_B = \frac{5}{16} P$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。(前々頁参照)

【5】右図に示すT型断面の『断面の核』を以下の手順で求め、図示せよ。

- (1)  $O$ - $y, z$ 座標系において、T型断面の重心  $G(Y_G, 0)$  を求めよ。
- (2) 重心  $G$  を通る  $y, Z$  軸に関する断面2次モーメント  $I_y, I_z$  を求めよ。
- (3) 『断面の核』を斜線で図示せよ。



【解答】

『断面の核』を求めるためには、重心  $G$  を通る主軸を求める必要がある。

そこで、まず、T型断面の重心  $G$  を求める。このとき、右図に示すT型断面は、 $y$  軸に関して対称であるから、その重心  $G$  は、 $y, z$  座標系において  $(Y_G, 0)$  と表され、次の表から求められる。

	幅 $b_i$	高さ $h_i$	面積 $A_i$	重心 $y_{Gi}$	$G_i$	$A_i \cdot y^2$	$I_{Gi}$
I	12	4	48	2	96	768	64
II	4	12	48	10	480	768	576
計			96		576	1536	640

ここで、表中の記号は、 $G_i = A_i \cdot y_{Gi}$ ,  $A_i \cdot y^2 = A_i \cdot (y_{Gi} - Y_G)^2$ ,  $I_{Gi} = \frac{b_i h_i^3}{12}$  を意味する。

$$\therefore Y_G = \frac{G}{A} = \frac{576}{96} = 6 \text{ (cm)} \quad \text{したがって、} G(Y_G, 0) = (6, 0)$$

次に、右図に示した重心  $G$  を通る  $y, Z$  軸は主軸となるから、 $y, Z$  軸に関する断面2次モーメント  $I_y, I_z$  は、次のようになる。

$$I_z = A_i \cdot (y_{Gi} - Y_G)^2 + I_{Gi} = 1536 + 640 = 2176 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$I_y = \frac{4 \times 12^3}{12} + \frac{12 \times 4^3}{12} = 576 + 64 = 640 \text{ (cm}^4\text{)}$$

また、断面積  $A$  は、 $A = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$  だから、 $y, Z$  軸に関する回転半径をそれぞれ  $r_y, r_z$  とすると、

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{640}{96} = \frac{20}{3} \cong 6.67 \text{ (cm}^2\text{)} \quad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{2176}{96} = \frac{68}{3} \cong 22.67 \text{ (cm}^2\text{)}$$

ここで、載荷荷重の偏心位置を  $(e_y, e_z)$  とすると、中立軸は、 $1 + \frac{e_y}{r_z^2} y + \frac{e_z}{r_y^2} z = 0$  と表され、

中立軸が  $y, Z$  軸と交わる点すなわち切片  $n_y, n_z$  は、次のようになる。

$$n_y = -\frac{r_z^2}{e_y}, \quad n_z = -\frac{r_y^2}{e_z} \quad \text{逆に、} \quad e_y = -\frac{r_z^2}{n_y}, \quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z}$$

よって、『断面の核』の端の位置を決めるためには、中立軸が次の4通り(6通り)の限界位置にある場合について、載荷荷重の偏心位置  $(e_y, e_z)$  を求めればよい。

(1) 直線  $AB$  が中立軸になるとき、即ち、 $y = -6 \text{ (cm)}$  のとき、切片は、 $n_y = -6, n_z = \infty$  となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{68/3}{-6} = \frac{34}{9} \cong 3.78 \text{ (cm)} \quad \therefore K(e_y, e_z) = \left( \frac{34}{9}, 0 \right) \cong (3.78, 0)$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{20/3}{\infty} = 0 \text{ (cm)}$$

(2) 直線  $AC$  または直線  $BD$  が中立軸になるとき、即ち、 $Z = \pm 6 \text{ (cm)}$  のとき、切片は、 $n_y = \infty, n_z = \pm 6$  となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{68/3}{\infty} = 0 \text{ (cm)}$$

$$\therefore L(e_y, e_z) = \left(0, \mp \frac{10}{9}\right) \cong (0, \mp 1.11)$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{20/3}{\pm 6} = \mp \frac{10}{9} \cong \mp 1.11 \text{ (cm)}$$

(3) 直線 CE または直線 DF が中立軸になるとき、

$$C(Z, y) = C(-6, -2), E(-2, 10) \text{ だから、直線 CE は、 } y - 10 = \frac{-2 - 10}{-6 - (-2)}(Z + 2) \text{ 即ち、 } y = 3Z + 16$$

で表され、切片  $n_y$  は、 $Z = 0$  として、 $n_y = 16 \text{ (cm)}$ 、切片  $n_z$  は、 $y = 0$  として、 $n_z = -\frac{16}{3} \text{ (cm)}$

$$\text{また、 } D(Z, y) = D(6, -2), F(2, 10) \text{ だから、直線 DF は、 } y - 10 = \frac{-2 - 10}{6 - 2}(Z - 2) \text{ 即ち、 } y = -3Z + 16$$

で表され、切片  $n_y$  は、 $Z = 0$  として、 $n_y = 16 \text{ (cm)}$ 、切片  $n_z$  は、 $y = 0$  として、 $n_z = \frac{16}{3} \text{ (cm)}$

したがって、切片は、 $n_y = 16$ 、 $n_z = \mp \frac{16}{3}$  となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{68/3}{16} = -\frac{68}{48} = -\frac{17}{12} \cong -1.42 \text{ (cm)}$$

$$\therefore M(e_y, e_z) = \left(-\frac{17}{12}, \pm \frac{5}{4}\right) \cong (-1.42, \pm 1.25)$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{20/3}{\mp 16/3} = \pm \frac{20}{16} = \pm \frac{5}{4} = \pm 1.25 \text{ (cm)}$$

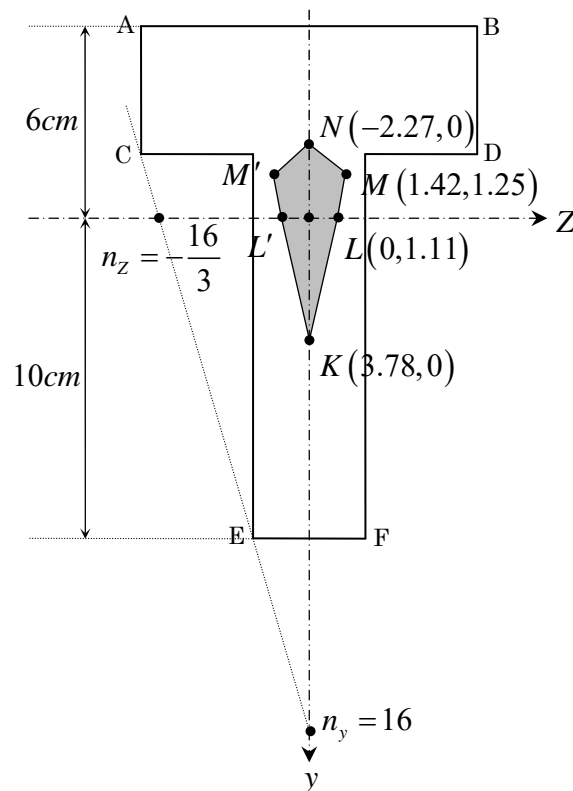
(4) 直線 EF が中立軸になるとき、即ち、 $y = 10 \text{ (cm)}$  のとき、切片は、 $n_y = 10$ 、 $n_z = \infty$  となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{68/3}{10} = -\frac{34}{15} \cong -2.27 \text{ (cm)}$$

$$\therefore N(e_y, e_z) = \left(-\frac{34}{15}, 0\right) \cong (-2.27, 0)$$

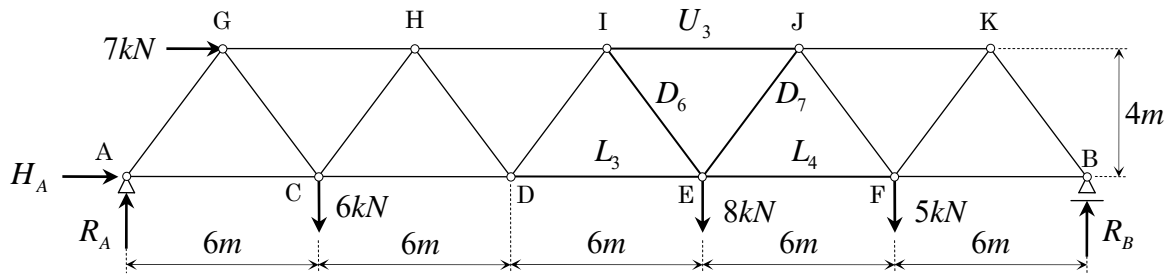
$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{20/3}{\infty} = 0 \text{ (cm)}$$

以上をまとめて、「断面の核」を塗りつぶして図示すると下図のようになる。



【問題 SF-T-2】 下図に示す静定ワーレントラスについて、以下の設問に答えよ。

- (1) 支点反力  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$  を求めよ。  
 (2) 部材力  $U_3$ ,  $D_6$ ,  $D_7$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  を求めよ。



【解答】

(1) 支点反力  $H_A$ ,  $R_A$ ,  $R_B$  を求めると、

水平方向の力の釣合から、  $H_A + 7 = 0 \quad \therefore H_A = -7 \text{ (kN)}$

鉛直方向の力の釣合から、  $R_A + R_B = 6 + 8 + 5 = 19$

A 点回りのモーメントの釣合から、

$$R_B \times 30m = 6kN \times 6m + 8kN \times 18m + 5kN \times 24m + 7kN \times 4m$$

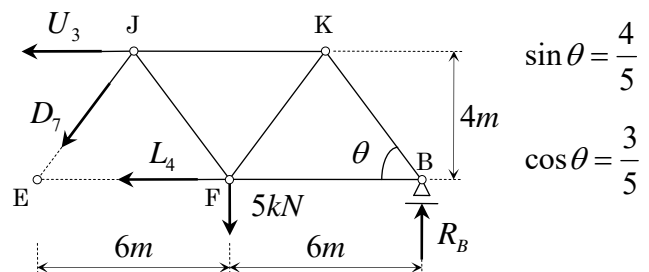
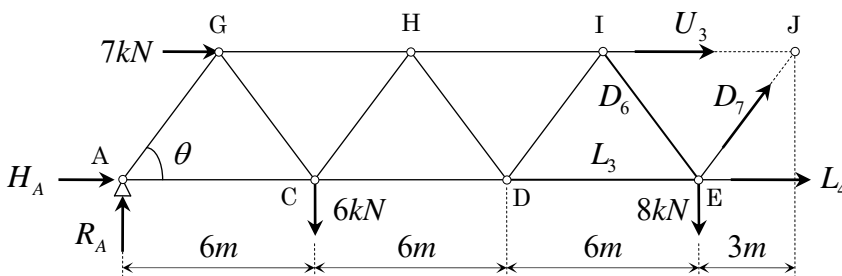
$$= 36 + 144 + 120 + 28 = 328$$

$$\therefore R_B = \frac{328}{30} = \frac{164}{15} \text{ (kN)} \quad \text{よって、} R_A = \frac{121}{15} \text{ (kN)}$$

以上をまとめると、  $R_A = \frac{121}{15} \text{ (kN)}$ ,  $H_A = -7 \text{ (kN)}$ ,  $R_B = \frac{164}{15} \text{ (kN)}$

(2) 部材力は、“断面法（切断法）”を基本として求める。

このため、下図に示すように  $t-t$  で切断して、左自由体と右自由体それぞれについて考える。



$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

[左自由体について]

水平方向の力の釣合から、

$$H_A + 7 + U_3 + D_7 \cos \theta + L_4 = 0$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$D_7 \sin \theta + R_A = 6 + 8$$

[右自由体について]

$$U_3 + D_7 \cos \theta + L_4 = 0$$

$$D_7 \sin \theta + 5 = R_B$$

$$\therefore \frac{4}{5}D_7 = 14 - \frac{121}{15} = \frac{89}{15}$$

$$\therefore D_7 = \frac{89}{15} \cdot \frac{5}{4} = \frac{89}{12} \text{ (kN)}$$

$J$  点回りのモーメントの釣合から、

$$4L_4 + 4H_A + 6kN \times 15m + 8kN \times 3m = R_A \times 21m$$

$$\therefore 4L_4 - 28 + 90 + 24 = \frac{121}{15} \cdot 21 = \frac{847}{5}$$

$$\therefore 4L_4 = \frac{847}{5} - 86 = \frac{847 - 430}{5} = \frac{417}{5}$$

$$\therefore L_4 = \frac{417}{20} \text{ (kN)}$$

$$\therefore \frac{4}{5}D_7 = \frac{164}{15} - 5 = \frac{89}{15}$$

$$4L_4 + 5kN \times 3m = R_B \times 9m$$

$$\therefore 4L_4 + 15 = \frac{164}{15} \cdot 9 = \frac{492}{5}$$

$$\therefore 4L_4 = \frac{492}{5} - 15 = \frac{492 - 75}{5} = \frac{417}{5}$$

$E$  点回りのモーメントの釣合から、

$$4U_3 + 7kN \times 4m + R_A \times 18m = 6kN \times 12m$$

$$\therefore 4U_3 + 28 + \frac{121}{15} \cdot 18 = 72$$

$$\therefore 4U_3 = 72 - \frac{726}{5} - 28 = 44 - \frac{726}{5}$$

$$= \frac{220 - 726}{5} = -\frac{506}{5}$$

$$\therefore U_3 = -\frac{506}{20} = -\frac{253}{10} \text{ (kN)}$$

$$4U_3 + R_B \times 12m = 5kN \times 6m$$

$$\therefore 4U_3 + \frac{164}{15} \cdot 12 = 30$$

$$\therefore 4U_3 = 30 - \frac{656}{5}$$

$$= \frac{150 - 656}{5} = -\frac{506}{5}$$

次に、 $E$  点での力の釣合を考えると、

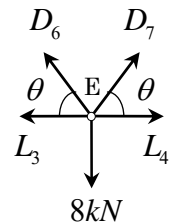
鉛直方向の力の釣合から、 $D_6 \sin \theta + D_7 \sin \theta = 8$

$$\therefore \frac{4}{5}(D_6 + D_7) = 8 \quad \therefore D_6 + D_7 = 10$$

$$\therefore D_6 = 10 - D_7 = 10 - \frac{89}{12} = \frac{120 - 89}{12} = \frac{31}{12} \text{ (kN)}$$

水平方向の力の釣合から、 $L_3 + D_6 \cos \theta = L_4 + D_7 \cos \theta$

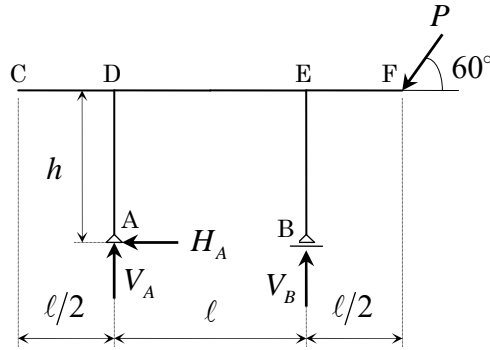
$$\therefore L_3 = L_4 + \frac{3}{5}(D_7 - D_6) = \frac{417}{20} + \frac{3}{5}\left(\frac{89}{12} - \frac{31}{12}\right) = \frac{417}{20} + \frac{3}{5} \cdot \frac{68}{12} = \frac{417}{20} + \frac{68}{20} = \frac{485}{20} = \frac{95}{4} \text{ (kN)}$$



以上をまとめると、

$$\boxed{U_3 = -\frac{253}{10} \text{ (kN)}}, \quad \boxed{D_6 = \frac{31}{12} \text{ (kN)}}, \quad \boxed{D_7 = \frac{89}{12} \text{ (kN)}}, \quad \boxed{L_3 = \frac{95}{4} \text{ (kN)}}, \quad \boxed{L_4 = \frac{417}{20} \text{ (kN)}}$$

【問題 SF-R-2】 下図に示す静定ラーメンの断面力図、すなわち、軸方向力図 ( $N$ -図), せん断力図 ( $Q$ -図), 曲げモーメント図 ( $M$ -図) を図示せよ。



【解答】

荷重  $P$  を鉛直方向と水平方向に分解すると、

$$\text{鉛直荷重} \quad P \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} P$$

$$\text{水平荷重} \quad P \cos 60^\circ = \frac{1}{2} P$$

となり、右図のようになる。

このとき、支点反力  $V_A$ ,  $H_A$ ,  $V_B$  を剛体の釣合条件より求めると、次のようになる。

$$\text{水平方向の力の釣合から、} \quad H_A + \frac{1}{2} P = 0 \quad \therefore H_A = -\frac{1}{2} P$$

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} \quad V_A + V_B = \frac{\sqrt{3}}{2} P$$

$$A \text{ 点回りのモーメントの釣合から、} \quad V_B \cdot \ell + \frac{1}{2} P \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{2} P \cdot \left( \ell + \frac{\ell}{2} \right)$$

$$\therefore V_B = \frac{3\sqrt{3}}{4} P - \frac{1}{2} P \cdot \frac{h}{\ell} = \frac{P}{2} \cdot \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{\ell} \right) \quad \therefore V_A = \frac{P}{2} \cdot \left( \frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

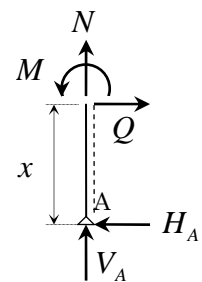
これらを用いて、部材  $AD$ ,  $BE$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$  毎に断面力  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  を求めて行く。

部材  $AD$  について、

$$N + V_A = 0 \quad \therefore N = -V_A = -\frac{P}{2} \cdot \left( \frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$Q = H_A = -\frac{1}{2} P$$

$$M = H_A x = -\frac{1}{2} P x$$

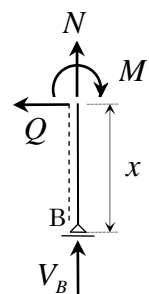


部材  $BE$  について、

$$N + V_B = 0 \quad \therefore N = -V_B = -\frac{P}{2} \cdot \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{\ell} \right)$$

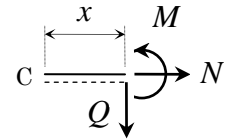
$$Q = 0$$

$$M = 0$$





部材  $CD$  について、  
 $N = Q = M = 0$

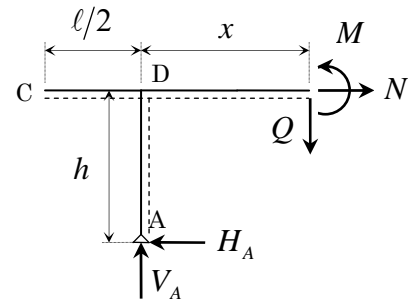


部材  $DE$  について、

$$N = H_A = -\frac{1}{2}P$$

$$Q = V_A = \frac{P}{2} \cdot \left( \frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$M = V_A x + H_A h = \frac{P}{2} \cdot \left( \frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot x - \frac{1}{2}Ph$$

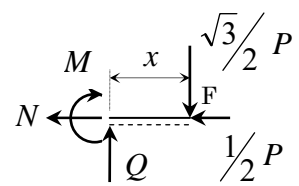


部材  $EF$  について、

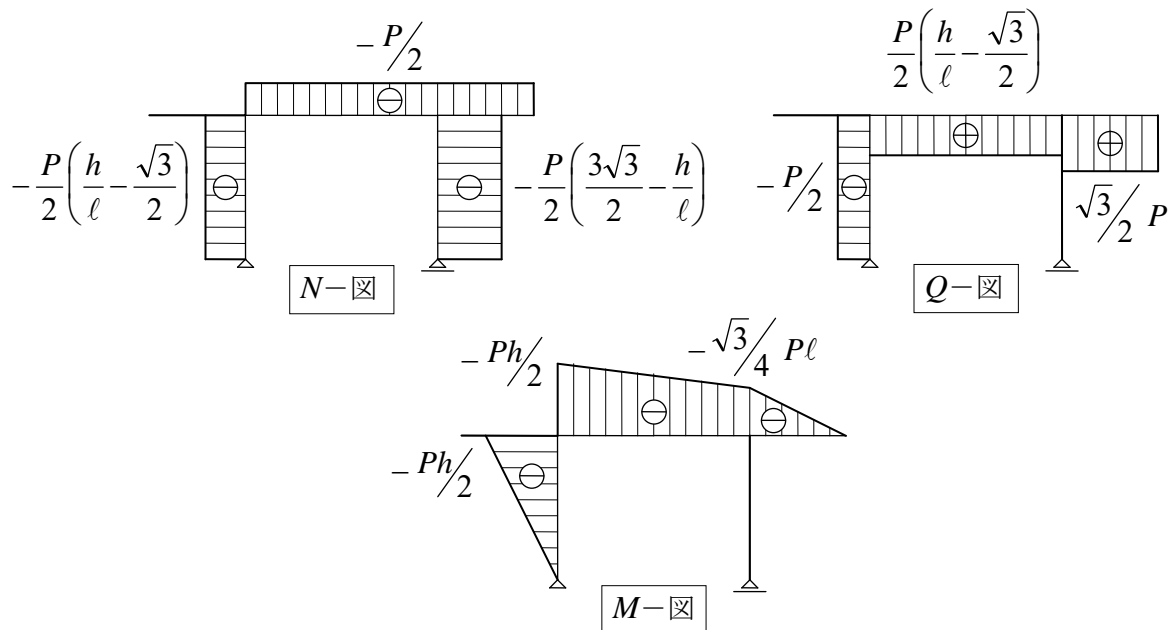
$$N + \frac{1}{2}P = 0 \quad \therefore N = -\frac{1}{2}P$$

$$Q = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

$$M + \frac{\sqrt{3}}{2}Px = 0 \quad \therefore M = -\frac{\sqrt{3}}{2}Px$$



以上をまとめて、断面力図を図示すると下図のようになる。



【3】 下図-Aに示す静定トラスについて、次の設問に答えよ。

- (1) 支点反力  $H_A$ ,  $V_A$ ,  $H_B$  を求めよ。
- (2) すべての部材力  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $L$  を求めよ。
- (3) 荷重  $P$  を漸次増加するとき、最初に座屈を起こす荷重  $P_{CR}$  とその部材を求めよ。

なお、各部材は、ヤング係数  $E$  で、その断面は下図-Bに示すような中空長方形断面とする。

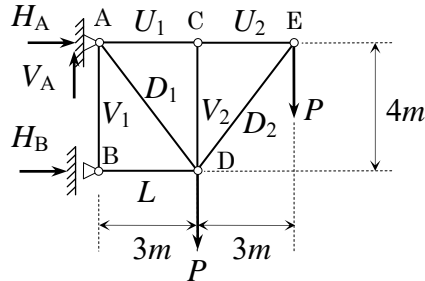


図-A

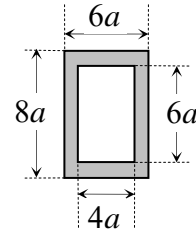


図-B

【解答】

- (1) 水平方向の力の釣合から、 $H_A + H_B = 0$

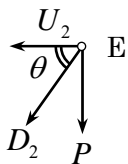
鉛直方向の力の釣合から、 $V_A = P + P = 2P$

A点回りのモーメントの釣り合いから、 $H_B \times 4m = P \times 6m + P \times 3m$

$$\therefore H_B = \frac{9}{4}P \text{ また、 } H_A = -\frac{9}{4}P \quad \text{以上をまとめると、} \quad \boxed{H_A = -\frac{9}{4}P}, \quad \boxed{V_A = 2P}, \quad \boxed{H_B = \frac{9}{4}P}$$

- (2) “節点法”を用いて、各部材力を求めると、次のようになる。

① E点について、 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \theta = \frac{3}{5}$  だから、



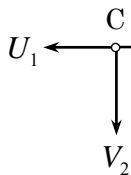
鉛直方向の力の釣合から、 $P + D_2 \sin \theta = 0$

$$\therefore D_2 = -\frac{P}{\sin \theta} = -\frac{5}{4}P$$

水平方向の力の釣合から、 $U_2 + D_2 \cos \theta = 0$

$$\therefore U_2 = -D_2 \cos \theta = \frac{5}{4}P \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{4}P$$

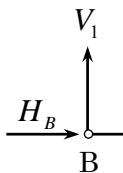
② C点について、



鉛直方向の力の釣合から、 $V_2 = 0$

水平方向の力の釣合から、 $U_1 = U_2 = \frac{3}{4}P$

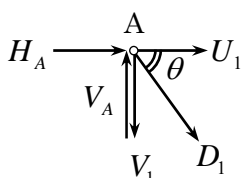
③ B点について、



鉛直方向の力の釣合から、 $V_1 = 0$

水平方向の力の釣合から、 $H_B + L = 0 \quad \therefore L = -H_B = -\frac{9}{4}P$

④ A点について、



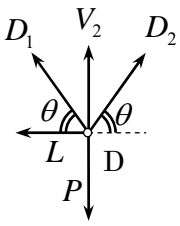
鉛直方向の力の釣合から、 $V_1 + D_1 \sin \theta = V_A$

$$\therefore D_1 = \frac{V_A - V_1}{\sin \theta} = \frac{5}{4} \cdot 2P = \frac{5}{2}P$$

水平方向の力の釣合から、 $U_1 + H_A + D_1 \cos \theta = 0$

$$U_1 + H_A + D_1 \cos \theta = \frac{3}{4}P - \frac{9}{4}P + \frac{5}{2}P \cdot \frac{3}{5} = -\frac{6}{4}P + \frac{3}{2}P = 0 \quad (\text{check O.K.})$$

⑤D点について、



鉛直方向の力の釣合から、 $D_1 \sin \theta + D_2 \sin \theta + V_2 = P$

$$D_1 \sin \theta + D_2 \sin \theta + V_2 = \frac{5}{2}P \cdot \frac{4}{5} - \frac{5}{4}P \cdot \frac{4}{5} = 2P - P = P \quad (\text{check O.K.})$$

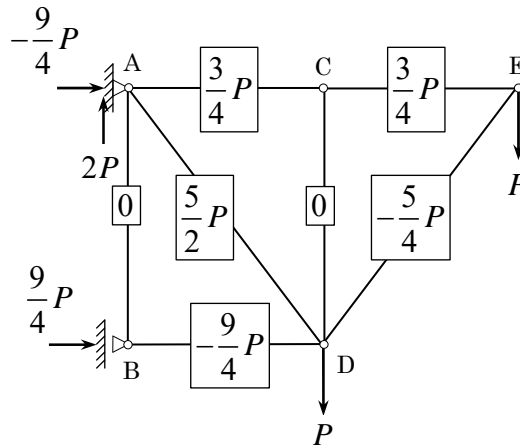
水平方向の力の釣合から、 $L + D_1 \cos \theta = D_2 \cos \theta$

$$L + D_1 \cos \theta = -\frac{9}{4}P + \frac{5}{2}P \cdot \frac{3}{5} = -\frac{9}{4}P + \frac{3}{2}P = \frac{-9+6}{4}P = -\frac{3}{4}P$$

$$D_2 \cos \theta = -\frac{5}{4}P \cdot \frac{3}{5} = -\frac{3}{4}P \quad (\text{check O.K.})$$

以上をまとめると、

$$\boxed{U_1 = U_2 = \frac{3}{4}P}, \quad \boxed{D_1 = \frac{5}{2}P}, \quad \boxed{D_2 = -\frac{5}{4}P}, \quad \boxed{V_1 = V_2 = 0}, \quad \boxed{L = -\frac{9}{4}P}$$



(3) 荷重  $P$  を漸次増加するとき、最初に座屈を起こす荷重  $P_{CR}$  とその部材を求める。

まず、圧縮力が作用する部材は、 $DE(D_2)$ 、 $BD(L)$ の2部材であり、部材  $DE(D_2)$ 、部材  $BD(L)$ の2種類の部材について、座屈を起こす荷重  $P_{CR}$  を比較して小さい方が最初に座屈することになる。

ここで、両端回転支持の場合の最小座屈荷重は、 $\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$  で表される。

ここに、 $\ell$  : 部材長、 $I$  : 弱軸に関する断面2次モーメントである。

2種類の部材の座屈を起こす荷重  $P_{CR}$  は、次のようになる。

①部材  $DE(D_2)$ の座屈を起こす荷重  $P_{CR}^D$  について

$$\frac{5}{4}P_{CR}^D = \frac{\pi^2 EI}{5^2} \quad \therefore P_{CR}^D = \frac{4}{5} \cdot \frac{\pi^2 EI}{5^2} = \frac{4}{125}\pi^2 EI$$

②部材  $BD(L)$ の座屈を起こす荷重  $P_{CR}^L$  について

$$\frac{9}{4}P_{CR}^L = \frac{\pi^2 EI}{3^2} \quad \therefore P_{CR}^L = \frac{4}{9} \cdot \frac{\pi^2 EI}{3^2} = \frac{4}{81}\pi^2 EI$$

ここで、座屈を起こす荷重  $P_{CR}$  を比較すると、次のようになる。

$$P_{CR}^D = \frac{4}{125}\pi^2 EI = \frac{324}{125 \cdot 81}\pi^2 EI < P_{CR}^L = \frac{4}{81}\pi^2 EI = \frac{500}{125 \cdot 81}\pi^2 EI \quad \therefore P_{CR}^D < P_{CR}^L$$

したがって、**最初に座屈を起こす部材は、部材  $DE(D_2)$**  である。

次に、断面2次モーメント  $I$  は、弱軸に関する断面2次モーメントであるから、

$$I = \frac{8a \cdot (6a)^3}{12} - \frac{6a \cdot (4a)^3}{12} = 144a^4 - 32a^4 = 112a^4$$

よって、最初に座屈を起こす荷重  $P_{CR}$  は、次のようになる。

$$P_{CR} = P_{CR}^D = \frac{4}{125}\pi^2 EI = \frac{4}{125}\pi^2 E \cdot 112a^4 = \frac{448}{125}\pi^2 E a^4 \quad \therefore \boxed{P_{CR} = \frac{448}{125}\pi^2 E a^4}$$

【2】 下図に示すような曲げ剛性が  $2EI$  と  $EI$  の「変断面ばり」について、以下の設問に答えよ。

- (1) 図-1 に示すように「変断面片持ばり」の中央に集中荷重  $P$  が作用するとき、  
「弾性荷重法」を用いて、 $B$  点のたわみ角  $\theta_B^1$  とたわみ  $y_B^1$  を求めよ。
- (2) 図-2 に示すように「変断面片持ばり」の先端に集中荷重  $P$  が作用するとき、  
「弾性荷重法」を用いて、 $B$  点のたわみ角  $\theta_B^2$  とたわみ  $y_B^2$  を求めよ。
- (3) (1)と(2)の結果を利用して、図-3 に示すように「一端固定・他端単純支持の変断面ばり」の中央に集中荷重  $P$  が作用するとき、支点反力  $R_A$ 、 $R_B$  と支点曲げモーメント  $M_A$  を求めよ。
- (4) 図-3 のせん断力図 ( $Q$ -図), 曲げモーメント図 ( $M$ -図) を図示せよ。

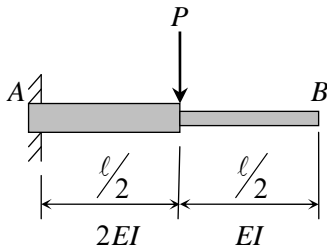


図-1

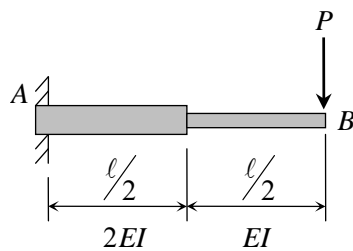


図-2

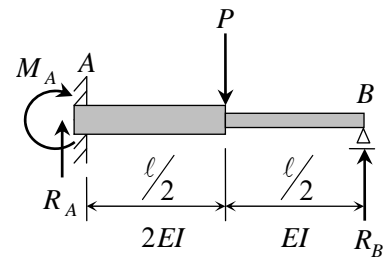
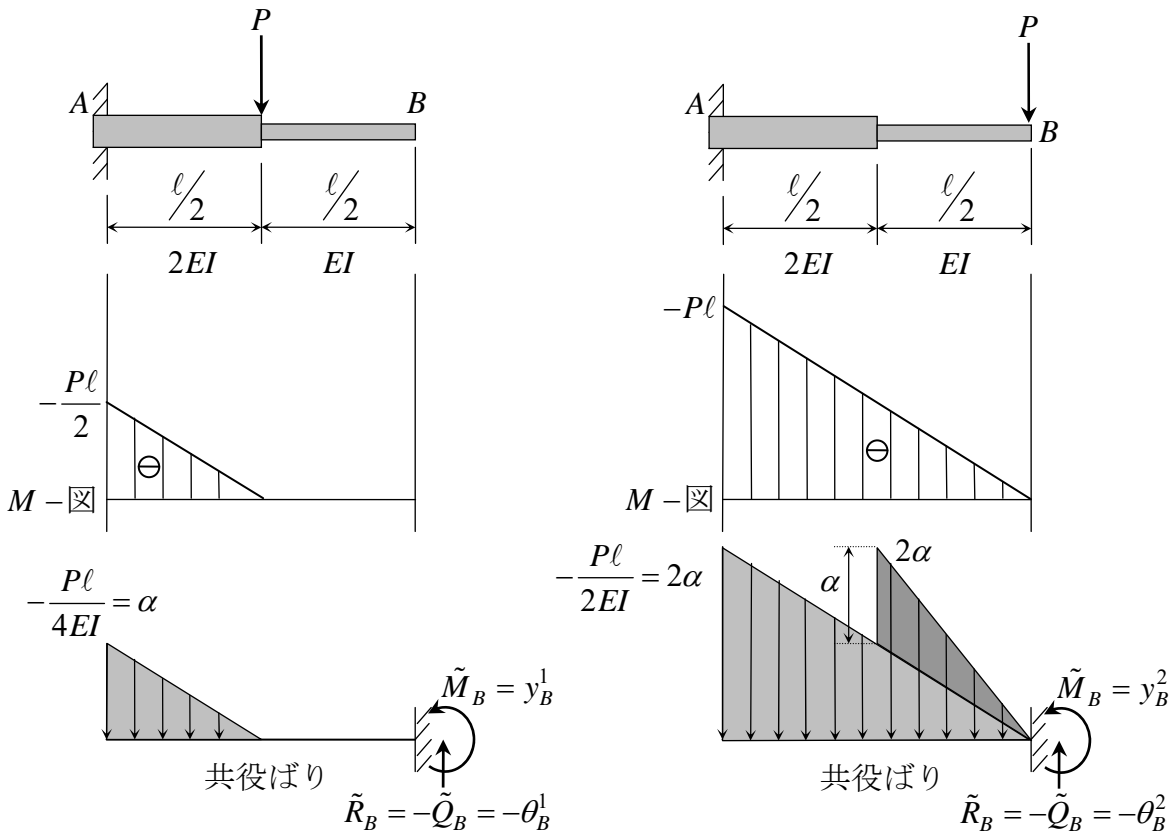


図-3

【解答】

図-1 と図-2 に示すような「変断面片持ばり」の曲げモーメント図 ( $M$ -図) と弾性荷重を載荷した「共役ばり」は、下図のようになる。



剛体の釣合条件から、 $B$  点の支点反力  $\tilde{R}_B$ 、支点曲げモーメント  $\tilde{M}_B$  を求めると、次のようになる。

(1) 鉛直方向の力の釣合から、 $\tilde{R}_B = \frac{1}{2} \times \alpha \times \frac{l}{2} = \frac{1}{4} \alpha l \therefore \theta_B^1 = \tilde{Q}_B = -\tilde{R}_B = \frac{1}{4} \alpha l = \frac{1}{16} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$

$B$  点周りの力のモーメントの釣合から、 $\tilde{M}_B + \frac{1}{4} \alpha l \times \left( \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) = 0$

$$\therefore \tilde{M}_B = -\frac{1}{4}\alpha l \times \frac{5}{6}l = -\frac{5}{24}\alpha l^2 \quad \therefore y_B^1 = \tilde{M}_B = -\frac{5}{24}\alpha l^2 = \frac{5}{96} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

したがって、 $\theta_B^1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$ ,  $y_B^1 = \frac{5}{96} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$

(2) 鉛直方向の力の釣合から、 $\tilde{R}_B = \frac{1}{2} \times 2\alpha \times l + \frac{1}{2} \times \alpha \times \frac{l}{2} = \left(1 + \frac{1}{4}\right)\alpha l = \frac{5}{4}\alpha l$

$$\therefore \theta_B^2 = \tilde{Q}_B = -\tilde{R}_B = -\frac{5}{4}\alpha l = -\frac{5}{16} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$$

B点周りの力のモーメントの釣合から、 $\tilde{M}_B + \alpha l \times \frac{2}{3}l + \frac{1}{4}\alpha l \times \left(\frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = 0$

$$\therefore \tilde{M}_B = -\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12}\right)\alpha l^2 = -\frac{9}{12}\alpha l^2 = -\frac{3}{4}\alpha l^2 \quad \therefore y_B^2 = \tilde{M}_B = -\frac{3}{4}\alpha l^2 = \frac{3}{16} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

したがって、 $\theta_B^2 = \frac{5}{16} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$ ,  $y_B^2 = \frac{3}{16} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$

(3)  $y_B^1 = y_B^2$ となる図-2の荷重を  $P \Rightarrow X$  とすると、

$$\frac{5}{96} \cdot \frac{Pl^3}{EI} = \frac{3}{16} \cdot \frac{Xl^3}{EI} \text{ だから、 } X = \frac{5}{96} \cdot \frac{Pl^3}{EI} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{EI}{l^3} = \frac{5}{18}P \quad \therefore R_B = X = \frac{5}{18}P$$

支点反力  $R_A$  と支点曲げモーメント  $M_A$  は、剛体の釣合条件から、

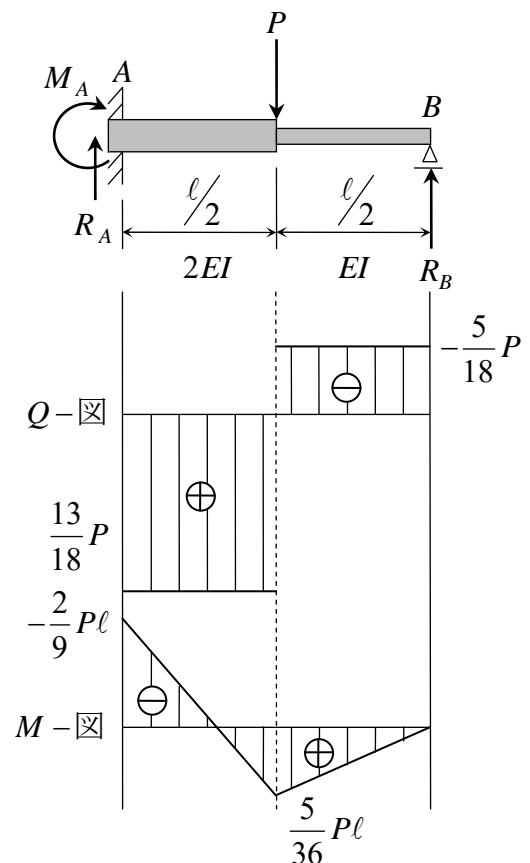
鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R_B = P \quad \therefore R_A = P - R_B = P - \frac{5}{18}P = \frac{13}{18}P$

A点周りの力のモーメントの釣合から、 $M_A + P \times \frac{l}{2} = R_B \times l$

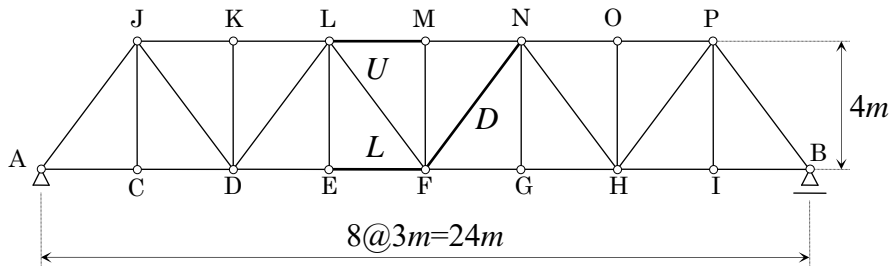
$$\therefore M_A = \frac{5}{18}Pl - \frac{1}{2}Pl = -\frac{4}{18}Pl = -\frac{2}{9}Pl$$

したがって、 $R_A = \frac{13}{18}P$ ,  $R_B = \frac{5}{18}P$ ,  $M_A = -\frac{2}{9}Pl$

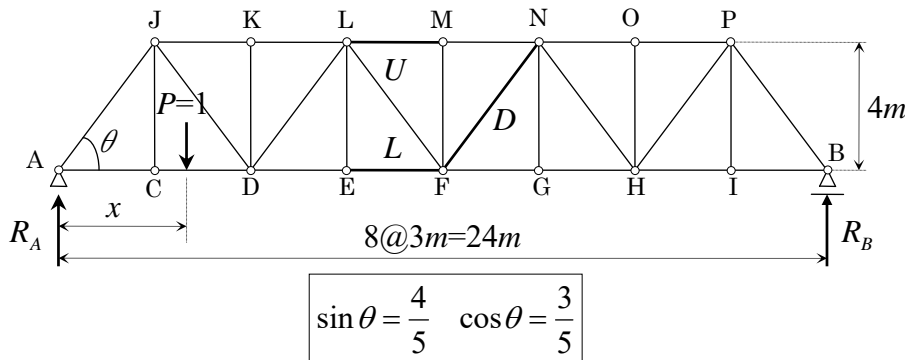
(4) 図-3のせん断力図 (Q-図), 曲げモーメント図 (M-図) を図示すると、右図のようになる。



【問題 IL-T-3】 下図に示すトラスの部材 EF, FN, LM の部材力  $L$ ,  $D$ ,  $U$  について、下弦載荷の場合の影響線を求めよ。



【解答】



まず、上図のように  $A$  点から  $x$  の位置に単位集中荷重  $P$  が作用するときの支点反力の影響線を求める。

$B$  点回りのモーメントの釣合より、 $24R_A = P(24 - x)$

$A$  点回りのモーメントの釣合より、 $24R_B = Px$

$$\therefore R_A = 1 - \frac{x}{24}, \quad R_B = \frac{x}{24}$$

次に、単位集中荷重  $P$  が作用する位置  $x$  によって、以下のように3つに区分して、まず部材力  $U$ ,  $L$  の影響線を求める。

1)  $0 \leq x \leq 9m$  のとき、

$L$  点回りのモーメントの釣合から、

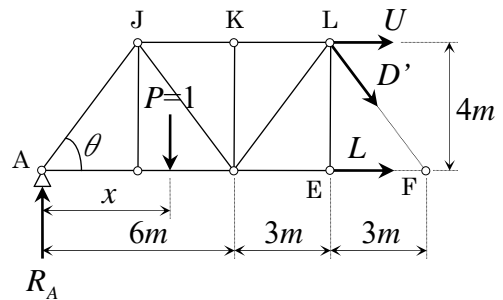
$$4L + P(9 - x) = 9R_A$$

$$\therefore 4L = 9 - \frac{3}{8}x - 9 + x = \frac{5}{8}x \quad \therefore L = \frac{5}{32}x$$

$F$  点回りのモーメントの釣合から、

$$4U + 12R_A = P(12 - x)$$

$$\therefore 4U = 12 - x - 12 + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x \quad \therefore U = -\frac{1}{8}x$$



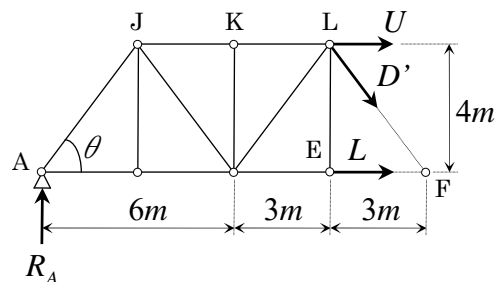
2)  $12m \leq x \leq 24m$  のとき、

$L$  点回りのモーメントの釣合から、

$$4L = 9R_A \quad \therefore L = \frac{9}{4}R_A = \frac{9}{4} \cdot \left(1 - \frac{x}{24}\right)$$

$F$  点回りのモーメントの釣合から、

$$4U + 12R_A = 0 \quad \therefore U = -3R_A = -3 \cdot \left(1 - \frac{x}{24}\right)$$



3)  $9m \leq x \leq 12m$  のとき、

$L$  点回りのモーメントの釣合から、

$$4L = 9R_A$$

$$\therefore L = \frac{9}{4} \cdot \left(1 - \frac{x}{24}\right)$$

$F$  点回りのモーメントの釣合から、

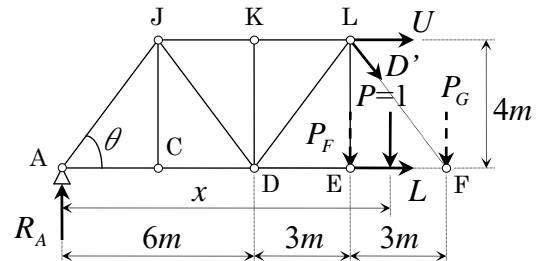
$$4U + 12R_A = \frac{12-x}{3} P \cdot 3$$

$$\therefore 4U = 12 - x - 12 + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x$$

$$\therefore U = -\frac{1}{8}x$$

格点荷重に分解する。

$$P_F = \frac{15-x}{3} P \quad P_G = \frac{x-12}{3} P$$



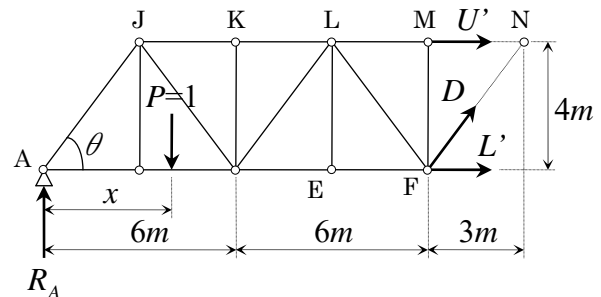
さらに、以下のように3つに区分して部材力  $D$  の影響線を求める。

1)  $0 \leq x \leq 12m$  のとき、

鉛直方向の力の釣合から、

$$D \sin \theta + R_A = P$$

$$\therefore \frac{4}{5} D = \frac{1}{24} x \quad \therefore D = \frac{5}{96} x$$

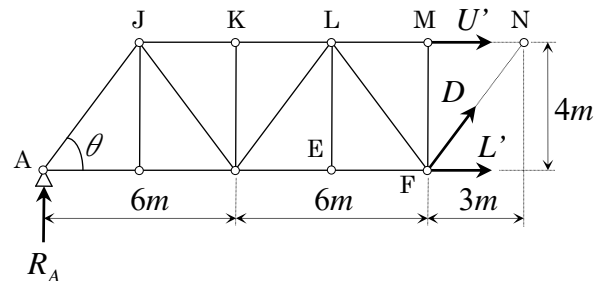


2)  $15m \leq x \leq 24m$  のとき、

鉛直方向の力の釣合から、

$$D \sin \theta + R_A = 0$$

$$\therefore \frac{4}{5} D = -R_A \quad \therefore D = -\frac{5}{4} \cdot \left(1 - \frac{x}{24}\right)$$



3)  $12m \leq x \leq 15m$  のとき、

鉛直方向の力の釣合から、

$$D \sin \theta + R_A = P_F$$

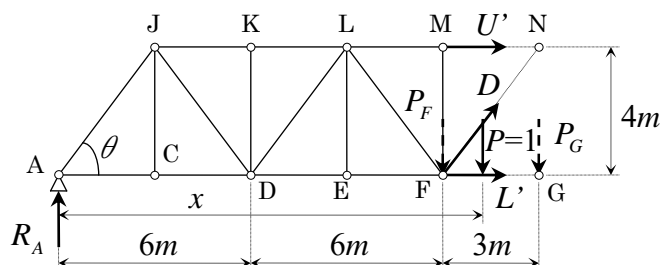
$$\therefore \frac{4}{5} D + \left(1 - \frac{x}{24}\right) = \frac{15-x}{3} P$$

$$\therefore \frac{4}{5} D = 5 - \frac{x}{3} - \left(1 - \frac{x}{24}\right) = 4 - \frac{7}{24} x$$

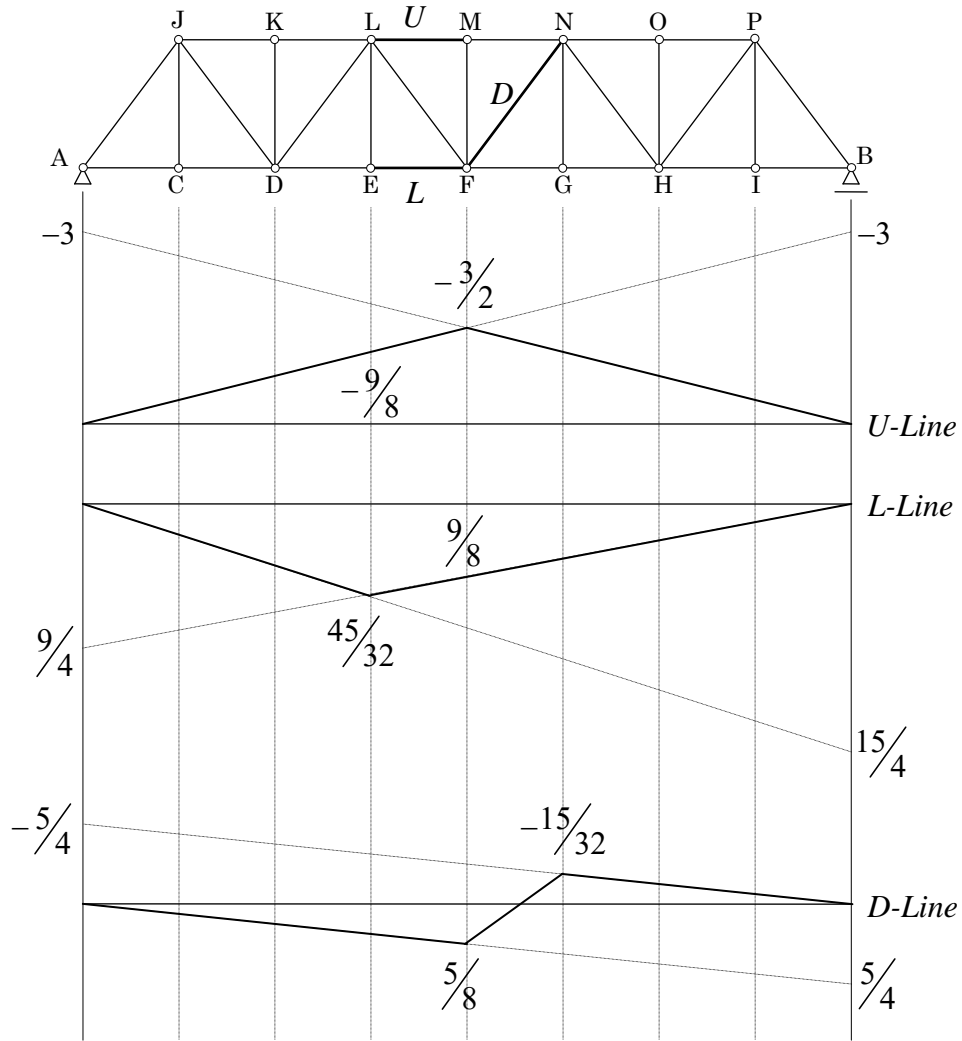
$$\therefore D = 5 - \frac{35}{96} x$$

格点荷重に分解する。

$$P_F = \frac{15-x}{3} P \quad P_G = \frac{x-12}{3} P$$

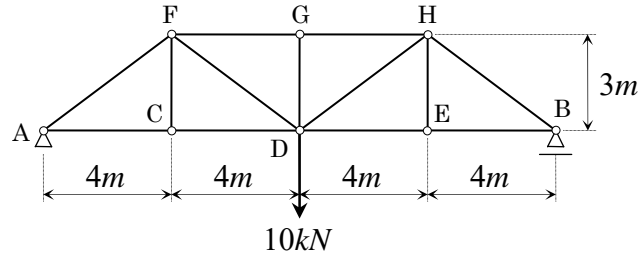


以上より、部材力  $U$ ,  $L$ ,  $D$  の影響線は、下図のようになる。



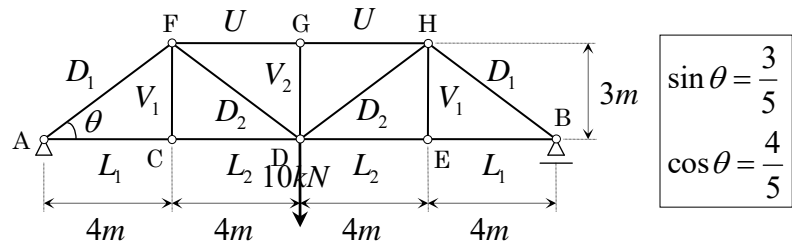


【問題 SE-T-2】 下図に示す静定トラスのひずみエネルギー  $U$  を求めよ。ただし、すべての部材は、ヤング率を  $E$ 、部材断面積を  $A$  とする。



【解答】

構造と荷重の対称性から、支点反力は、 $A$  点、 $B$  点とも  $5kN$  であり、右図のように部材力名を決め、その部材力を「節点法」により求めると、次のようになる。



$A$  点について、

$$\begin{aligned}
 D_1 \sin \theta + 5 &= 0 & \therefore D_1 &= -\frac{5}{\sin \theta} = -5 \cdot \frac{5}{3} = -\frac{25}{3} \text{ (kN)} \\
 D_1 \cos \theta + L_1 &= 0 & \therefore L_1 &= -D_1 \cos \theta = -\left(-\frac{25}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{20}{3} \text{ (kN)}
 \end{aligned}$$

$C$  点について、

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 0 \text{ (kN)} \\
 L_1 &= L_2 & \therefore L_2 &= \frac{20}{3} \text{ (kN)}
 \end{aligned}$$

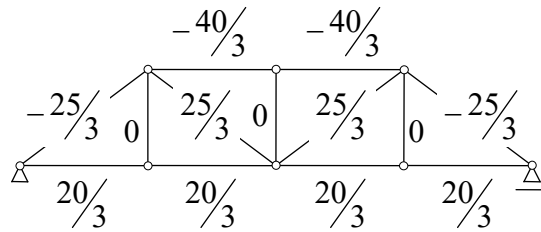
$F$  点について、

$$\begin{aligned}
 (D_1 + D_2) \sin \theta + V_1 &= 0 & \therefore D_2 &= -D_1 = \frac{25}{3} \text{ (kN)} \\
 U + D_2 \cos \theta &= D_1 \cos \theta \\
 \therefore U &= (D_1 - D_2) \cos \theta = \left(-\frac{50}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{40}{3} \text{ (kN)}
 \end{aligned}$$

$G$  点について、

$$V_2 = 0 \text{ (kN)}$$

以上より、部材力は下図のようになる。



次に、軸方向力によるひずみエネルギー  $U_N$  は、

$$U_N = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \frac{N^2}{EA} dx \quad \text{ここに、 } N: \text{軸方向力}$$

$\ell$ : 部材長

で表される。ここで、トラス部材は、軸方向力が部材長にわたり一定であるから、

$$U_N = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{EA} \ell$$

となる。

これを全部材について加算すれば、トラス全体のひずみエネルギー  $U$  が求まり、次のようになる。

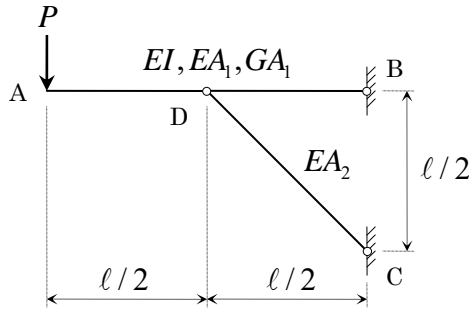
$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{25}{3}\right)^2}{EA} \cdot 5 \times 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{40}{3}\right)^2}{EA} \cdot 4 \times 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{20}{3}\right)^2}{EA} \cdot 4 \times 4$$

$$= \frac{1}{9EA} (25^2 \times 10 + 40^2 \times 4 + 20^2 \times 8) = \frac{6250 + 6400 + 3200}{9EA} = \frac{15850}{9EA}$$

$$\therefore U = \frac{15850}{9EA}$$

【問題 SE-S-1】 下図に示す構造物のひずみエネルギー  $U$  を求めよ。

ただし、各部材のヤング係数、せん断弾性係数は、 $E$ 、 $G$  であり、部材  $AB$ 、部材  $CD$  の断面積は、それぞれ  $A_1$ 、 $A_2$  である。また、部材  $AB$  の断面 2 次モーメントは、 $I$  である。



【解答】

$B$ 、 $C$  点の支点反力を  $H_B$ 、 $V_B$ 、 $R_C$  とすると、

水平方向の力の釣合から、

$$H_B + R_C \cos 45^\circ = 0$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$V_B + R_C \sin 45^\circ = P$$

$B$  点回りのモーメントの釣合から、

$$P \cdot l = R_C \cos 45^\circ \times \frac{l}{2} \quad \therefore R_C = 2\sqrt{2}P$$

よって、 $H_B = -2P$ 、 $V_B = -P$

このとき、断面力図は、右図のようになる。

各部材に作用する各断面力によるひずみエネルギーを考えると、次のようになる。

$$\begin{aligned} U_{AB}^M &= 2 \times \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}l} \left\{ \frac{(-Px)^2}{EI} \right\} dx = \frac{P^2}{EI} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}l} x^2 dx \\ &= \frac{P^2}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^3}{8} = \frac{P^2 \ell^3}{24EI} \end{aligned}$$

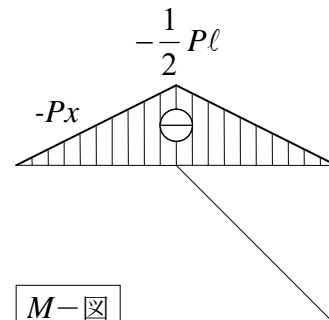
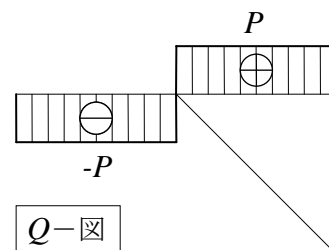
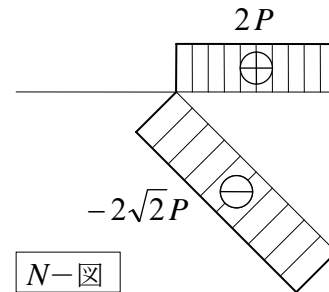
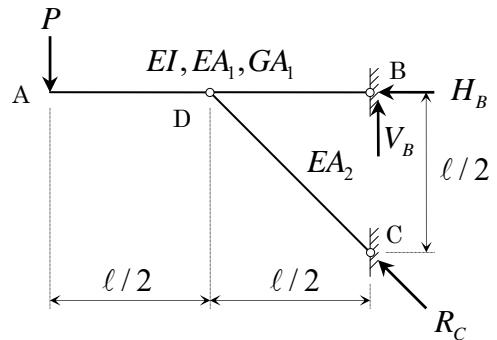
$$U_{AB}^Q = 2 \times \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}l} \left\{ \kappa \frac{(-P)^2}{GA_1} \right\} dx = \kappa \frac{P^2}{GA_1} \cdot \frac{l}{2} = \kappa \frac{P^2 \ell}{2GA_1}$$

$$U_{AB}^N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EA_1} \cdot (2P)^2 \cdot \frac{1}{2} l = \frac{P^2 \ell}{EA_1}$$

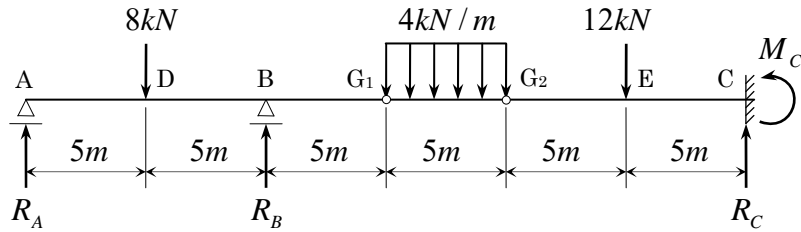
$$U_{CD}^N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EA_2} \cdot (-2\sqrt{2}P)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l = \frac{2\sqrt{2}P^2 \ell}{EA_2}$$

したがって、全ひずみエネルギー  $U$  は、各ひずみエネルギーの和で表されるから、次のようになる。

$$\begin{aligned} U &= U_{AB}^M + U_{AB}^Q + U_{AB}^N + U_{CD}^N \\ &= \frac{P^2 \ell^3}{24EI} + \kappa \frac{P^2 \ell}{2GA_1} + \frac{P^2 \ell}{EA_1} + \frac{2\sqrt{2}P^2 \ell}{EA_2} \end{aligned}$$

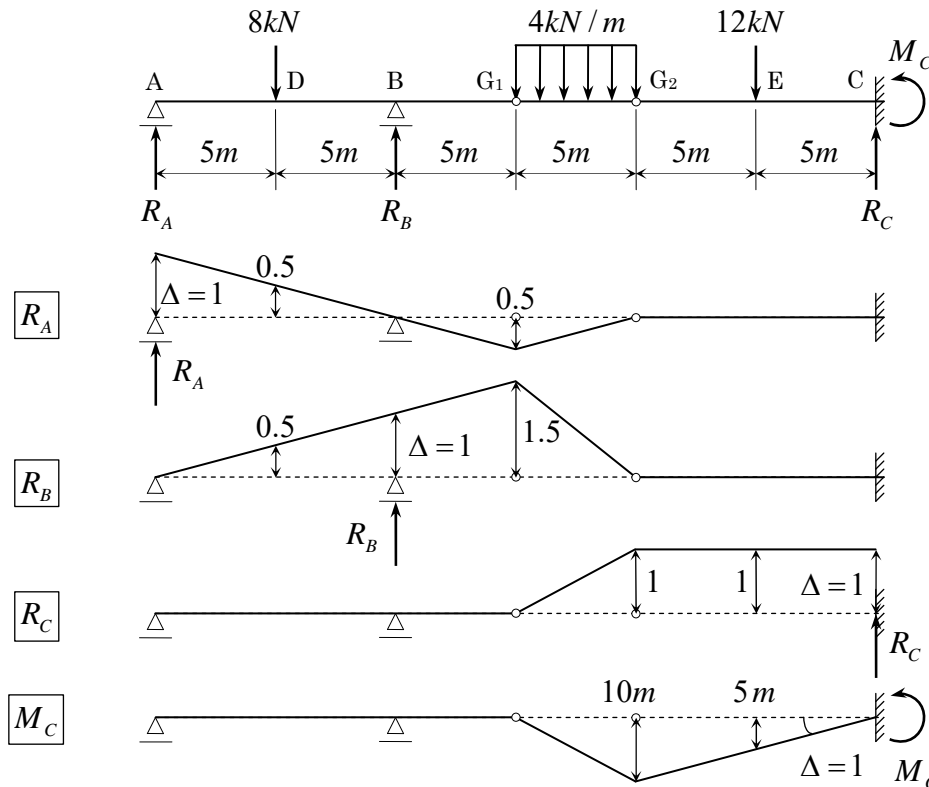


【問題 UD-G-6】 下図に示すゲルバーばりの支点反力  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  と C 点の支点曲げモーメント  $M_C$  を “仮想変位の原理” を用いて求めよ。



【解答】

支点反力  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  と C 点の支点曲げモーメント  $M_C$  のそれぞれについて、題意のゲルバーばりの支持条件や幾何学的条件を満足する “単位” の仮想変位  $\Delta = 1$  を図示すると下図のようになる。



荷重の方向と逆方向の仮想変位は “負” であることに注意して、“仮想変位の原理” を適用すると次のようになる。

支点反力  $R_A$  について  $R_A \cdot 1 + 8kN \cdot (-0.5) + 4kN/m \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 5m = 0$

$\therefore R_A = 4 - 5 = -1kN$   $\therefore R_A = -1kN$

支点反力  $R_B$  について  $R_B \cdot 1 + 8kN \cdot (-0.5) + 4kN/m \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1.5) \cdot 5m = 0$

$\therefore R_B = 4 + 15 = 19kN$   $\therefore R_B = 19kN$

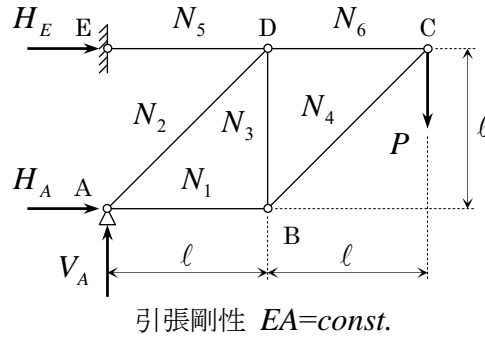
支点反力  $R_C$  について  $R_C \cdot 1 + 12kN \cdot (-1) + 4kN/m \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 5m = 0$

$\therefore R_C = 12 + 10 = 22kN$   $\therefore R_C = 22kN$

C 点の支点曲げモーメント  $M_C$  について  $M_C \cdot 1 + 12kN \cdot 5m + 4kN/m \cdot \frac{1}{2} \cdot 10m \cdot 5m = 0$

$\therefore M_C = -60 - 100 = -160kN \cdot m$   $\therefore M_C = -160kN \cdot m$

【問題 UL-T-4】 下図に示す静定トラスの C 点の鉛直変位  $v_C$  を “単位荷重法” を用いて求めよ。



【解答】

まず、支点反力  $V_A$ ,  $H_A$ ,  $H_E$  を求める。

鉛直方向の力の釣合から、  $V_A = P$

水平方向の力の釣合から、  $H_A + H_E = 0$

A 点回りのモーメントの釣合から、  $H_E \cdot l + P \cdot 2l = 0 \quad \therefore H_E = -2P$  よって、  $H_A = 2P$

次に、“節点法”によりトラスの部材力  $N_1 \sim N_6$  を求める。

C 点について、

鉛直方向の力の釣合から、  $N_4 \sin 45^\circ + P = 0 \quad \therefore N_4 = -\frac{P}{\sin 45^\circ} = -\sqrt{2}P$

水平方向の力の釣合から、  $N_6 + N_4 \cos 45^\circ = 0 \quad \therefore N_6 = -N_4 \cos 45^\circ = P$

B 点について、

鉛直方向の力の釣合から、  $N_4 \sin 45^\circ + N_3 = 0 \quad \therefore N_3 = -N_4 \sin 45^\circ = P$

水平方向の力の釣合から、  $N_1 = N_4 \cos 45^\circ \quad \therefore N_1 = -P$

D 点について、

鉛直方向の力の釣合から、  $N_2 \sin 45^\circ + N_3 = 0 \quad \therefore N_2 = -\frac{N_3}{\sin 45^\circ} = -\sqrt{2}P$

水平方向の力の釣合から、  $N_5 + N_2 \cos 45^\circ = N_6 \quad \therefore N_5 = N_6 - N_2 \cos 45^\circ = P + P = 2P$

E 点について、(check)

水平方向の力の釣合から、  $H_E + N_5 = -2P + 2P = 0$

A 点について、(check)

鉛直方向の力の釣合から、  $V_A + N_2 \sin 45^\circ = P - P = 0$

水平方向の力の釣合から、  $H_A + N_1 + N_2 \cos 45^\circ = 2P - P - P = 0$

したがって、静定トラスの C 点の鉛直変位  $v_C$  を “単位荷重法” を用いて求めると、次のようになる。

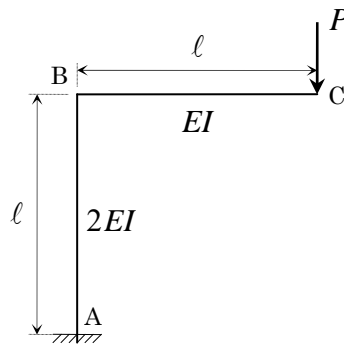
$$1 \times v_C = \sum_{j=1}^6 \bar{N}_j \frac{N_j}{EA} \ell_j$$

$$= (-1) \cdot \frac{-P}{EA} \cdot l + (-\sqrt{2}) \cdot \frac{-\sqrt{2}P}{EA} \cdot \sqrt{2}l + (1) \cdot \frac{P}{EA} \cdot l + (-\sqrt{2}) \cdot \frac{-\sqrt{2}P}{EA} \cdot \sqrt{2}l + (2) \cdot \frac{2P}{EA} \cdot l + (1) \cdot \frac{P}{EA} \cdot l$$

$$= \frac{P\ell}{EA} \cdot (1 + 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} + 4 + 1) = (7 + 4\sqrt{2}) \frac{P\ell}{EA}$$

$$\therefore v_C = (7 + 4\sqrt{2}) \frac{P\ell}{EA}$$

【問題 UL-R-1】下図に示す静定ラーメンの  $C$  点の鉛直たわみ  $v_C$  とたわみ角  $\theta_C$  を求めよ。ただし、 $AB$ 、 $BC$  間の曲げ剛性は、それぞれ  $2EI$ 、 $EI$  で一定とし、軸方向力・せん断力の影響は無視する。

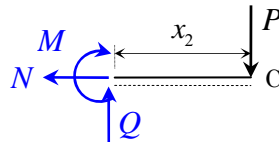
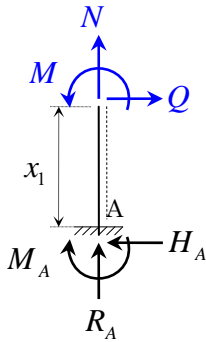


【解答】

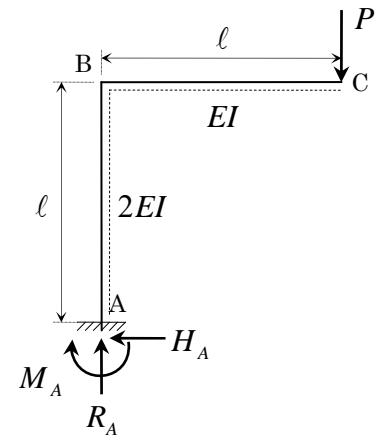
右図において、支点反力を求めると、 $R_A = P$ 、 $H_A = 0$ 、 $M_A = -P \cdot l$   
次に、下図のように、 $A \sim B$  間、 $B \sim C$  間に分けて断面力を求める。

$A \sim B$  間について、

$B \sim C$  間について、



$$\begin{aligned} N &= 0 \\ Q &= P \\ M &= -P \cdot x_2 \end{aligned}$$

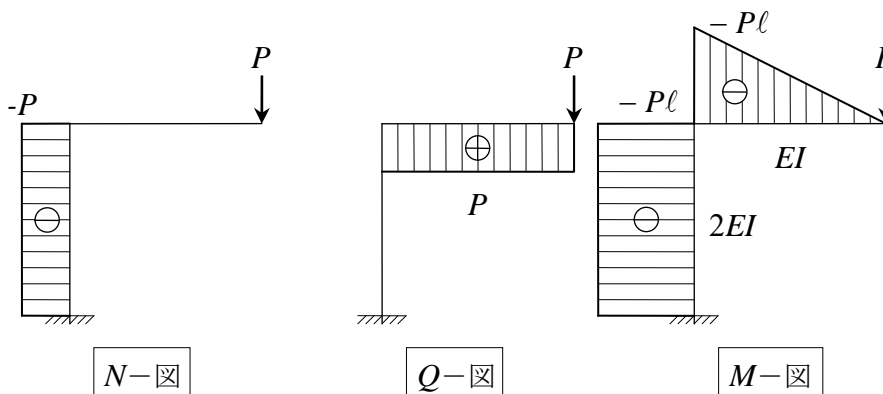


$$N = -R_A = -P$$

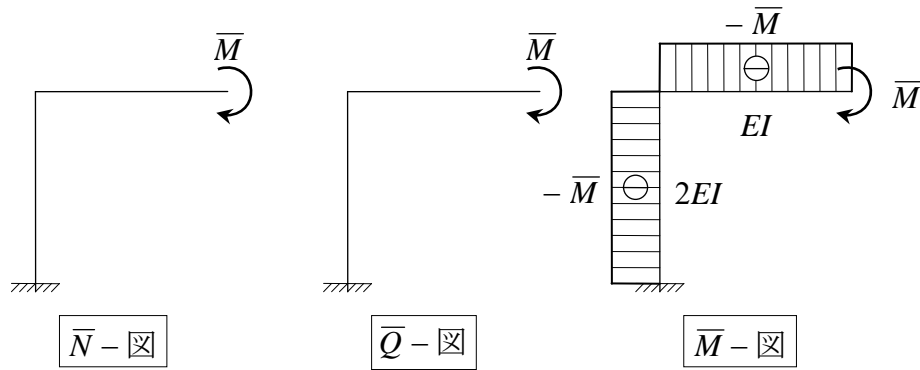
$$Q = H_A = 0$$

$$M = H_A \cdot x_1 + M_A = -P \cdot l$$

これらを図示すると、下図のようになる。



C 点に単位の集中モーメント  $\bar{M} = 1$  が作用する場合は、同様にして、  
 支点反力を求めると、 $\bar{R}_A = 0$ ,  $\bar{H}_A = 0$ ,  $\bar{M}_A = -\bar{M}$  であり、  
 これらを図示すると、下図のようになる。



したがって、C 点の鉛直たわみ  $v_c$  とたわみ角  $\theta_c$  は、次のようになる。

$$v_c = \int \frac{MM\bar{}}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^\ell (-P\ell) \cdot (-\ell) \cdot dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_0^\ell (-Px) \cdot (-x) \cdot dx = \frac{P\ell^3}{2EI} + \frac{P}{EI} \cdot \frac{\ell^3}{3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore v_c = \frac{5}{6} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\theta_c = \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^\ell (-P\ell) \cdot (-1) \cdot dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_0^\ell (-Px) \cdot (-1) \cdot dx = \frac{P\ell^2}{2EI} + \frac{P}{EI} \cdot \frac{\ell^2}{2} = \frac{P\ell^2}{EI}$$

$$\therefore \theta_c = \frac{P\ell^2}{EI}$$

AB, BC 間の引張剛性をそれぞれ  $2EA$ ,  $EA$ 、せん断剛性をそれぞれ  $2GA$ ,  $GA$  とし、軸方向力・せん断力の影響を考慮すると、C 点の鉛直たわみ  $v_c$  は、次のようになる。

$$v_c = \int \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \kappa \int \frac{Q\bar{Q}}{GA} dx + \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{2EA} \cdot \int_0^\ell (-P) \cdot (-1) \cdot dx + \frac{\kappa}{GA} \cdot \int_0^\ell P \cdot 1 \cdot dx + \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^\ell (-P\ell) \cdot (-\ell) \cdot dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_0^\ell (-Px) \cdot (-x) \cdot dx$$

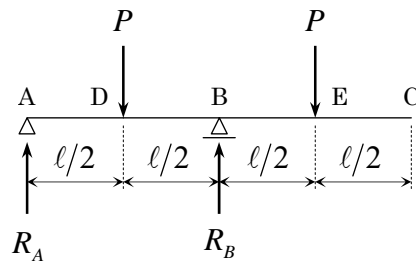
$$= \frac{P\ell}{2EA} + \kappa \frac{P\ell}{GA} + \frac{P\ell^3}{2EI} + \frac{P}{EI} \cdot \frac{\ell^3}{3} = \frac{P\ell}{2EA} + \kappa \frac{P\ell}{GA} + \frac{5}{6} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore v_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{P\ell}{EA} + \kappa \frac{P\ell}{GA} + \frac{5}{6} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

また、C 点のたわみ角  $\theta_c$  については、軸方向力・せん断力の影響はない。

$$\theta_c = \int \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \kappa \int \frac{Q\bar{Q}}{GA} dx + \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

【問題 UL-OB-1】 下図に示す曲げ剛性  $EI$  が一定な張出ばりの  $C$  点の鉛直変位  $v_C$  を “単位荷重法” を用いて求めよ。



曲げ剛性  $EI=const.$

【解答】

まず、実荷重に対する支点反力  $R_A, R_B$  を求める。

鉛直方向の力の釣合から、  $R_A + R_B = 2P$

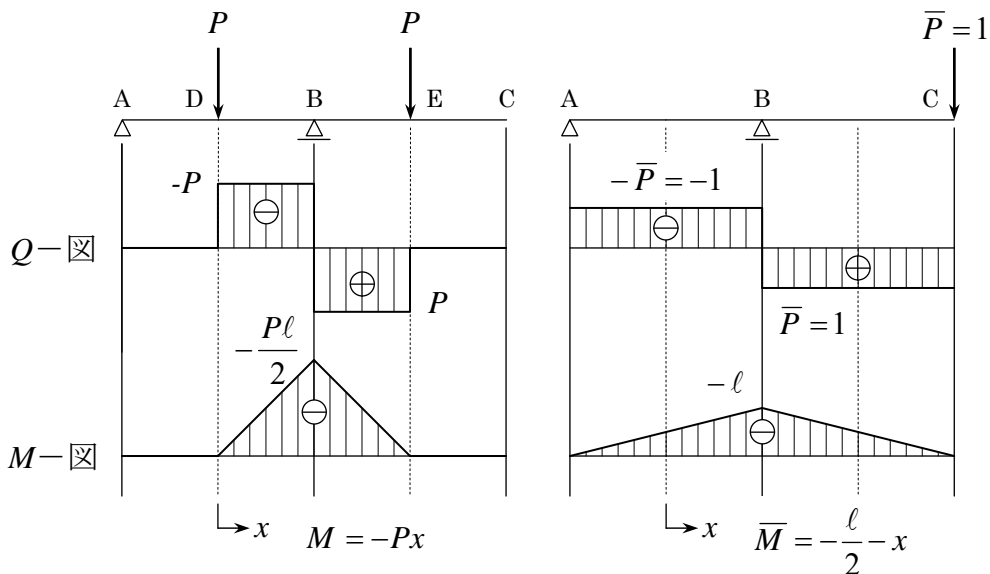
A 点回りのモーメントの釣合から、  $R_B \cdot l = P \cdot \frac{1}{2}l + P \cdot \frac{3}{2}l \quad \therefore R_B = 2P$  よって、  $R_A = 0$

次に、 $C$  点に仮想荷重  $\bar{P}=1$  が載荷された場合の支点反力  $\bar{R}_A, \bar{R}_B$  を求める。

鉛直方向の力の釣合から、  $\bar{R}_A + \bar{R}_B = \bar{P} = 1$

A 点回りのモーメントの釣合から、  $\bar{R}_B \cdot l = \bar{P} \cdot 2l \quad \therefore \bar{R}_B = 2\bar{P} = 2$  よって、  $\bar{R}_A = -\bar{P} = -1$

以上、2通りの場合の断面力図を図示すると、下図のようになる。



したがって、 $C$  点の鉛直変位  $v_C$  を “単位荷重法” を用いて求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 1 \times v_C &= \int_0^{2l} \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx = 2 \times \int_0^{\frac{l}{2}} \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} \left( -\frac{l}{2} - x \right) \cdot (-Px) dx \\
 &= \frac{2P}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} \left( \frac{l}{2} + x \right) \cdot x dx = \frac{2P}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} \left( \frac{l}{2}x + x^2 \right) dx = \frac{2P}{EI} \cdot \left[ \frac{l}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{l}{2}} \quad \therefore \boxed{v_C = \frac{5}{24} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}} \\
 &= \frac{2P}{EI} \cdot \left( \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell^2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^3}{8} \right) = \frac{2P}{EI} \cdot \left( \frac{\ell^3}{16} + \frac{\ell^3}{24} \right) = \frac{2P\ell^3}{EI} \cdot \frac{3+2}{48} = \frac{5}{24} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}
 \end{aligned}$$



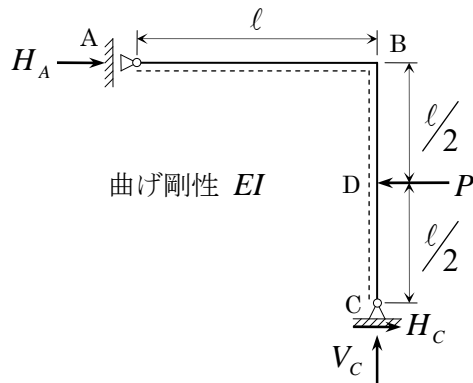
《別解》

“積分公式”を用いると、

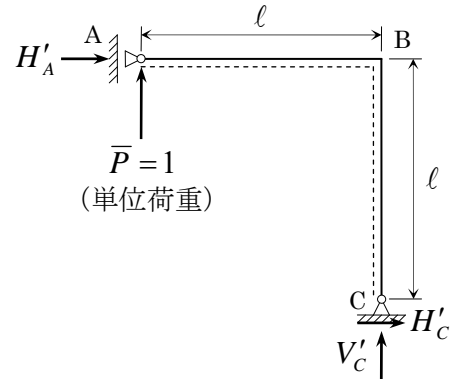
$$\begin{aligned} 1 \times v_C &= \int_0^{2\ell} \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx = 2 \times \int_0^{\frac{\ell}{2}} \bar{M} \cdot \frac{M}{EI} dx = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{\ell}{2}} M \cdot \bar{M} dx \\ &= \frac{2}{EI} \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \left\{ \left( -\frac{\ell}{2} \right) + 2 \cdot (-\ell) \right\} \cdot \left\{ -\frac{P\ell}{2} \right\} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{\ell}{12} \cdot \frac{5}{2} \ell \cdot \frac{P\ell}{2} = \frac{5}{24} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} \end{aligned} \quad \therefore \boxed{v_C = \frac{5}{24} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}}$$

【問題 UL-R-3】 下図-A に示す静定ラーメンについて、A 点の鉛直上方への変位  $\Delta_A$  を “単位荷重法” を用いて以下のような手順で求めよ。ただし、曲げ剛性  $EI$  は一定とし、軸方向力・せん断力の影響は無視する。また、曲げモーメントは、点線側が “引張” となる曲げモーメントを “正” とする。

- (1) 図-A に示す支点反力  $H_A$ ,  $V_C$ ,  $H_C$  を求めよ。
- (2) 図-A の曲げモーメント図 ( $M$ -図) を図示せよ。
- (3) 下図-B に示すように、A 点に単位荷重  $\bar{P}=1$  が作用した場合の支点反力  $H'_A$ ,  $V'_C$ ,  $H'_C$  を求めよ。
- (4) 図-B の曲げモーメント図 ( $\bar{M}$ -図) を図示せよ。
- (5) “単位荷重法”  $\left(1 \times \Delta_A = \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx\right)$  を適用して、A 点の鉛直上方への変位  $\Delta_A$  を求めよ。



【図-A】



【図-B】

【解答】

問題の図において、左図【図-A】を “与系”、右図【図-B】を “仮想系” として考える。まず、両系について支点反力を求め、曲げモーメント図を得る。

“与系” について、

水平方向の力の釣合から、
$$H_A + H_C = P$$

鉛直方向の力の釣合から、
$$V_C = 0$$

C 点回りのモーメントの釣合から、
$$P \cdot \frac{l}{2} = H_A \cdot l$$

以上より、
$$\boxed{H_A = \frac{P}{2}}, \quad \boxed{H_C = \frac{P}{2}}, \quad \boxed{V_C = 0}$$

“仮想系” について、

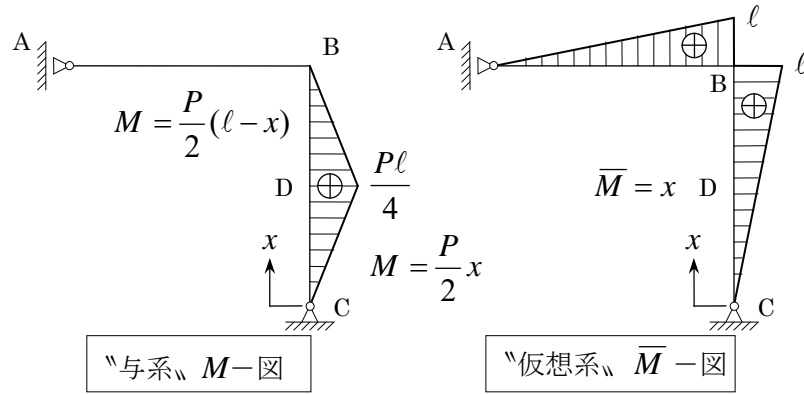
水平方向の力の釣合から、
$$H'_A + H'_C = 0$$

鉛直方向の力の釣合から、
$$V'_C + \bar{P} = 0$$

C 点回りのモーメントの釣合から、
$$\bar{P} \cdot l + H'_A \cdot l = 0$$

以上より、
$$\boxed{H'_A = -\bar{P} = -1}, \quad \boxed{H'_C = \bar{P} = 1}, \quad \boxed{V'_C = -\bar{P} = -1}$$

これらより、曲げモーメント図を図示すると、下図のようになる。



A 点の鉛直上方への変位  $\Delta_A$  を「単位荷重法」を用いて求めると、次のようになる。

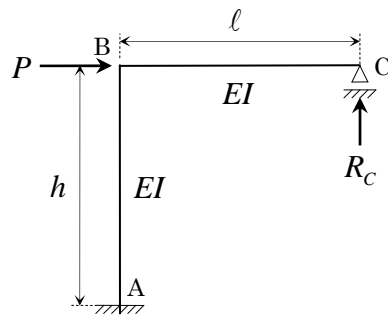
$$\begin{aligned}
 \Delta_A \times 1 &= \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left( \frac{1}{2} Px \right) \cdot x dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \left\{ \frac{1}{2} P(\ell - x) \right\} \cdot x dx \\
 &= \frac{P}{2EI} \int_0^{\frac{\ell}{2}} x^2 dx + \frac{P}{2EI} \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} (\ell x - x^2) dx = \frac{P}{2EI} \left\{ \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\ell}{2}} + \left[ \frac{\ell}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \right\} \\
 &= \frac{P}{2EI} \left\{ \frac{\ell^3}{24} + \frac{\ell^3}{2} - \frac{\ell^3}{3} - \frac{\ell^3}{8} + \frac{\ell^3}{24} \right\} = \frac{P\ell^3}{2EI} \cdot \frac{1+12-8-3+1}{24} = \frac{P\ell^3}{2EI} \cdot \frac{3}{24} = \frac{1}{16} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} \\
 \therefore \Delta_A &= \frac{1}{16} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}
 \end{aligned}$$

《別解》

「積分公式」を用いると、

$$\begin{aligned}
 \Delta_A \times 1 &= \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \frac{\ell}{2} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \left( \ell + 2 \cdot \frac{\ell}{2} \right) \right\} = \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{48} + \frac{2}{48} \right) \cdot P\ell^3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} \\
 \therefore \Delta_A &= \frac{1}{16} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}
 \end{aligned}$$

【問題 LW-R-1】 下図に示す 1 次不静定ラーメンの支点 C の支点反力  $R_C$  を “最小仕事の原理、を用いて求めよ。ただし、各部材の曲げ剛性は、 $EI$  で一定とし、せん断力の影響は無視する。



【解答】

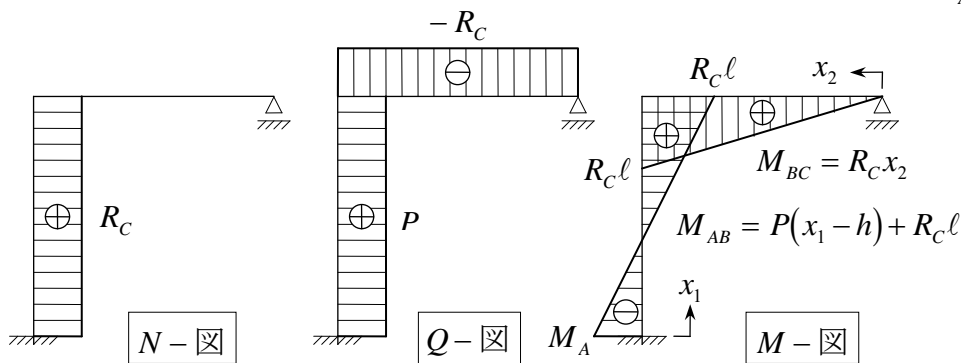
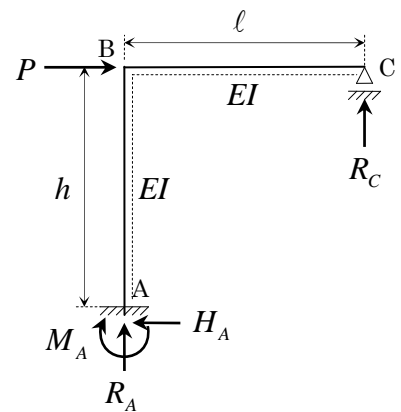
右図に示すように、支点 C の支点反力  $R_C$  を不静定力として、支点反力  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $M_A$  を求めると、次のようになる。

$$R_A = -R_C$$

$$H_A = P$$

$$M_A = R_C \cdot \ell - P \cdot h$$

これに基づき断面力図を図示すると、下図のようになる。



これらより、全ての断面力による全ひずみエネルギー  $U$  は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \cdot \int \kappa \frac{Q^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{M^2}{EI} dx \\
 &= \frac{1}{2EA} \cdot \int_0^h R_C^2 dx_1 + \frac{\kappa}{2GA} \cdot \left[ \int_0^h P^2 dx_1 + \int_0^\ell R_C^2 dx_2 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2EI} \cdot \left[ \int_0^h \{P \cdot (x_1 - h) + R_C \cdot \ell\}^2 dx_1 + \int_0^\ell (R_C \cdot x_2)^2 dx_2 \right]
 \end{aligned}$$

これを、 $R_C$  で偏微分すると、「最小仕事の原理」より、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial R_C} &= \frac{1}{EA} \cdot \int_0^h R_C dx_1 + \frac{\kappa}{GA} \cdot \int_0^\ell R_C dx_2 + \frac{1}{EI} \cdot \left[ \int_0^h \{P \cdot (x_1 - h) + R_C \cdot \ell\} \cdot \ell \cdot dx_1 + \int_0^\ell R_C \cdot x_2^2 dx_2 \right] \\
 &= \frac{R_C h}{EA} + \kappa \frac{R_C \ell}{GA} + \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \ell \cdot \left[ P \frac{x_1^2}{2} - Phx_1 + R_C \ell x_1 \right]_0^h + R_C \frac{\ell^3}{3} \right\} \\
 &= \frac{R_C h}{EA} + \kappa \frac{R_C \ell}{GA} + \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \ell \cdot \left( P \frac{h^2}{2} - Ph^2 + R_C \ell h \right) + R_C \frac{\ell^3}{3} \right\} \\
 &= \frac{R_C h}{EA} + \kappa \frac{R_C \ell}{GA} + \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \left( h\ell^2 + \frac{\ell^3}{3} \right) \cdot R_C - \frac{1}{2} Ph^2 \ell \right\} \\
 &= \frac{R_C h}{EA} + \kappa \frac{R_C \ell}{GA} + \frac{\ell}{EI} \cdot \left\{ \left( h + \frac{\ell}{3} \right) \cdot \ell \cdot R_C - \frac{1}{2} Ph^2 \right\} \\
 &= \left\{ \frac{h}{EA} + \kappa \frac{\ell}{GA} + \frac{\ell^2}{EI} \cdot \left( h + \frac{\ell}{3} \right) \right\} \cdot R_C - \frac{Ph^2 \ell}{2EI} = 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore R_C = \frac{\frac{Ph^2 \ell}{2EI}}{\frac{h}{EA} + \kappa \frac{\ell}{GA} + \frac{\ell^2}{EI} \cdot \left( h + \frac{\ell}{3} \right)}$$

ここで、軸方向力とせん断力を無視して、曲げモーメントのみを考慮すると、

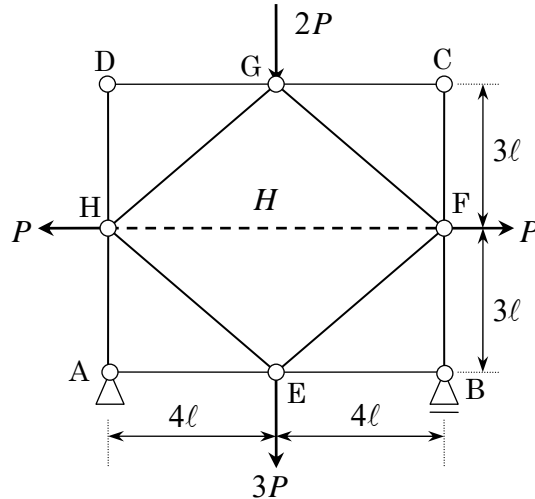
$$R_C = \frac{\frac{Ph^2}{2}}{\left( h + \frac{\ell}{3} \right) \cdot \ell} = \frac{3h^2}{2\ell \cdot (3h + \ell)} P \quad \text{さらに、} \ell = h \text{ とすると、} R_C = \frac{3}{8} P \text{ となる。}$$

【問題 CP-4】 下図に示す静定トラスについて、次の設問に答えよ。

(1) 破線で表される部材の部材力  $H$  を “仮想変位の原理” を用いて求めよ。

(2) E 点の鉛直方向の変位  $v_E$  を “単位荷重法” を用いて求めよ。

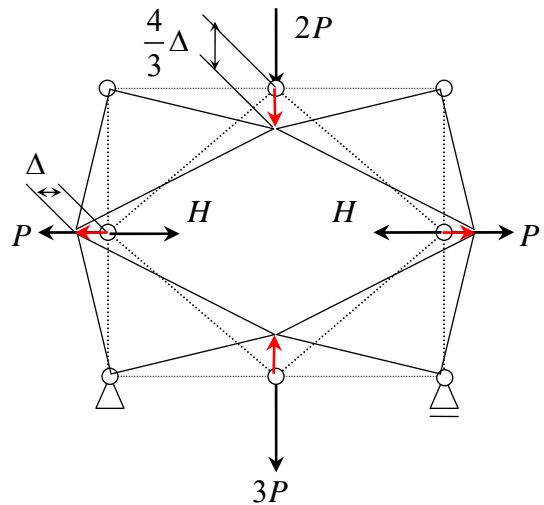
なお、全ての部材の引張剛性は、 $EA$  とする。



【解答】

(1) 右図に示すように、支持条件や幾何学的条件を満足する水平方向の仮想変位を  $\Delta$  とすると、鉛直方向の仮想変位は  $\frac{4}{3}\Delta$  となること、及び、力の方向と逆方向の仮想変位は “負” となることに注意して、“仮想変位の原理” を適用すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & P \cdot \Delta + P \cdot \Delta + H \cdot (-\Delta) + H \cdot (-\Delta) \\
 & + 2P \cdot \frac{4}{3}\Delta + 3P \cdot \left(-\frac{4}{3}\Delta\right) = 0 \\
 \therefore & P + P - H - H + \frac{8}{3}P - 4P = 0 \\
 \therefore & -2H = -\frac{2}{3}P \qquad \therefore \boxed{H = \frac{1}{3}P}
 \end{aligned}$$



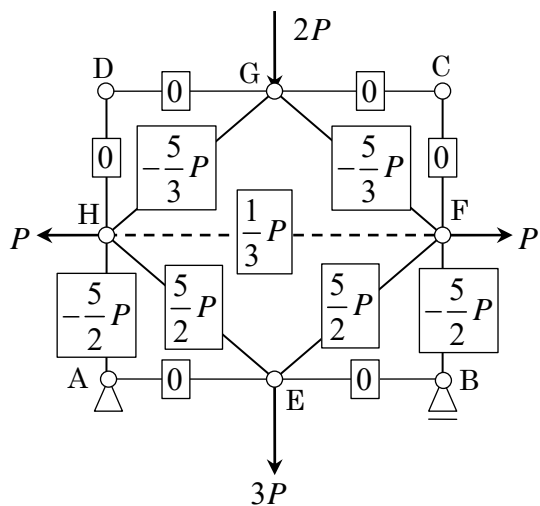
(2) “節点法” を用いて、**実系**の全ての部材力を求めると下左図のようになる。

次に、E 点に単位荷重  $\bar{P}=1$  のみを鉛直方向に載荷させた**仮想系**を考え、これの全ての部材力を求める。

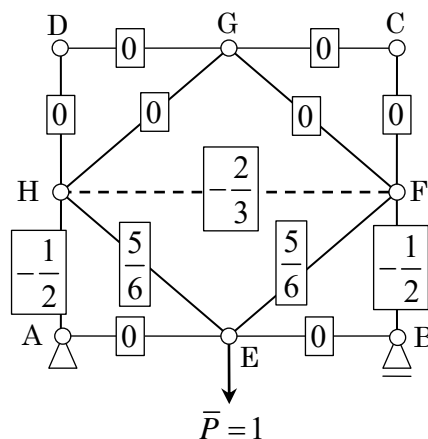
まず、(1) と同様な方法で、部材 HF の部材力  $\bar{H}$  を求めると、

$$\begin{aligned}
 \bar{H} \cdot (-\Delta) + \bar{H} \cdot (-\Delta) + \bar{P} \cdot \left(-\frac{4}{3}\Delta\right) &= 0 \quad \therefore \bar{H} + \bar{H} + \frac{4}{3}\bar{P} = 0 \\
 \therefore 2\bar{H} &= -\frac{4}{3}\bar{P} \quad \therefore \bar{H} = -\frac{2}{3}\bar{P} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

さらに、“節点法” を用いて、**仮想系**の全ての部材力を求めると下右図のようになる。



【実系】



【仮想系】

したがって、“単位荷重法”を用いて、E点の鉛直方向の変位 $v_E$ を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 1 \times v_E &= \sum \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} \ell_{ij} \\
 &= \frac{1}{EA} \left\{ \left( \frac{1}{3} P \right) \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) \times 2 \times 4\ell + 2 \times \left( -\frac{5}{2} P \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \times 3\ell + 2 \times \left( \frac{5}{2} P \right) \cdot \left( \frac{5}{6} \right) \times 5\ell \right\} \\
 &= \frac{1}{EA} \left\{ -\frac{16}{9} P\ell + \frac{15}{2} P\ell + \frac{125}{6} P\ell \right\} = \frac{Pl}{EA} \cdot \frac{-32+135+375}{18} = \frac{478}{18} \cdot \frac{Pl}{EA} = \frac{239}{9} \cdot \frac{Pl}{EA} \\
 \therefore v_E &= \frac{239}{9} \cdot \frac{Pl}{EA}
 \end{aligned}$$

【問題 SM-5】 下図に示す曲げ剛性が  $EI$  で一定の不静定ばりについて、次の設問に答えよ。

- (1) 支点反力  $R_B$  を不静定力と考えて、添付した“変形の公式”を用いて、これを求めよ。
- (2) 支点反力  $R_A$ ,  $R_C$  を求めよ。
- (3) 断面力図（せん断力図, 曲げモーメント図）を図示せよ。

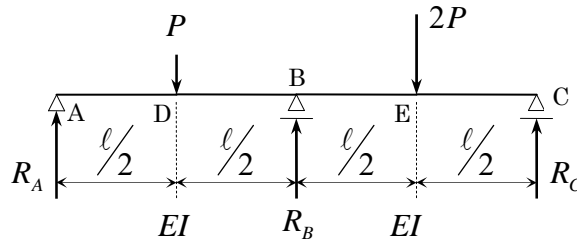


表-8.1(a) 各種はりのたわみおよびたわみ角

	荷重状態	たわみ曲線	特定点のたわみ
単純 ばり ①		$y_l = \frac{Pa^2b^2}{6EI} \left( 2\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2b} \right)$ $y_r = \frac{Pa^2b^2}{6EI} \left( 2\frac{x'}{b} + \frac{x'}{a} - \frac{x'^3}{ab^2} \right)$	$y_c = \frac{Pa^2b^2}{3EI}$
単純 ばり ②		$y_l = \frac{Pl^3}{16EI} \left( \frac{x}{l} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{l^3} \right) \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$	$y_{\max} = y_c = \frac{Pl^3}{48EI}$

【解答】

(1) 問題の不静定ばりにおいて、支点  $B$  を外したものを静定基本系と考え、まず、“変形の公式”を利用して、 $B$  点の変位  $v_B$  を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 v_B &= \frac{P \left( \frac{l}{2} \right)^2 \left( \frac{3}{2} l \right)^2}{6EI(2l)} \left( 2 \frac{l}{\frac{3}{2} l} + \frac{l}{\frac{l}{2}} - \frac{l^3}{\left( \frac{l}{2} \right) \left( \frac{3}{2} l \right)^2} \right) + \frac{2P \left( \frac{3}{2} l \right)^2 \left( \frac{l}{2} \right)^2}{6EI(2l)} \left( 2 \frac{l}{\frac{3}{2} l} + \frac{l}{\frac{l}{2}} - \frac{l^3}{\left( \frac{l}{2} \right) \left( \frac{3}{2} l \right)^2} \right) \\
 &= \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{3^2}{2^5} \left( \frac{4}{3} + 2 - \frac{8}{9} \right) + \frac{2Pl^3}{6EI} \cdot \frac{3^2}{2^5} \left( \frac{4}{3} + 2 - \frac{8}{9} \right) = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{12+18-8}{9} + \frac{2Pl^3}{6EI} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{12+18-8}{9} \\
 &= \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{22}{32} + \frac{2Pl^3}{6EI} \cdot \frac{22}{32} = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{11}{16} + \frac{2Pl^3}{6EI} \cdot \frac{11}{16} = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \left( \frac{11}{16} + \frac{22}{16} \right) = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{33}{16}
 \end{aligned}$$

次に、静定基本系の  $B$  点に外力  $X$  を作用させたとき、上記の  $B$  点の変位  $v_B$  と等しくなるような外力  $X$  の大きさを求めれば、 $B$  点の支点反力  $R_B$  が得られる。

そこで、“変形の公式”を利用して、 $B$  点の変位  $v'_B$  を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 v'_B &= \frac{X(2l)^3}{48EI} = \frac{8Xl^3}{48EI} = \frac{Xl^3}{6EI} \\
 v_B &= v'_B \text{ であるから、} \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{33}{16} = \frac{Xl^3}{6EI} \quad \therefore X = \frac{6EI}{l^3} \cdot \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{33}{16} = \frac{33}{16} P = R_B
 \end{aligned}$$

よって、 $R_B = \frac{33}{16} P$



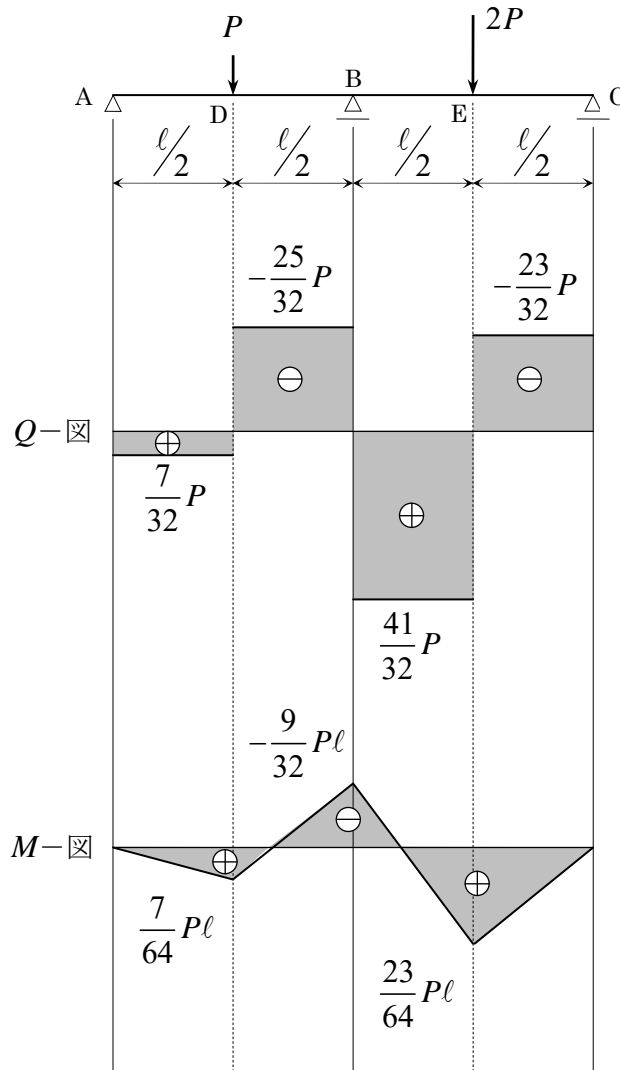
(2) 支点反力  $R_A$ ,  $R_C$  を求めると、次のようになる。

$$R_A = \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}(2P) - \frac{1}{2}R_B = \frac{5}{4}P - \frac{33}{32}P = \frac{40-33}{32}P = \frac{7}{32}P \quad \therefore R_A = \frac{7}{32}P$$

$$R_C = \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}(2P) - \frac{1}{2}R_B = \frac{7}{4}P - \frac{33}{32}P = \frac{56-33}{32}P = \frac{23}{32}P \quad \therefore R_C = \frac{23}{32}P$$

以上まとめると、支点反力は、 $R_A = \frac{7}{32}P$ ,  $R_B = \frac{33}{16}P$ ,  $R_C = \frac{23}{32}P$  となる。

(3) 断面力図（せん断力図，曲げモーメント図）を図示すると、以下のようになる。



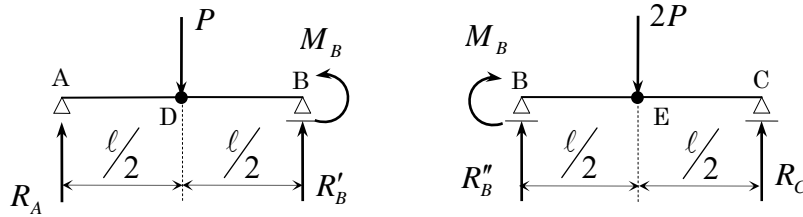
《別解》

A~B~C 間に “3連モーメントの定理” を適用すると、

$$\frac{\ell}{I} M_A + 2 \cdot \left( \frac{\ell}{I} + \frac{\ell}{I} \right) M_B + \frac{\ell}{I} M_C = -6 \cdot \left( \frac{\frac{1}{16} P \ell^2}{I} + \frac{\frac{1}{16} 2 P \ell^2}{I} \right) = -6 \cdot \frac{\ell}{I} \cdot \left( \frac{1}{16} P \ell + \frac{1}{8} P \ell \right) = -6 \cdot \frac{\ell}{I} \cdot \frac{3}{16} P \ell$$

ここで、 $M_A = M_C = 0$  だから、 $4M_B = -6 \cdot \frac{3}{16} P \ell = -\frac{9}{8} P \ell \quad \therefore M_B = -\frac{9}{32} P \ell$

問題の1次不静定ばりは、下図に示すように A~B 間（左スパン）、B~C 間（右スパン）の単純ばりに分けられる。



左スパンについて、

鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R'_B = P$

B 点回りのモーメントの釣合から、 $R_A \ell = M_B + \frac{1}{2} P \ell$

$\therefore R_A \ell = -\frac{9}{32} P \ell + \frac{1}{2} P \ell = \frac{7}{32} P \ell \quad \therefore R_A = \frac{7}{32} P$       さらに、 $R'_B = \frac{25}{32} P$

右スパンについて、

鉛直方向の力の釣合から、 $R''_B + R_C = 2P$

B 点回りのモーメントの釣合から、 $R_C \ell = M_B + 2P \times \frac{1}{2} \ell$

$\therefore R_C \ell = -\frac{9}{32} P \ell + P \ell = \frac{23}{32} P \ell \quad \therefore R_C = \frac{23}{32} P$       さらに、 $R''_B = \frac{41}{32} P$

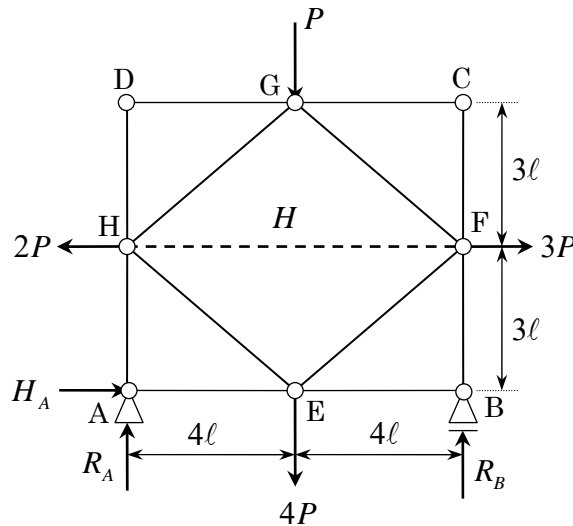
よって、 $R_B = R'_B + R''_B = \frac{25}{32} P + \frac{41}{32} P = \frac{66}{32} P = \frac{33}{16} P$

以上まとめると、

$$\boxed{M_B = -\frac{9}{32} P \ell}, \quad \boxed{R_A = \frac{7}{32} P}, \quad \boxed{R_B = \frac{33}{16} P}, \quad \boxed{R_C = \frac{23}{32} P}$$

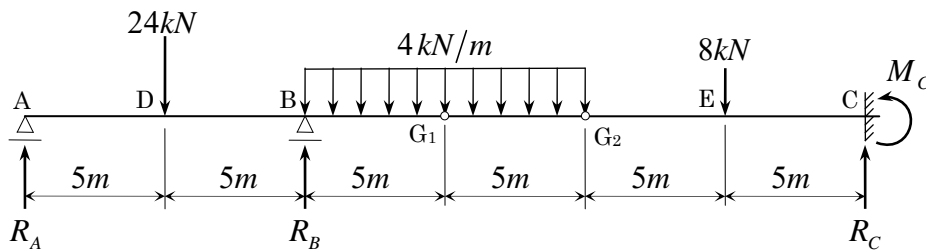
【1】 下図に示す静定トラスについて、次の設問に答えよ。

- (1) 破線で表される部材の部材力  $H$  を “**仮想変位の原理**” を用いて求めよ。  
 なお、解答用紙に記された図に、仮想変位による変位性状を明記すること。
- (2) E 点の鉛直方向の変位  $v_E$  を “**単位荷重法**” を用いて求めよ。  
 なお、全ての部材の引張剛性は、 $EA$  とする。  
 また、全ての部材力と支点反力の計算結果は、解答用紙に記入せよ。

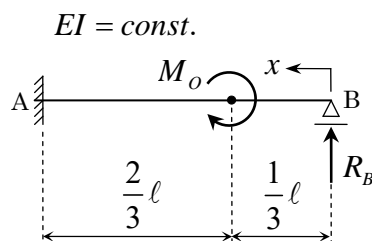


【2】 下図に示す静定ゲルバーばりの支点反力  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  と C 点の支点曲げモーメント  $M_C$  および D 点の曲げモーメント  $M_D$  を “**仮想変位の原理**” を用いて求めよ。

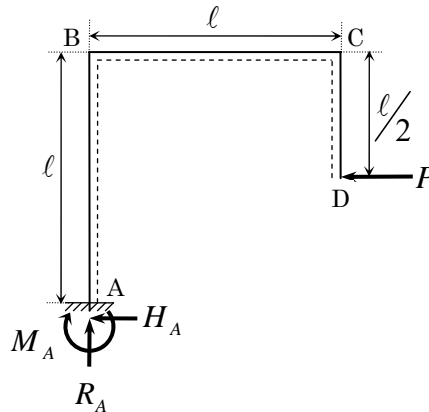
なお、解答用紙に記された図に、単位の仮想変位  $\Delta = 1$  による変位性状を明記すること。



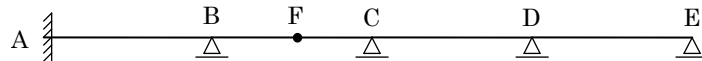
【3】 下図に示すような曲げ剛性  $EI$  が一定で、集中モーメント  $M_0$  が作用する 1 次不静定ばり AB の B 点の支点反力  $R_B$  を “**最小仕事の原理**” を用いて求めよ。なお、せん断力の影響は無視する。



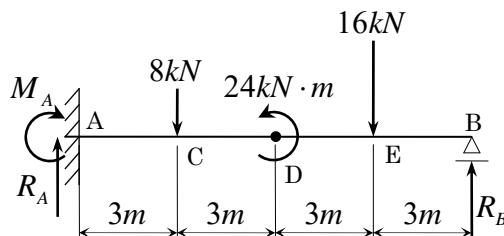
- 【4】 下図に示す静定ラーメンの D 点の水平方向変位  $u_D$  を “カステリアーノの第2定理” を用いて求めよ。ただし、部材の引張剛性と曲げ剛性は、 $EA, EI$  とし、せん断力の影響は無視する。また、曲げモーメントは、点線側が “引張” となる曲げモーメントを “正” とする。  
 なお、解答用紙に記された図に、断面力図を明記すること。



- 【5】 “ミューラー・ブレスラウ(Müller-Breslau)の定理” を用いて、  
 下図に示す不静定ばりの支点反力  $R_A, R_B, R_C$  と支点曲げモーメント  $M_A, M_B$ 、さらに F 点のたわみ  $v_F$ 、せん断力  $Q_F$ 、曲げモーメント  $M_F$  の影響線の概略を解答用紙に図示せよ。ただし、図中には、正負の符号を必ず明記すること。



- 【6】 下図に示す1次不静定ばりについて、“3連モーメントの定理” を用いて、まず、A 点の支点曲げモーメント  $M_A$  を求めよ。次に、支点反力  $R_A, R_B$  を求めよ。さらに、この1次不静定ばりの断面力図を図示せよ。ただし、はりの曲げ剛性は、 $EI$  であり、支点沈下はないものとする。  
 なお、断面力図は、解答用紙に記された図に明記すること。

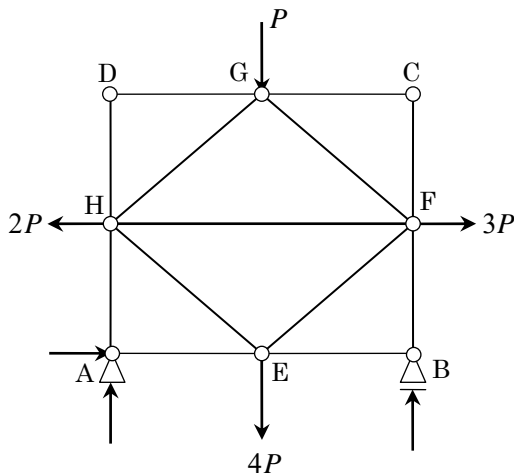


【1】《配点 30 点》

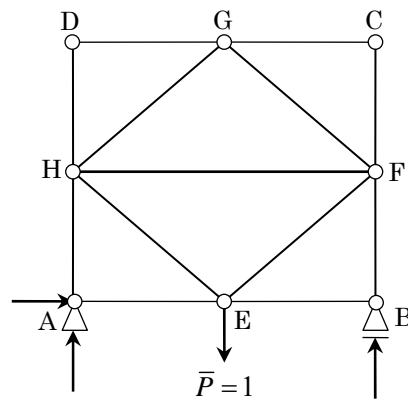
- (1)
- ① 支持条件や幾何学的条件を満足する水平方向の仮想変位を  $\Delta$  とするとき、鉛直方向の仮想変位は  $\Delta$  とならない。
  - ② 力の方向と逆方向の仮想変位は “負” となる。
- (2) 解答の手順は、以下の通りである。
- ① “節点法” を用いて、実系の全ての部材力  $N$  を求める。
  - ② E 点に単位荷重  $\bar{P}=1$  のみを鉛直方向に载荷させた仮想系を考え、これの全ての部材力  $\bar{N}$  を求める。その際、(1) と同様な方法で、部材 HF の部材力は求めるとよい。
  - ③ 以下の式で表される “単位荷重法” を用いる際には、部材長の違いに注意すること。

$$1 \times v_E = \sum \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} \ell_{ij}$$

- ④ 载荷荷重と構造の対称性を利用すると、②で求める部材力は簡単に計算できる。



【実系】



【仮想系】

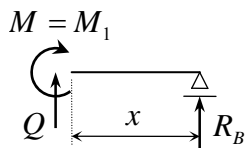
【2】《配点 20 点》

- ① 支点反力  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  それぞれについて、ゲルバーばりの支持条件や幾何学的条件を満足する “単位” の仮想変位  $\Delta=1$  を図示する。
- ② C 点の支点曲げモーメント  $M_C$  については、“単位” の仮想回転角  $\Delta=1$  をゲルバーばりの支持条件や幾何学的条件を満足するように図示する。
- ③ D 点の曲げモーメント  $M_D$  については、D 点にヒンジを挿入して、“単位” の仮想変位  $\Delta=1m$  をゲルバーばりの支持条件や幾何学的条件を満足するように図示する。この場合、 $M_D$  に相対角を乗じて、外力の仮想仕事を計算する。
- ④ 荷重の方向と逆方向の仮想変位は “負” である。
- ⑤ 等分布荷重に対しては、“影響線” と同様に取り扱い、“影響面積” から求めることができる。

【3】《配点 15 点》

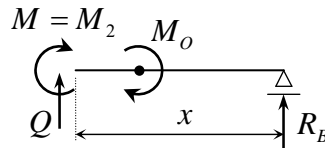
- ① 支点反力  $R_B$  を不静定力（未知数）とする。
- ② 支点 B からの距離  $x$  の点の曲げモーメント  $M$  を以下のように考え、 $R_B$  の関数として表す。

$0 \leq x \leq \frac{1}{3}l$  のとき、



$$M_1 = R_B x$$

$\frac{1}{3}l \leq x \leq l$  のとき、



$$M_2 = R_B x - M_0$$

- ③ はりに蓄えられるひずみエネルギー  $U$  を以下の式を用いて、 $R_B$  の関数として表す。

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\ell}{3}} \frac{(M_1)^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} \frac{(M_2)^2}{EI} dx \text{ または、 } 2EI \cdot U = \int_0^{\frac{\ell}{3}} (M_1)^2 dx + \int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} (M_2)^2 dx$$

- ④  $U$  を  $R_B$  で偏微分して、“最小仕事の原理”、 $\frac{\partial U}{\partial R_B} = 0$  により  $R_B$  を求める。

【4】《配点 15 点》

- ① 断面力図 ( $N$ -図,  $M$ -図) を求める。  
 ② 静定ラーメンに蓄えられるひずみエネルギー  $U$  を求める。

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx$$

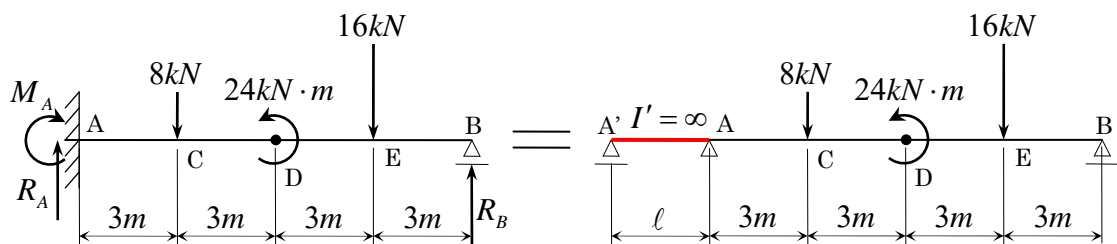
- ③ “カステリアーノの第 2 定理” を適用すると、D 点の水平方向変位  $u_D$  は、 $u_D = \frac{\partial U}{\partial P}$  と表される。

【5】《配点 16 点》

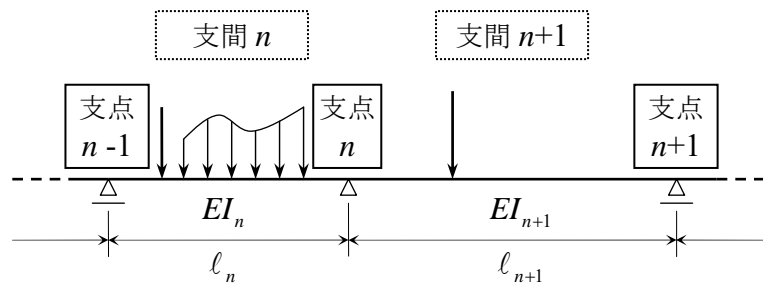
- ① 曲げモーメントについては、ヒンジを挿入して、負の曲げモーメントを作用させる。  
 ② せん断力については、シアレス・ヒンジを挿入して、負のせん断力を作用させる。  
 ③ 問題の不静定ばりには、“固定支点”と“回転支点”があることに注意し、その違いがわかるように影響線の概略を描くこと。

【6】《配点 24 点》

問題のはりの固定端部は、下図のように、長さ  $\ell$ 、断面 2 次モーメント  $I' = \infty$  のはりが付加されたと考えることができ、A'~A~B 間に“3 連モーメントの定理”を適用する。



“3 連モーメントの定理” は、次のような式で表される。



$$\frac{\ell_n}{I_n} M_{n-1} + 2 \cdot \left( \frac{\ell_n}{I_n} + \frac{\ell_{n+1}}{I_{n+1}} \right) \cdot M_n + \frac{\ell_{n+1}}{I_{n+1}} M_{n+1} = -6 \cdot \left( \frac{\bar{A}_0}{I_n} + \frac{\bar{B}_0}{I_{n+1}} \right) + 6 \cdot E \cdot (R_n - R_{n+1})$$

ここに、 $R_n$ ,  $R_{n+1}$  : 部材回転角、 $\bar{A}_0$ ,  $\bar{B}_0$  : 荷重項 (別表参照) である。

$\bar{A}_0$  : 注目する支点  $n$  の左側の支間  $n$  についての荷重項

$\bar{B}_0$  : 注目する支点  $n$  の右側の支間  $n+1$  についての荷重項

この問題では、支点沈下はないので、部材回転角はゼロ。荷重項の計算に注意すること!!

※総配点 120 点を「100 点満点」とみなして、期末試験の成績とする。

※レポートの提出：期末試験の全ての問題をもう一度解き、

2018 年 1 月 9 日(火) 17:00 までに機械建設 1 号棟 7F 702 号室のポストに投函すること。

表・2  $\int_0^{\ell} F_1(x) \cdot F_2(x) dx$  についての代数公式


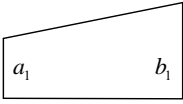
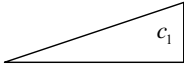
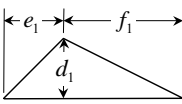
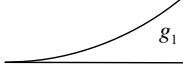
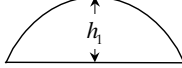
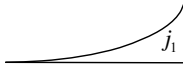
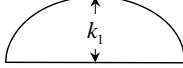


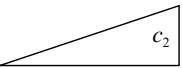
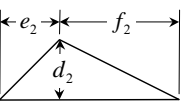
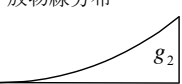
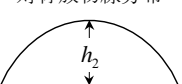
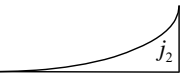
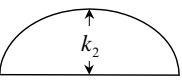
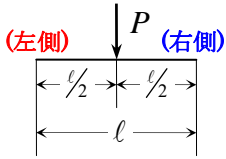
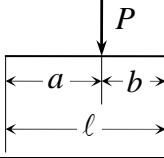
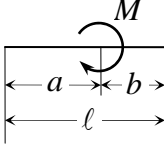
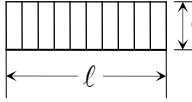
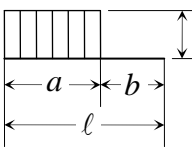
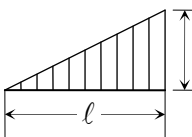
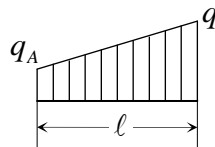
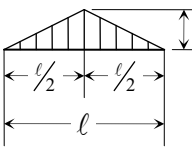
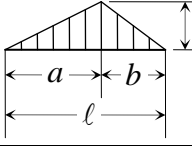
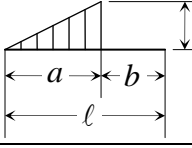
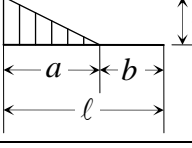
$F_1(x)$ $F_2(x)$					放物線分布 	対称放物線分布 	3次曲線分布 	対称3次曲線分布 
	$la_1a_2$	$\frac{\ell}{2}(a_1+b_1)a_2$	$\frac{\ell}{2}a_2c_1$	$\frac{\ell}{2}a_2d_1$	$\frac{\ell}{3}a_2g_1$	$\frac{2}{3}la_2h_1$	$\frac{\ell}{4}a_2j_1$	$\frac{2}{3}la_2k_1$
	$\frac{\ell}{2}a_1(a_2+b_2)$	$\frac{\ell}{6} \left[ \frac{a_1(2a_2+b_2)}{+b_1(a_2+2b_2)} \right]$	$\frac{\ell}{6}(a_2+2b_2)c_1$	$\frac{d_1}{6} \left[ \frac{a_2f_1+b_2e_1}{+(a_2+b_2)} \right]$	$\frac{\ell}{12}(a_2+3b_2)g_1$	$\frac{\ell}{3}(a_2+b_2)h_1$	$\frac{\ell}{20}(a_2+4b_2)j_1$	$\frac{2\ell}{45}(7a_2+8b_2)k_1$
	$\frac{\ell}{2}a_1c_2$	$\frac{\ell}{6}(a_1+2b_1)c_2$	$\frac{\ell}{3}c_1c_2$	$\frac{(\ell+e_1)}{6}c_2d_1$	$\frac{\ell}{4}c_2g_1$	$\frac{\ell}{3}c_2h_1$	$\frac{\ell}{5}c_2j_1$	$\frac{16\ell}{45}c_2k_1$
	$\frac{\ell}{2}a_1d_2$	$\frac{d_2}{6} \left[ \frac{a_1f_2+b_1e_2}{+(a_1+b_1)} \right]$	$\frac{(\ell+e_2)}{6}c_1d_2$	$e_1 > e_2$ のとき $\frac{d_1d_2\ell}{3} \left[ 1 - \frac{(e_1-e_2)^2}{2e_1f_2} \right]$	$\frac{(\ell^2+e_2\ell+e_2^2)}{12\ell}d_2g_1$	$\frac{(\ell^2+e_2f_2)}{3\ell}d_2h_1$	$\frac{(\ell+e_2)(\ell^2+e_2^2)}{20\ell^2}d_2j_1$	$\frac{2(\ell+e_2)(7\ell^2-3e_2^2)}{45\ell^2}d_2k_1$
放物線分布 	$\frac{\ell}{3}a_1g_2$	$\frac{\ell}{12}(a_1+3b_1)g_2$	$\frac{\ell}{4}c_1g_2$	$\frac{(\ell^2+e_1\ell+e_1^2)}{12\ell}d_1g_2$	$\frac{\ell}{5}g_1g_2$	$\frac{\ell}{5}g_2h_1$	$\frac{\ell}{6}g_2j_1$	$\frac{2\ell}{9}g_2k_1$
対称放物線分布 	$\frac{2}{3}la_1h_2$	$\frac{\ell}{3}(a_1+b_1)h_2$	$\frac{\ell}{3}c_1h_2$	$\frac{(\ell^2+e_1f_1)}{3\ell}d_1h_2$	$\frac{\ell}{5}g_1h_2$	$\frac{8\ell}{15}h_1h_2$	$\frac{2\ell}{15}h_2j_1$	$\frac{8\ell}{15}h_2k_1$
3次曲線分布 	$\frac{\ell}{4}a_1j_2$	$\frac{\ell}{20}(a_1+4b_1)j_2$	$\frac{\ell}{5}c_1j_2$	$\frac{(\ell+e_1)(\ell^2+e_1^2)}{20\ell^2}d_1j_2$	$\frac{\ell}{6}g_1j_2$	$\frac{2\ell}{15}h_1j_2$	$\frac{\ell}{7}j_1j_2$	$\frac{16\ell}{105}j_2k_1$
対称3次曲線分布 	$\frac{2}{3}la_1k_2$	$\frac{2\ell}{45}(7a_1+8b_1)k_2$	$\frac{16\ell}{45}c_1k_2$	$\frac{2(\ell+e_1)(7\ell^2-3e_1^2)}{45\ell^2}d_1k_2$	$\frac{2\ell}{9}g_1k_2$	$\frac{8\ell}{15}h_1k_2$	$\frac{16\ell}{105}j_1k_2$	$\frac{512\ell}{945}k_1k_2$

表-13.1 “3連モーメントの定理”における荷重項

荷重状態	(左側)	(右側)
	$\frac{1}{16} P \ell^2$	$\frac{1}{16} P \ell^2$
	$\frac{P \ell^2}{6} \cdot \left( \frac{b}{\ell} - \frac{b^3}{\ell^3} \right) = \frac{Pab(\ell + b)}{6\ell}$	$\frac{P \ell^2}{6} \cdot \left( \frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right) = \frac{Pab(\ell + a)}{6\ell}$
	$-M \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \left( 1 - 3 \frac{b^2}{\ell^2} \right) = -\frac{M(\ell^2 - 3b^2)}{6\ell}$	$M \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \left( 1 - 3 \frac{a^2}{\ell^2} \right) = \frac{M(\ell^2 - 3a^2)}{6\ell}$
	$\frac{1}{24} q \ell^3$	$\frac{1}{24} q \ell^3$
	$\frac{q \ell^3}{24} \cdot \frac{a^2}{\ell^2} \cdot \left( 2 - \frac{a}{\ell} \right)^2$	$\frac{q \ell^3}{24} \cdot \frac{a^2}{\ell^2} \cdot \left( 2 - \frac{a^2}{\ell^2} \right)$
	$\frac{7}{360} q \ell^3$	$\frac{1}{45} q \ell^3$
	$(8q_A + 7q_B) \cdot \frac{\ell^3}{360}$	$(7q_A + 8q_B) \cdot \frac{\ell^3}{360}$
	$\frac{5}{192} q \ell^3$	$\frac{5}{192} q \ell^3$
	$\frac{q \ell^3}{360} \cdot \left( 1 + \frac{b}{\ell} \right) \cdot \left( 7 - 3 \frac{b^2}{\ell^2} \right)$	$\frac{q \ell^3}{360} \cdot \left( 1 + \frac{a}{\ell} \right) \cdot \left( 7 - 3 \frac{a^2}{\ell^2} \right)$
	$\frac{q \ell^3}{360} \cdot \frac{a^2}{\ell^2} \cdot \left( 40 - 45 \frac{a}{\ell} + 12 \frac{a^2}{\ell^2} \right)$	$\frac{q \ell^3}{90} \cdot \frac{a^2}{\ell^2} \cdot \left( 5 - 3 \frac{a^2}{\ell^2} \right)$
	$\frac{q \ell^3}{360} \cdot \frac{a^2}{\ell^2} \cdot \left( 20 - 15 \frac{a}{\ell} + 3 \frac{a^2}{\ell^2} \right)$	$\frac{q \ell^3}{360} \cdot \frac{a^2}{\ell^2} \cdot \left( 10 - 3 \frac{a^2}{\ell^2} \right)$

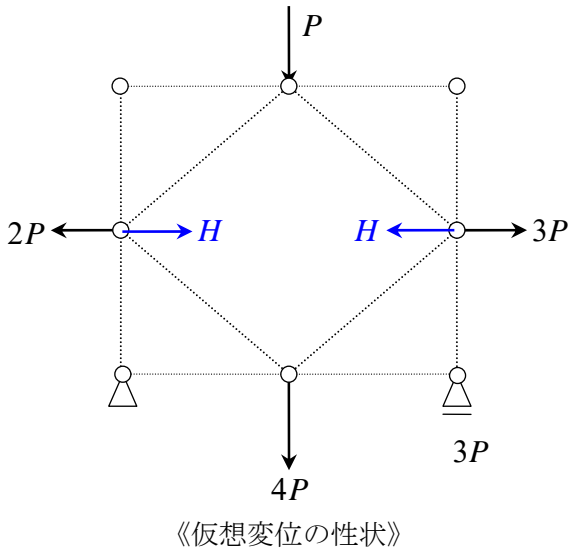
※小松定夫：“構造解析学Ⅱ”（第3版），pp.188（表13-1）に準拠，丸善，1989



学籍 番号		氏名	
----------	--	----	--

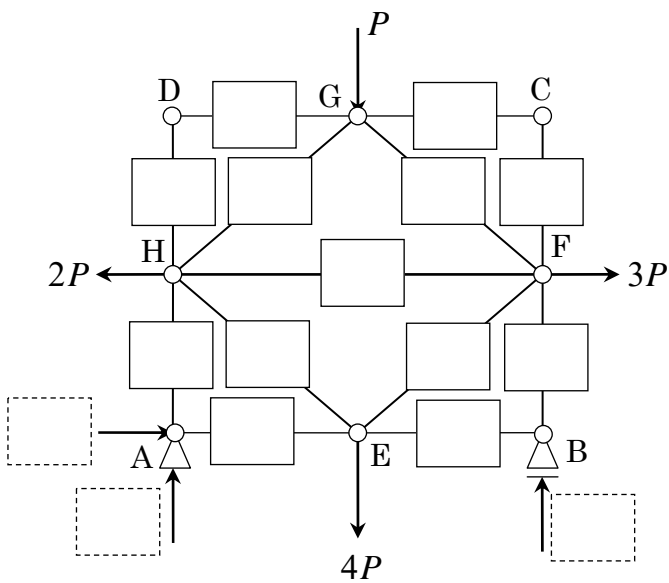
	評点
【1】	
【2】	
【3】	
【4】	
【5】	
【6】	
合計	

【1】  
(1)

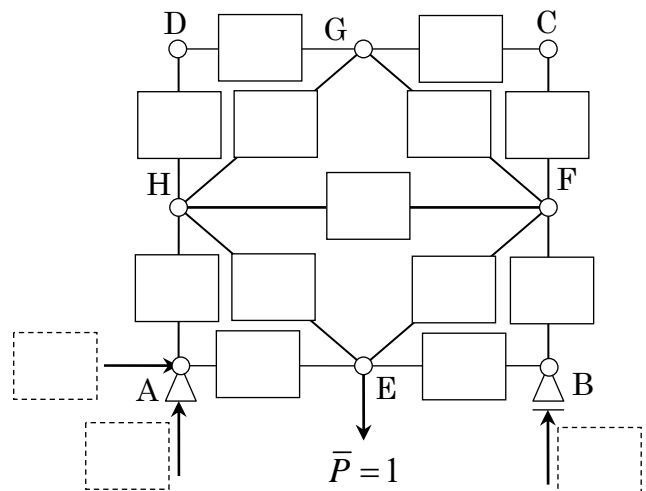


(1)	$H =$
-----	-------

(2)



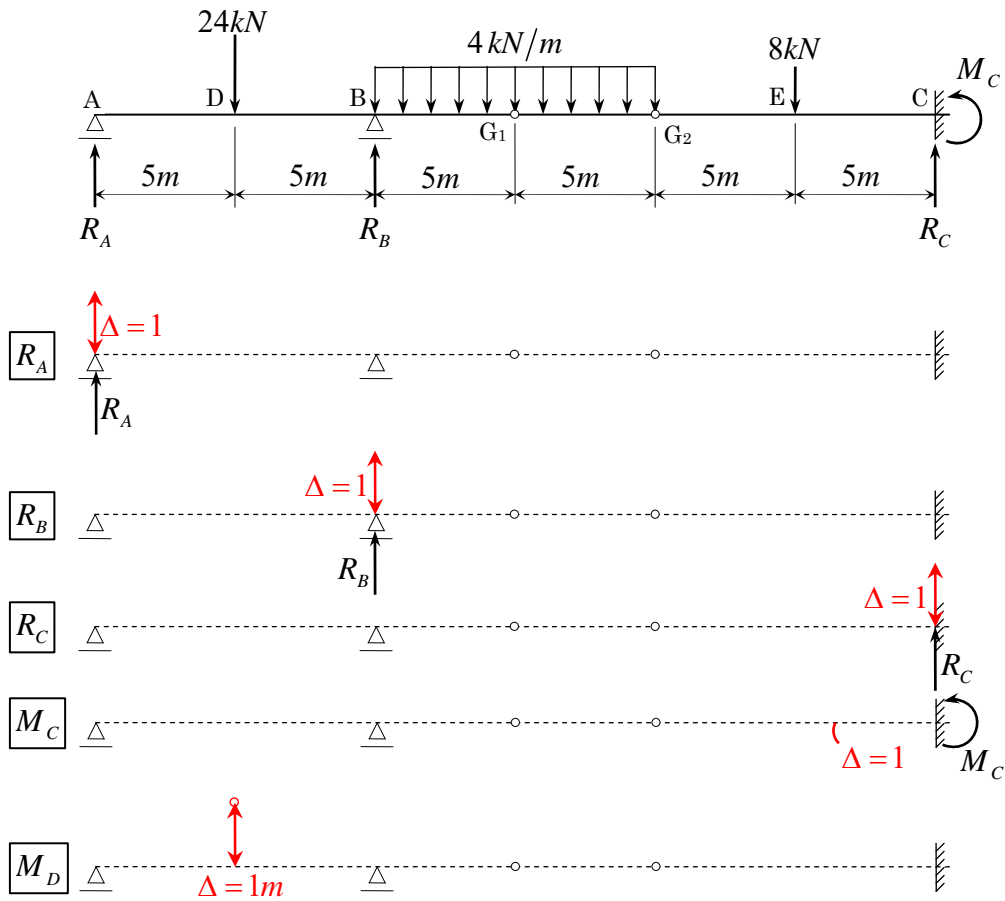
【実系の部材力と支点反力】



【仮想系の部材力と支点反力】

(2)	$v_E =$
-----	---------

【2】

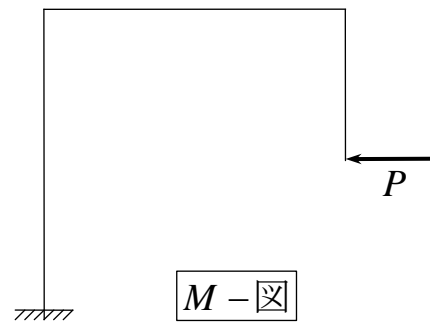
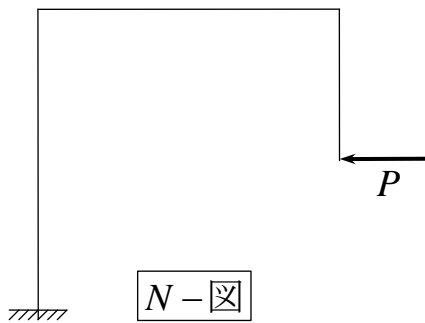


$R_A =$
$R_B =$
$R_C =$
$M_C =$
$M_D =$

【3】

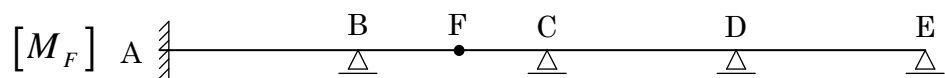
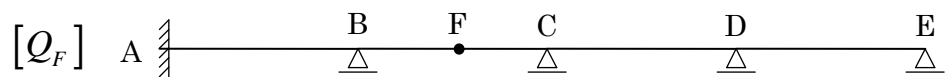
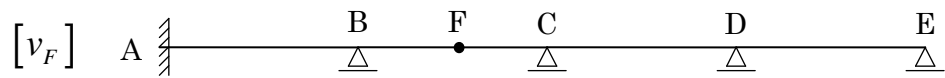
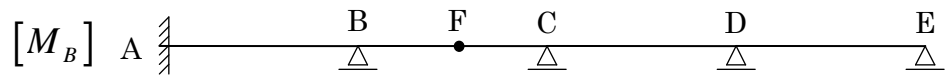
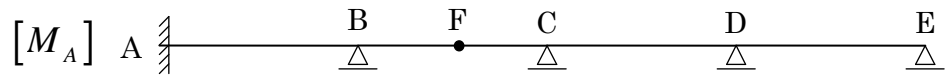
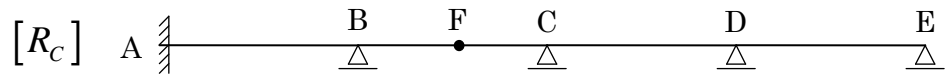
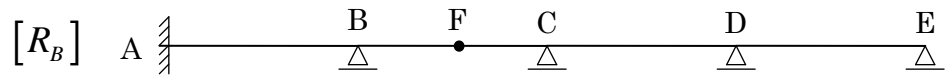
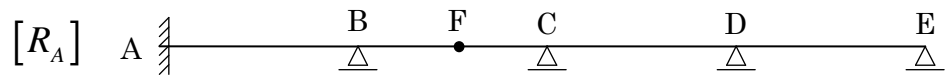
$R_B =$

【4】



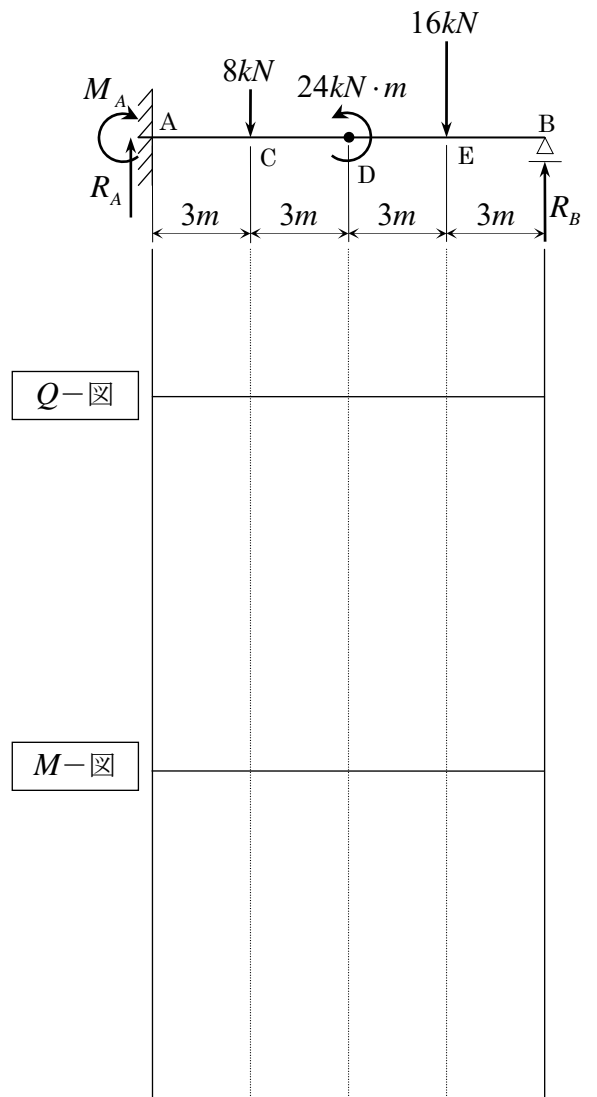
$u_D =$

【5】



【6】

$M_A =$
$R_A =$
$R_B =$



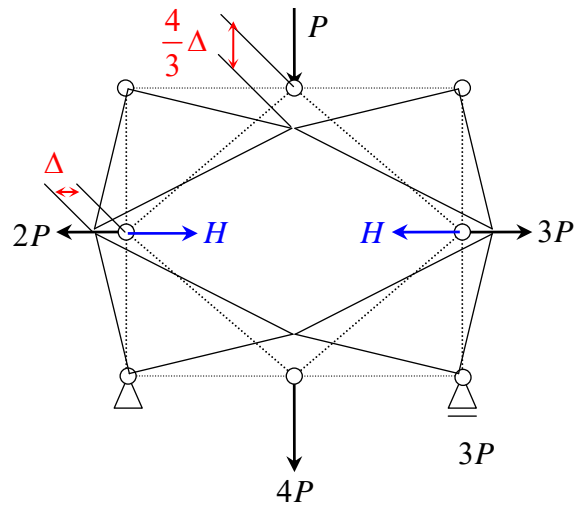
【1】

(1) 右図に示すように、支持条件や幾何学的条件を満足する水平方向の仮想変位を $\Delta$ とすると、鉛直方向の仮想変位は $\frac{4}{3}\Delta$ となること、及び、力の方向と逆方向の仮想変位は“負”となることに注意して、“仮想変位の原理”を適用すると、次のようになる。

$$2P \cdot \Delta + 3P \cdot \Delta + H \cdot (-\Delta) + H \cdot (-\Delta) + P \cdot \frac{4}{3}\Delta + 4P \cdot \left(-\frac{4}{3}\Delta\right) = 0$$

$$\therefore 2P + 3P - H - H + \frac{4}{3}P - \frac{16}{3}P = 0$$

$$\therefore 5P - 2H - 4P = 0 \quad \therefore H = \frac{1}{2}P \quad \text{5点}$$



(2) 実系の支点反力 $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$ を求めると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R_B = P + 4P = 5P$   
 水平方向の力の釣合から、 $H_A + 3P = 2P \quad \therefore H_A = -P$   
 A点回りのモーメントの釣合から、 $R_B \times 8l + 2P \times 3l = P \times 4l + 3P \times 3l + 4P \times 4l$   
 $\therefore 8R_B = 23P \quad \therefore R_B = \frac{23}{8}P$  よって  $R_A = 5P - R_B = 5P - \frac{23}{8}P = \frac{17}{8}P$

さらに、“節点法”を用いて、実系の全ての部材力を求めると下左図のようになる。

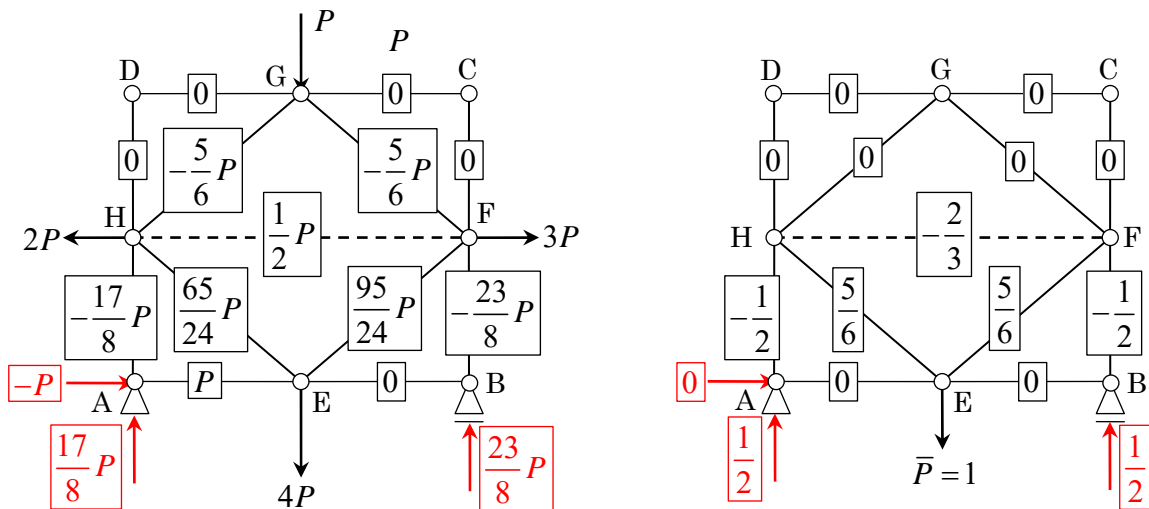
次に、E点に単位荷重 $\bar{P}=1$ のみを鉛直方向に载荷させた仮想系を考え、これの全ての部材力を求める。

まず、(1)と同様な方法で、部材HFの部材力 $\bar{H}$ を求めると、

$$\bar{H} \cdot (-\Delta) + \bar{H} \cdot (-\Delta) + \bar{P} \cdot \left(-\frac{4}{3}\Delta\right) = 0 \quad \therefore \bar{H} + \bar{H} + \frac{4}{3}\bar{P} = 0$$

$$\therefore 2\bar{H} = -\frac{4}{3}\bar{P} \quad \therefore \bar{H} = -\frac{2}{3}\bar{P} = -\frac{2}{3}$$

さらに、“節点法”を用いて、仮想系の全ての部材力を求めると下右図のようになる。



【実系】  
5点

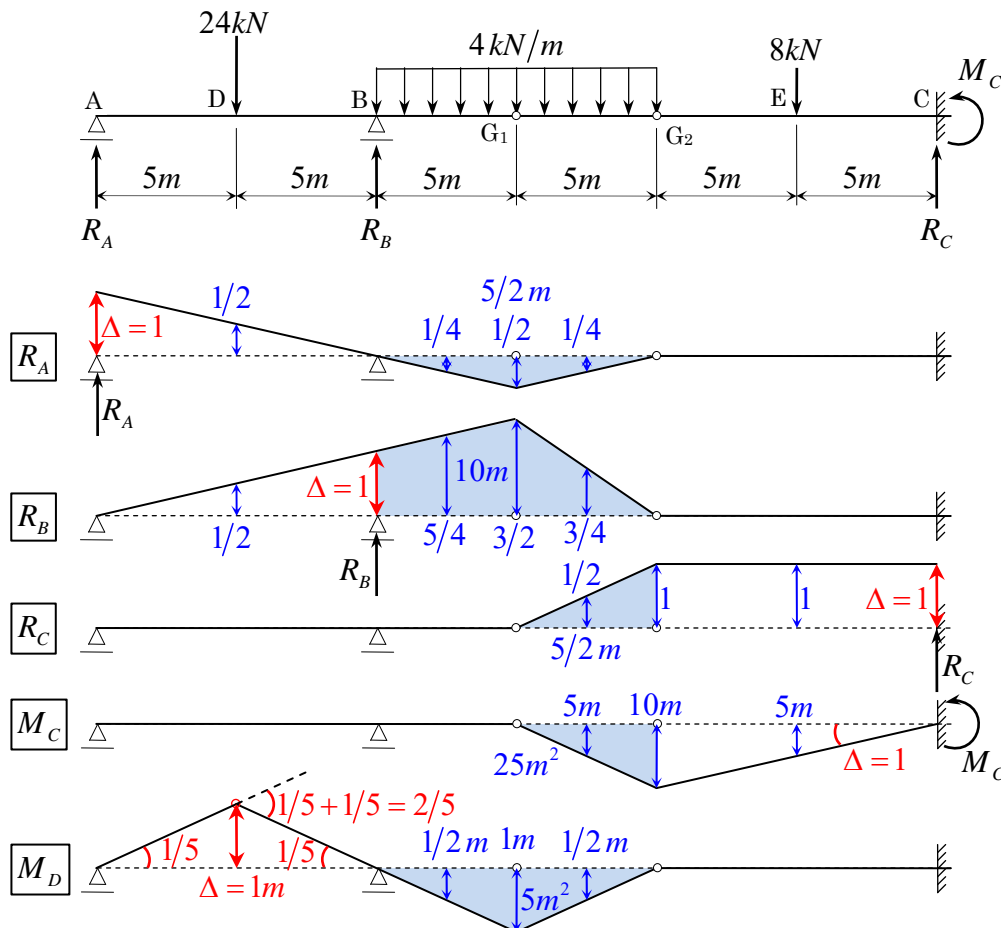
【仮想系】  
5点

したがって、“単位荷重法”を用いて、E点の鉛直方向の変位 $v_E$ を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
1 \times v_E &= \sum \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} \ell_{ij} \\
&= \frac{1}{EA} \left\{ \left( \frac{1}{2} P \right) \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) \times 2 \times 4\ell + \left( -\frac{17}{8} P \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \times 3\ell + \left( -\frac{23}{8} P \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \times 3\ell \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{65}{24} P \right) \cdot \left( \frac{5}{6} \right) \times 5\ell + \left( \frac{95}{24} P \right) \cdot \left( \frac{5}{6} \right) \times 5\ell \right\} \\
&= \frac{1}{EA} \left\{ -\frac{8}{3} P\ell + \frac{51}{16} P\ell + \frac{69}{16} P\ell + \frac{1625}{144} P\ell + \frac{2375}{144} P\ell \right\} = \frac{1}{EA} \left\{ -\frac{8}{3} P\ell + \frac{15}{2} P\ell + \frac{250}{9} P\ell \right\} \\
&= \frac{Pl}{EA} \cdot \frac{-144 + 405 + 1500}{54} = \frac{1761}{54} \cdot \frac{Pl}{EA} = \frac{587}{18} \cdot \frac{Pl}{EA} \\
\therefore v_E &= \frac{587}{18} \cdot \frac{Pl}{EA} \quad \text{10点}
\end{aligned}$$

【2】

支点反力  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  と C 点の支点曲げモーメント  $M_C$  および D 点の曲げモーメント  $M_D$  のそれぞれについて、題意のゲルバーばりの支持条件や幾何学的条件を満足する “単位” の仮想変位  $\Delta = 1$  を図示すると下図のようになる。



」各2点

荷重の方向と逆方向の仮想変位は “負” であることに注意して、“仮想変位の原理” を適用すると次のようになる。なお、等分布荷重に対しては “影響面積” を用いている。

支点反力  $R_A$  について  $R_A \times 1 + 24kN \times (-1/2) + 4kN/m \times (5/2m) = 0$

$\therefore R_A - 12 + 10 = 0$

$\therefore R_A = 2kN$  2点

支点反力  $R_B$  について  $R_B \times 1 + 24kN \times (-1/2) + 4kN/m \times (-10m) = 0$

$\therefore R_B - 12 - 40 = 0$

$\therefore R_B = 52kN$  2点



支点反力  $R_C$  について  $R_C \times 1 + 8kN \times (-1) + 4kN/m \times (-5/2m) = 0$

$\therefore R_C - 8 - 10 = 0$

$\therefore R_C = 18kN$  ] 2点

C 点の支点曲げモーメント  $M_C$  について  $M_C \times 1 + 8kN \times (5m) + 4kN/m \times (25m^2) = 0$

$\therefore M_C + 40 + 100 = 0$

$\therefore M_C = -140kN \cdot m$  ] 2点

D 点の曲げモーメント  $M_D$  について  $M_D \times 2/5 + 24kN \times (-1m) + 4kN/m \times (5m^2) = 0$

$\therefore 2/5 M_D - 24 + 20 = 0$

$\therefore 2/5 M_D = 4$

$\therefore M_D = 10kN \cdot m$  ] 2点

《別解》

等分布荷重に対して、集中荷重に換算し重心に載荷した場合は、次のようになる。

支点反力  $R_A$  について  $R_A \times 1 + 24kN \times (-1/2) + 4kN/m \times 5m \times (1/4) + 4kN/m \times 5m \times (1/4) = 0$

$\therefore R_A - 12 + 5 + 5 = 0$

$\therefore R_A = 2kN$

支点反力  $R_B$  について  $R_B \times 1 + 24kN \times (-1/2) + 4kN/m \times 5m \times (-5/4) + 4kN/m \times 5m \times (-3/4) = 0$

$\therefore R_B - 12 - 25 - 15 = 0$

$\therefore R_B = 52kN$

支点反力  $R_C$  について  $R_C \times 1 + 8kN \times (-1) + 4kN/m \times 5m \times (-1/2) = 0$

$\therefore R_C - 8 - 10 = 0$

$\therefore R_C = 18kN$

C 点の支点曲げモーメント  $M_C$  について  $M_C \times 1 + 8kN \times (5m) + 4kN/m \times 5m \times (5m) = 0$

$\therefore M_C + 40 + 100 = 0$

$\therefore M_C = -140kN \cdot m$

D 点の曲げモーメント  $M_D$  について

$M_D \times 2/5 + 24kN \times (-1m) + 4kN/m \times 5m \times (1/2m) + 4kN/m \times 5m \times (1/2m) = 0$

$\therefore 2/5 M_D - 24 + 10 + 10 = 0 \quad \therefore 2/5 M_D = 4$

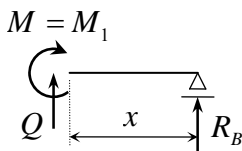
$\therefore M_D = 10kN \cdot m$

【3】

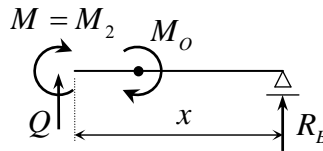
不静定力を  $R_B$  とすると、支点 B からの距離  $x$  の点の曲げモーメント  $M$  は、次のようになる。

$0 \leq x \leq \frac{1}{3}\ell$  のとき、

$\frac{1}{3}\ell \leq x \leq \ell$  のとき、



$M_1 = R_B x$



$M_2 = R_B x - M_0$

このとき、はりに蓄えられるひずみエネルギー  $U$  は、次のようになる。

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{3}\ell} \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} \frac{M^2}{EI} dx$$

$$2EI \cdot U = \int_0^{\frac{1}{3}\ell} (M_1)^2 dx + \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} (M_2)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{3}\ell} (R_B x)^2 dx + \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} (R_B x - M_0)^2 dx$$

$$= R_B^2 \int_0^{\frac{1}{3}\ell} x^2 dx + R_B^2 \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} x^2 dx - 2R_B M_0 \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} x dx + M_0^2 \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} dx$$

$$= R_B^2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{3}\ell} - 2R_B M_0 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} + M_0^2 \left[ x \right]_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} = R_B^2 \frac{\ell^3}{3} - R_B M_0 \left( \ell^2 - \frac{\ell^2}{9} \right) + M_0^2 \frac{2}{3} \ell$$

] 10点

$$= \frac{\ell^3}{3} R_B^2 - \frac{8}{9} \ell^2 M_0 R_B + \frac{2}{3} \ell M_0^2$$

ここで、「最小仕事の原理」から  $\frac{\partial U}{\partial R_B} = 0$  だから、 $2EI \cdot \frac{\partial U}{\partial R_B} = 0$  より  $R_B$  を求めると、次のようになる。

$$2EI \cdot \frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{2}{3} \ell^3 R_B - \frac{8}{9} \ell^2 M_o = 0 \quad \therefore \frac{2}{3} \ell^3 R_B - \frac{8}{9} \ell^2 M_o = 0$$

$$\therefore R_B = \frac{8}{9} \ell^2 M_o \cdot \frac{3}{2\ell^3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_o}{\ell} \quad \text{すなわち、} \boxed{R_B = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_o}{\ell}} \quad \text{5点}$$

### 《別解》

はりに蓄えられるひずみエネルギー  $U$  を計算する際に、 $R_B$  での偏微分を先に行うと、次のようになる。

$$2EI \cdot U = \int_0^{\frac{\ell}{3}} (R_B x)^2 dx + \int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} (R_B x - M_o)^2 dx$$

$$2EI \cdot \frac{\partial U}{\partial R_B} = 2R_B \int_0^{\frac{\ell}{3}} x^2 dx + 2 \int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} x (R_B x - M_o) dx = 2R_B \int_0^{\frac{\ell}{3}} x^2 dx + 2R_B \int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} x^2 dx - 2M_o \int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} x dx$$

$$= 2R_B \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\ell}{3}} + 2R_B \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} - 2M_o \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{\ell}{3}}^{\ell}$$

$$= 2R_B \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\ell} - M_o \left( \ell^2 - \frac{\ell^2}{9} \right) = \frac{2}{3} \ell^3 R_B - \frac{8}{9} \ell^2 M_o = 0$$

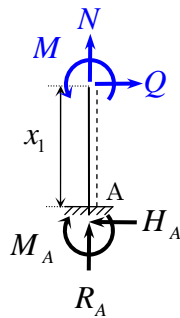
$$\therefore \boxed{R_B = \frac{8}{9} \ell^2 M_o \cdot \frac{3}{2\ell^3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_o}{\ell}}$$

### 【4】

支点反力を求めると、 $R_A = 0$ ， $H_A = -P$ ， $M_A = \frac{1}{2} P\ell$

次に、下図のように、A～B間、B～C間、C～D間に分けて断面力を求める。

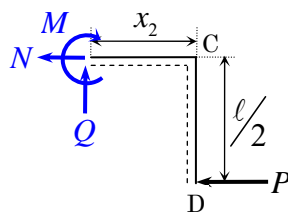
A～B間について、                      B～C間について、                      C～D間について、



$$N = -R_A = 0$$

$$Q = H_A = -P$$

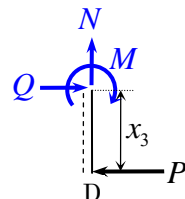
$$M = H_A \cdot x_1 + M_A = -P \cdot x_1 + \frac{1}{2} P\ell$$



$$N = -P$$

$$Q = 0$$

$$M = -\frac{1}{2} P\ell$$

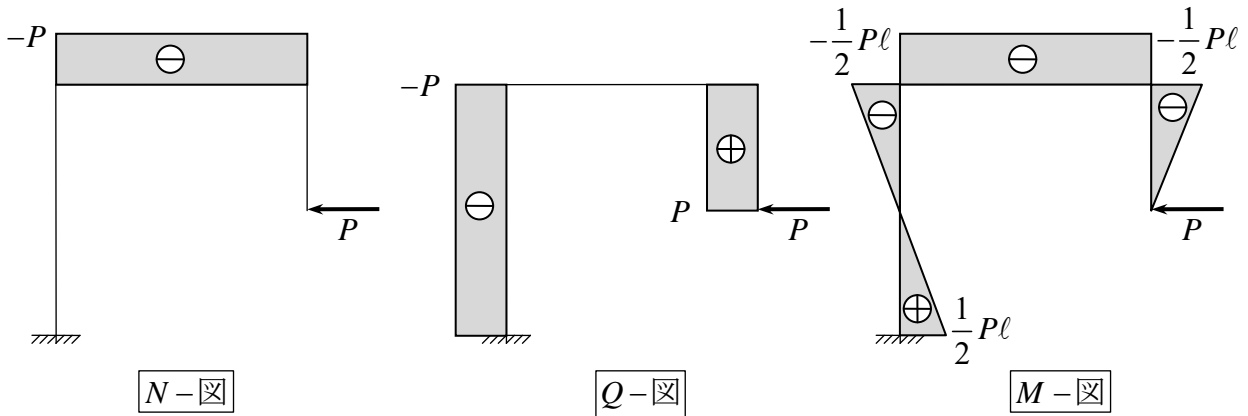


$$N = 0$$

$$Q = P$$

$$M = -P \cdot x_3$$

これらを図示すると、断面力図は、下図のようになる。



この静定ラーメンのひずみエネルギー  $U$  を求めると、次のようになる。

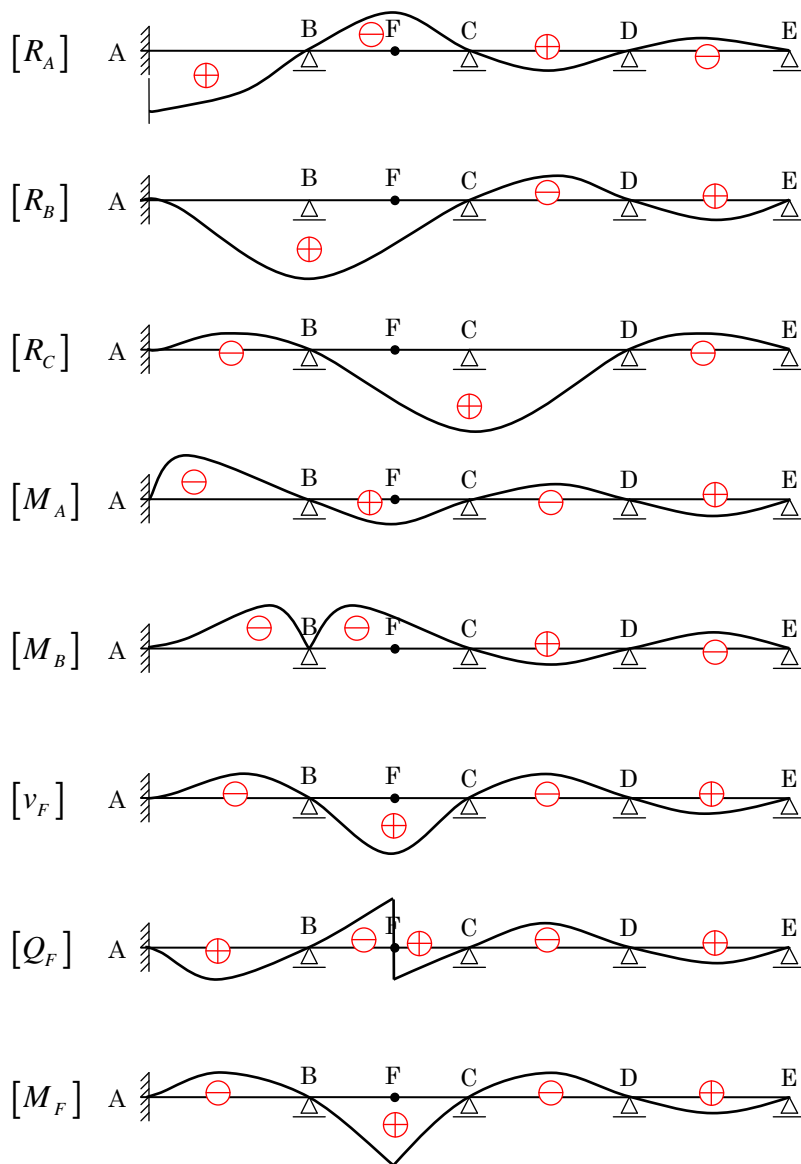
$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx \\
 &= \frac{1}{2EA} \cdot \int_0^\ell (-P)^2 dx + \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^\ell \left( \frac{1}{2} P\ell - Px \right)^2 dx \\
 &\quad + \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^\ell \left( -\frac{1}{2} P\ell \right)^2 dx + \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\ell} (-Px)^2 dx \\
 &= \frac{P^2\ell}{2EA} + \frac{P^2}{2EI} \cdot \int_0^\ell \left( \frac{1}{2}\ell - x \right)^2 dx + \frac{P^2}{2EI} \cdot \int_0^\ell \left( -\frac{1}{2}\ell \right)^2 dx + \frac{P^2}{2EI} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\ell} (x)^2 dx \\
 &= \frac{P^2\ell}{2EA} + \frac{P^2}{2EI} \cdot \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}\ell - x \right)^3 \right]_0^\ell + \frac{P^2}{2EI} \cdot \frac{\ell^3}{4} + \frac{P^2}{2EI} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}\ell} \\
 &= \frac{P^2\ell}{2EA} + \frac{P^2}{2EI} \cdot \left( \frac{\ell^3}{24} + \frac{\ell^3}{24} \right) + \frac{P^2}{2EI} \cdot \frac{\ell^3}{4} + \frac{P^2}{2EI} \cdot \frac{\ell^3}{24} \\
 &= \frac{P^2\ell}{2EA} + \frac{P^2\ell^3}{2EI} \cdot \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{P^2\ell}{2EA} + \frac{3}{8} \cdot \frac{P^2\ell^3}{2EI}
 \end{aligned}$$

」 5 点

「カステリアーノの第2定理」を適用すると、D 点の水平方向変位  $u_D$  は、次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{P^2\ell}{2EA} + \frac{3}{8} \cdot \frac{P^2\ell^3}{2EI} \right) = \frac{P\ell}{EA} + \frac{3}{8} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} = u_D \quad \therefore \boxed{u_D = \frac{P\ell}{EA} + \frac{3}{8} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}} \quad \text{」 5 点}$$

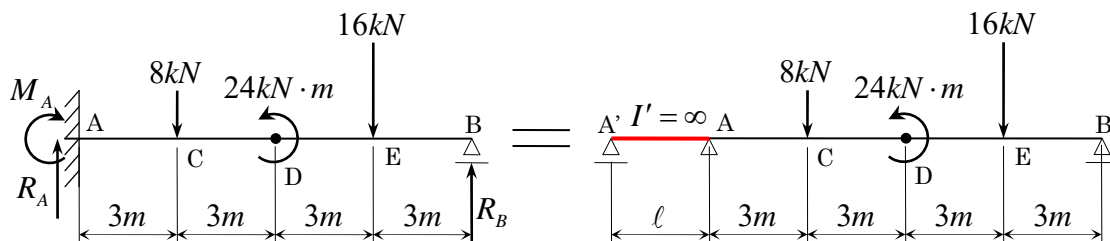
【5】



」各2点×8=16点

【6】

問題のはりの固定端部は、下図のように、長さ $\ell$ 、断面2次モーメント $I' = \infty$ のはりが付加されたと考えることができる。



$A' \sim A \sim B$  間に「3連モーメントの定理」を適用すると、次のようになる。

$$\frac{\ell}{I'} M'_A + 2 \left( \frac{\ell}{I'} + \frac{12m}{I} \right) M_A + \frac{12m}{I} M_B = -6 \left( \frac{\bar{A}_0}{I'} + \frac{\bar{B}_0}{I} \right)$$

ここで、荷重項の表より、

左側の支間： $\bar{A}_0 = 0$  (荷重が載荷されていないから)

$$\text{右側の支間: } \overline{B_0} = (\overline{B_0})_1 + (\overline{B_0})_2 + (\overline{B_0})_3 = 63 + 12 + 90 = 165 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$(\overline{B_0})_1 = \frac{Pl^2}{6} \cdot \left\{ \frac{b}{l} - \left( \frac{b}{l} \right)^3 \right\} = \frac{8 \text{ kN} \cdot (12 \text{ m})^2}{6} \cdot \left\{ \frac{9 \text{ m}}{12 \text{ m}} - \left( \frac{9 \text{ m}}{12 \text{ m}} \right)^3 \right\} = 192 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left\{ 1 - \frac{9}{16} \right\} = 144 \cdot \frac{7}{16} = 63 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$(\overline{B_0})_2 = -M \cdot \frac{l}{6} \cdot \left\{ 1 - 3 \left( \frac{b}{l} \right)^2 \right\} = -(-24 \text{ kN} \cdot \text{m}) \cdot \frac{12 \text{ m}}{6} \cdot \left\{ 1 - 3 \left( \frac{6 \text{ m}}{12 \text{ m}} \right)^2 \right\} = 48 \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{4} \right\} = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$(\overline{B_0})_3 = \frac{Pl^2}{6} \cdot \left\{ \frac{b}{l} - \left( \frac{b}{l} \right)^3 \right\} = \frac{16 \text{ kN} \cdot (12 \text{ m})^2}{6} \cdot \left\{ \frac{3 \text{ m}}{12 \text{ m}} - \left( \frac{3 \text{ m}}{12 \text{ m}} \right)^3 \right\} = 384 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{16} \right\} = 96 \cdot \frac{15}{16} = 90 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

となり、 $I' = \infty$ ,  $M'_A = M_B = 0$  だから、 $\frac{1}{I}$  を上記の式から消去すると、 $4M_A = -\overline{B_0}$

$$4M_A = -\overline{B_0} = -165 \quad \therefore M_A = -\frac{165}{4} = -41.25 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{] 8 点}$$

問題のほりに対して、剛体の釣合条件を適用すると、

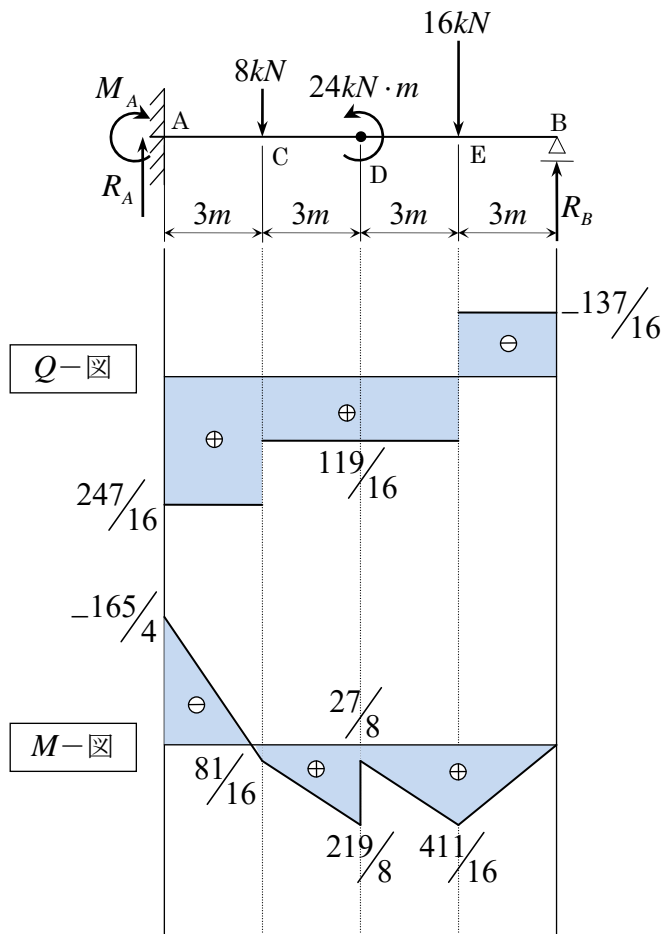
鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R_B = 8 + 16 = 24 \text{ kN}$

A 点回りのモーメントの釣合から、 $R_B \cdot 12 \text{ m} + 24 \text{ kN} \cdot \text{m} = M_A + 8 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} + 16 \text{ kN} \cdot 9 \text{ m}$

$$\therefore 12R_B = -\frac{165}{4} + 24 + 144 - 24 = \frac{411}{4} \quad \therefore R_B = \frac{137}{16} \text{ kN} \quad \therefore R_A = 24 - \frac{137}{16} = \frac{247}{16} \text{ kN}$$

よって、 $R_A = \frac{247}{16} = 15.4375 \text{ kN}$ ,  $R_B = \frac{137}{16} = 8.5625 \text{ kN}$  ] 各 4 点  $\times 2 = 8$  点

これらより、断面力図を図示すると、下図のようになる。



] 各 4 点  $\times 2 = 8$  点