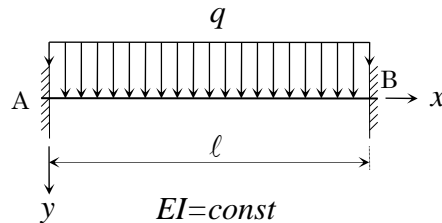


【問題 BD4-B-3】 下図に示すような曲げ剛性  $EI$  が一定の“両端固定ばり”について、以下の設問に答えよ。

- (1) たわみ角  $\theta(x)$  とたわみ  $y(x)$  の式
- (2) 最大のたわみ  $y_{\max}$  とその発生位置  $x_{\max}$
- (3) せん断力図 ( $Q$ -図) と曲げモーメント図 ( $M$ -図) を求めよ。



【解答】

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す4階の微分方程式  $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q$  を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy''' = qx + C_1$$

$$EIy'' = \frac{q}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

$$EIy' = \frac{q}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を求める。

(a)  $x = 0$  のとき、 $y' = 0$  より、  $C_3 = 0$

(b)  $x = 0$  のとき、 $y = 0$  より、  $C_4 = 0$

(c)  $x = l$  のとき、 $y' = 0$  より、  $\frac{q}{6}l^3 + \frac{C_1}{2}l^2 + C_2l = 0$  .....①

(d)  $x = l$  のとき、 $y = 0$  より、  $\frac{q}{24}l^4 + \frac{C_1}{6}l^3 + \frac{C_2}{2}l^2 = 0$  .....②

①を変形すると、  $ql^2 + 3C_1l + 6C_2 = 0$  .....①'

②を変形すると、  $ql^2 + 4C_1l + 12C_2 = 0$  .....②'

①'  $\times 2 -$  ②' より、  $ql^2 + 2C_1l = 0$   $\therefore C_1 = -\frac{q}{2}l$

これを①'に代入すると、  $6C_2 = -ql^2 - 3 \cdot \left(-\frac{q}{2}l\right) \cdot l = \frac{q}{2}l^2$   $\therefore C_2 = \frac{q}{12}l^2$

よって、たわみ角  $\theta(x)$  とたわみ  $y(x)$  の式は、次のようになる。

$$EIy''' = qx - \frac{q}{2}l$$

$$EIy'' = \frac{q}{2}x^2 - \frac{q}{2}lx + \frac{q}{12}l^2$$

$$EIy' = \frac{q}{6}x^3 - \frac{q}{4}lx^2 + \frac{q}{12}l^2x$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 - \frac{q}{12}lx^3 + \frac{q}{24}l^2x^2$$

$$\therefore \begin{cases} \theta(x) = y'(x) = \frac{q}{6EI}x^3 - \frac{q}{4EI}lx^2 + \frac{q}{12EI}l^2x \\ y(x) = \frac{q}{24EI}x^4 - \frac{q}{12EI}lx^3 + \frac{q}{24EI}l^2x^2 \end{cases}$$

これらを整理すると、次のようになる。

$$\begin{cases} \theta(x) = \frac{ql^3}{12EI} \cdot \left\{ 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right) + 1 \right\} \cdot \left(\frac{x}{l}\right) \\ y(x) = \frac{ql^4}{24EI} \cdot \left\{ \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right) + 1 \right\} \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{cases}$$

(2) 最大のたわみ  $y_{\max}$  は、たわみ角  $\theta(x) = \frac{dy}{dx} = 0$  のときに生ずるから、

$$\left\{ 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right) + 1 \right\} \cdot \left(\frac{x}{l}\right) = 0 \quad \therefore \left(\frac{x}{l}\right) \cdot \left\{ 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right) - 1 \right\} \cdot \left\{ \left(\frac{x}{l}\right) - 1 \right\} = 0 \quad \therefore \frac{x}{l} = 0, \frac{1}{2}, 1$$

ここで、 $0 < \frac{x}{l} < 1$  でないと意味を持たないから、 $\frac{x}{l} = \frac{1}{2}$  すなわち、 $x_{\max} = \frac{1}{2}l$  のとき、次のような最大のたわみ  $y_{\max}$  を生じる。

$$y_{\max} = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{24EI} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) = \frac{ql^4}{384EI} = 0.002604166 \dots \frac{ql^4}{EI} \doteq 0.00260 \cdot \frac{ql^4}{EI}$$

整理すると、

$$\boxed{x_{\max} = \frac{1}{2}l} \text{ のとき、 } \boxed{y_{\max} = \frac{ql^4}{384EI} \doteq 0.00260 \cdot \frac{ql^4}{EI}}$$

ちなみに、両端単純支持の場合は、 $y_{\max} = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI} \doteq 0.01302 \cdot \frac{ql^4}{EI}$  である。

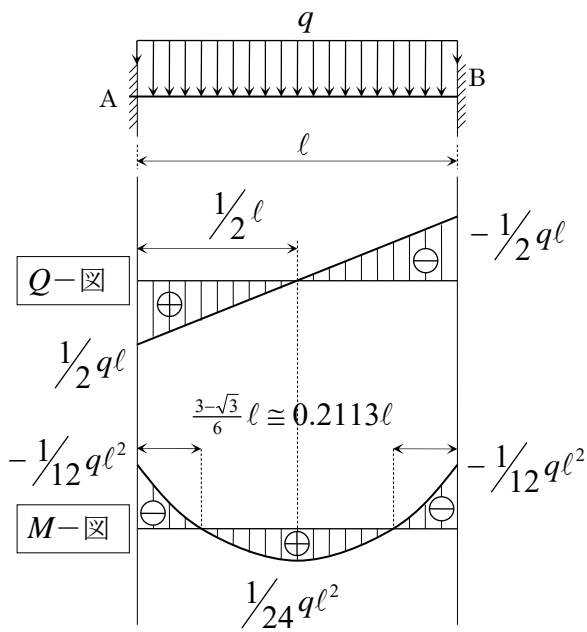
(3) 支点反力  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $R_A$ ,  $R_B$  を求めると、以下のようになる。

$$M = -EIy'' \text{ より、} \quad M_A = -EIy''|_{x=0} = -\frac{1}{12}q\ell^2 = M_B$$

$$Q = -EIy''' \text{ より、} \quad R_A = Q_A = -EIy'''|_{x=0} = \frac{1}{2}q\ell = R_B$$

以上より、
$$M_A = M_B = -\frac{1}{12}q\ell^2, \quad R_A = R_B = \frac{1}{2}q\ell$$

せん断力図 ( $Q$ -図)、曲げモーメント図 ( $M$ -図) を図示すると、下図のようになる。



曲げモーメントの最大値を求めると、

$$\begin{aligned} M_{\max} &= -EIy''|_{x=\frac{1}{2}l} \\ &= -\frac{q}{2} \cdot \frac{1}{4} \ell^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ell - \frac{1}{12} q\ell^2 \\ &= \left( -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) \cdot q\ell^2 \\ &= \frac{-3+6-2}{24} q\ell^2 \\ &= \frac{1}{24} q\ell^2 \end{aligned}$$

$$M = -EIy'' = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{1}{2}q\ell x - \frac{1}{12}q\ell^2 = 0 \text{ を解くと、}$$

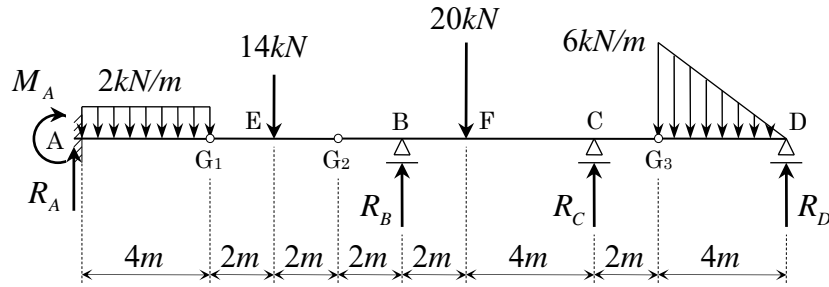
$$-6x^2 + 6\ell x - \ell^2 = 0$$

$$\therefore 6x^2 - 6\ell x + \ell^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \ell$$

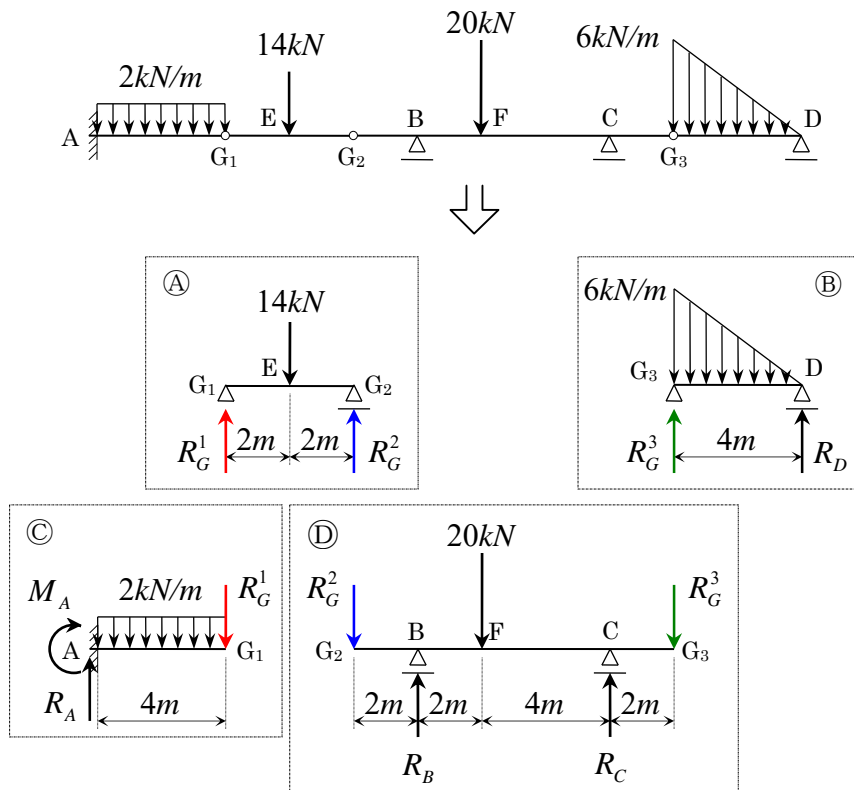
【問題 SF-G-2】 下図に示す静定ゲルバーばりについて、以下の設問に答えよ。

- (1) 支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ,  $R_D$  を求めよ。  
 (2) 断面力図、即ち、せん断力図 ( $Q$ -図), 曲げモーメント図 ( $M$ -図) を図示せよ。



【解答】

- (1) 静定ゲルバーばりを下図のように4つに分解して考える。



①について解くと、 $R_G^1 = R_G^2 = \frac{14}{2} = 7 \text{ (kN)}$

②について解くと、 $R_D + R_G^3 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$

$4R_D = 12 \cdot \frac{4}{3} = 16 \quad \therefore R_D = 4 \text{ (kN)}$  また、 $R_G^3 = 8 \text{ (kN)}$

③について解くと、 $R_A = 2 \cdot 4 + R_G^1 = 8 + 7 = 15 \text{ (kN)}$

$M_A + 8 \cdot 2 + R_G^1 \cdot 4 = 0 \quad \therefore M_A = -16 - 28 = -44 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$

④について解くと、 $R_B + R_C = R_G^2 + 20 + R_G^3 = 7 + 20 + 8 = 35$

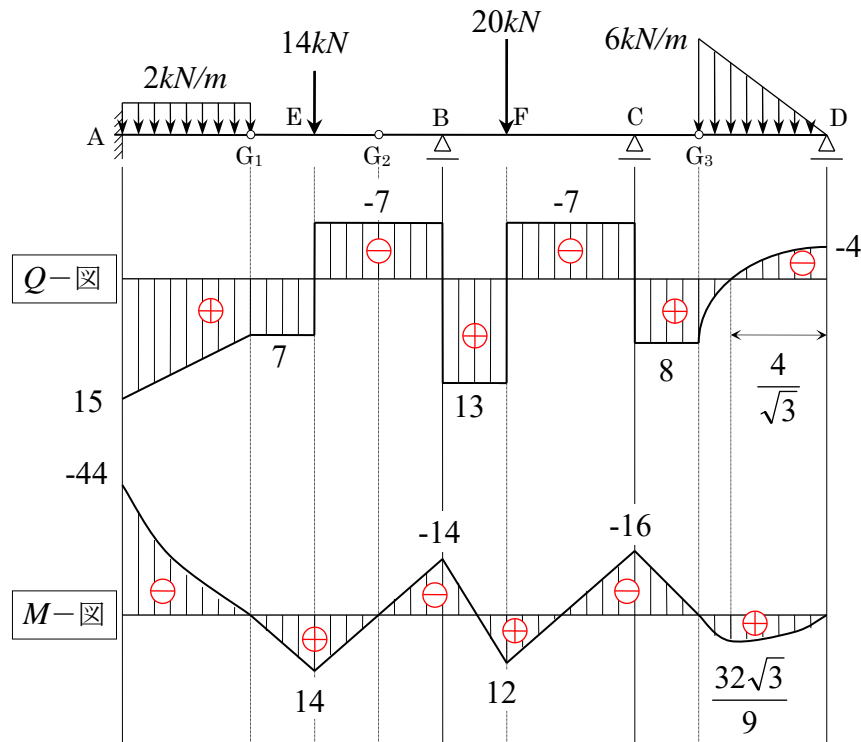
$6R_C + 2R_G^2 = 20 \cdot 2 + R_G^3 \cdot 8 \quad 6R_C = 40 + 64 - 14 = 90$

$\therefore R_C = 15 \text{ (kN)}$  また、 $R_B = 20 \text{ (kN)}$

以上より、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ,  $R_D$  をまとめると、次のようになる。

$$R_C = 15 (kN), \quad M_A = -44 (kN \cdot m), \quad R_B = 20 (kN), \quad R_C = 15 (kN), \quad R_D = 4 (kN)$$

(2)せん断力図 (Q-図), 曲げモーメント図 (M-図) を図示すると、下図のようになる。



なお、区間  $G_3D$  の変曲点については、右図のように考えて求めた。

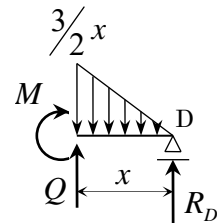
$$Q + R_D = \frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{2}x = \frac{3}{4}x^2 \quad \therefore Q = \frac{3}{4}x^2 - 4$$

$Q = 0$  となるのは、 $x^2 = \frac{16}{3}$  のときであり、 $x > 0$  であるから、

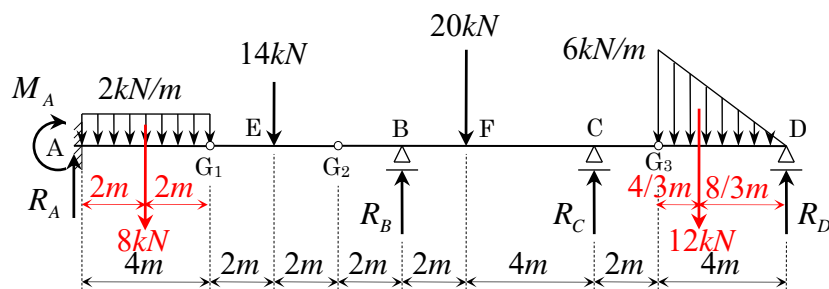
$$\therefore x = \frac{4}{\sqrt{3}} \cong 2.309 (m)$$

$$\text{このとき、} M + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = R_D \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore M = \frac{16}{\sqrt{3}} - \frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{32}{3\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{9} \cong 6.158 (kN \cdot m)$$



**【別解】**



ゲルバー梁全体に対して、剛体の釣合条件を適用する。

鉛直方向の力の釣合

$$R_A + R_B + R_C + R_D = 8 + 14 + 20 + 12 = 54 \quad \therefore R_A + R_B + R_C + R_D = 54 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

A点回りのモーメントの釣合

$$\begin{aligned} R_B \cdot 10m + R_C \cdot 16m + R_D \cdot 22m \\ = M_A + 8kN \cdot 2m + 14kN \cdot 6m + 20kN \cdot 12m + 12kN \cdot (18 + 4/3)m \\ 10R_B + 16R_C + 22R_D = M_A + 16 + 84 + 240 + 216 + 16 = M_A + 572 \\ \therefore 10R_B + 16R_C + 22R_D = M_A + 572 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

G<sub>1</sub>点回りのモーメントの釣合

$$\text{(左側)} \quad M_A + R_A \cdot 4m = 8kN \cdot 2m \quad \therefore M_A + 4R_A = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}_L$$

$$\begin{aligned} \text{(右側)} \quad R_B \cdot 6m + R_C \cdot 12m + R_D \cdot 18m = 14kN \cdot 2m + 20kN \cdot 8m + 12kN \cdot (14 + 4/3)m \\ 6R_B + 12R_C + 18R_D = 28 + 160 + 168 + 16 = 372 \quad \therefore R_B + 2R_C + 3R_D = 62 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}_R \end{aligned}$$

G<sub>2</sub>点回りのモーメントの釣合

$$\begin{aligned} \text{(左側)} \quad M_A + R_A \cdot 8m = 8kN \cdot 6m + 14kN \cdot 2m \\ M_A + 8R_A = 48 + 28 = 76 \quad \therefore M_A + 8R_A = 76 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(右側)} \quad R_B \cdot 2m + R_C \cdot 8m + R_D \cdot 14m = 20kN \cdot 4m + 12kN \cdot (10 + 4/3)m \\ 2R_B + 8R_C + 14R_D = 80 + 120 + 16 = 216 \quad \therefore R_B + 4R_C + 7R_D = 108 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}_R \end{aligned}$$

G<sub>3</sub>点回りのモーメントの釣合

$$\begin{aligned} \text{(左側)} \quad M_A + R_A \cdot 18m + R_B \cdot 8m + R_C \cdot 2m = 8kN \cdot 16m + 14kN \cdot 12m + 20kN \cdot 6m \\ M_A + 18R_A + 8R_B + 2R_C = 128 + 168 + 120 = 416 \\ \therefore M_A + 18R_A + 8R_B + 2R_C = 416 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}_L \end{aligned}$$

$$\text{(右側)} \quad R_D \cdot 4m = 12kN \cdot 4/3m \quad 4R_D = 16 \quad \therefore R_D = 4kN \quad \cdots \cdots \textcircled{5}_R$$

支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ,  $R_D$  (5つの未知数) に対して、①～⑤の5つの方程式を用いれば、一意的に支点反力は計算できる。ただし、③～⑤の3つの方程式については、(左側) (右側) のいずれか一方を用いる。

例えば、①, ②, ③<sub>L</sub>, ④<sub>L</sub>, ⑤<sub>R</sub>を用いれば次のようになる。

$$R_A + R_B + R_C + R_D = 54 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$10R_B + 16R_C + 22R_D = M_A + 572 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$M_A + 4R_A = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}_L$$

$$M_A + 8R_A = 76 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}_L$$

$$R_D = 4kN \quad \cdots \cdots \textcircled{5}_R$$

$$\textcircled{4}_L - \textcircled{3}_L \text{より、} 4R_A = 60 \quad \therefore R_A = 15kN$$

$$\text{これを} \textcircled{3}_L \text{に代入すると、} M_A + 4 \times 15 = 16 \quad \therefore M_A = -44kN \cdot m$$

これらと⑤<sub>R</sub>を①, ②に代入すると、

$$15 + R_B + R_C + 4 = 54 \quad \therefore R_B + R_C = 35 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}'$$

$$\begin{aligned} 10R_B + 16R_C + 22 \times 4 = -44 + 572 \quad \therefore 10R_B + 16R_C = 440 \\ \therefore 5R_B + 8R_C = 220 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}' \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}' \times 8 - \textcircled{2}' \text{より、} 3R_B = 35 \times 8 - 220 = 280 - 220 = 60$$

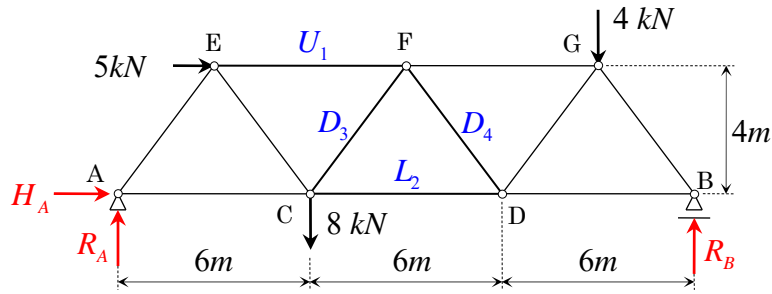
$$\therefore R_B = 20kN$$

$$\text{これを} \textcircled{1}' \text{に代入すると、} 20 + R_C = 35 \quad \therefore R_C = 15kN$$

以上をまとめると、

$$\boxed{R_A = 15kN}, \quad \boxed{M_A = -44kN \cdot m}, \quad \boxed{R_B = 20kN}, \quad \boxed{R_C = 15kN}, \quad \boxed{R_D = 4kN}$$

【問題 SF-T-1】 下図に示す静定ワーレントラスの部材力  $U_1$ ,  $D_3$ ,  $D_4$ ,  $L_2$  を求めよ。



【解答】

まず、支点反力  $H_A$ ,  $R_A$ ,  $R_B$  を求めると、

水平方向の力の釣合から、

$$H_A + 5 = 0 \quad \therefore H_A = -5 \text{ (kN)}$$

鉛直方向の力の釣合から、

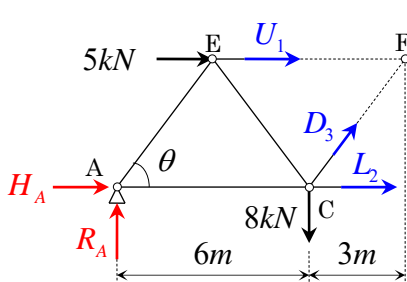
$$R_A + R_B = 8 + 4 = 12$$

A 点回りのモーメントの釣合から、

$$R_B \times 18m = 8kN \times 6m + 4kN \times 15m + 5kN \times 4m \\ = 48 + 60 + 20 = 128$$

$$\therefore R_B = \frac{128}{18} = \frac{64}{9} \text{ (kN)} \quad \text{よって、} R_A = \frac{44}{9} \text{ (kN)}$$

次に、下図に示すように  $t-t$  で切断して、左自由体と右自由体それぞれについて考えると、



[左自由体について]

水平方向の力の釣合から、

$$H_A + 5 + U_1 + \frac{3}{5}D_3 + L_2 = 0$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5}D_3 + R_A = 8$$

$$\therefore \frac{4}{5}D_3 = 8 - \frac{44}{9} = \frac{28}{9}$$

$$\therefore D_3 = \frac{28}{9} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{9} \text{ (kN)}$$

F 点回りのモーメントの釣合から、

$$4L_2 + 4H_A + 8kN \times 3m = R_A \times 9m$$

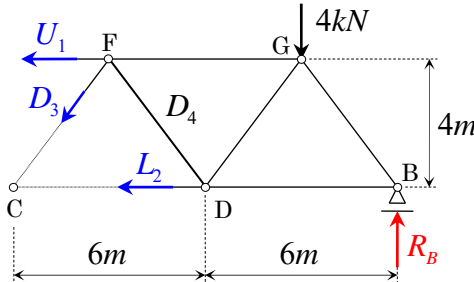
$$\therefore 4L_2 - 20 + 24 = 44$$

$$\therefore 4L_2 = 40$$

$$\therefore L_2 = 10 \text{ (kN)}$$

C 点回りのモーメントの釣合から、

$$4U_1 + 5kN \times 4m + R_A \times 6m = 0$$



[右自由体について]

$$U_1 + L_2 + \frac{3}{5}D_3 = 0$$

$$\frac{4}{5}D_3 + 4 = R_B$$

$$\therefore \frac{4}{5}D_3 = \frac{64}{9} - 4 = \frac{28}{9}$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$4L_2 + 4kN \times 6m = R_B \times 9m$$

$$\therefore 4L_2 + 24 = 64$$

$$4U_1 + R_B \times 12m = 4kN \times 9m$$

$$\therefore 4U_1 + 20 + \frac{44}{9} \cdot 6 = 0$$

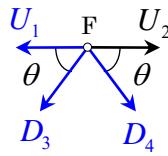
$$\therefore 4U_1 + \frac{64}{9} \cdot 12 = 36$$

$$\therefore 4U_1 = -\frac{88}{3} - 20 = -\frac{148}{3}$$

$$\therefore 4U_1 = 36 - \frac{256}{3} = -\frac{148}{3}$$

$$\therefore U_1 = -\frac{148}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{37}{3} \text{ (kN)}$$

さらに、 $F$  点での力の釣合を考えると、



水平方向の力の釣合から、

$$U_1 + \frac{3}{5}D_3 = U_2 + \frac{3}{5}D_4$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5}D_3 + \frac{4}{5}D_4 = 0$$

$$\therefore D_4 = -D_3 = -\frac{35}{9} \text{ (kN)}$$

以上をまとめると、

$$U_1 = -\frac{37}{3} \text{ (kN)}$$

$$D_3 = \frac{35}{9} \text{ (kN)}$$

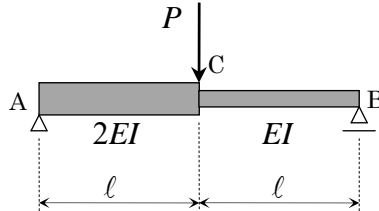
$$D_4 = -\frac{35}{9} \text{ (kN)}$$

$$L_2 = 10 \text{ (kN)}$$



【問題 EL-HSB-2】 下図に示すような“変断面単純ばり”の  $C$  点に集中荷重  $P$  が作用するとき、以下の設問に答えよ。ただし、 $A \sim C$  間の曲げ剛性は  $2EI$ 、 $C \sim B$  間の曲げ剛性は  $EI$  とする。

- (1)  $A$  点のたわみ角  $\theta_A$  と  $B$  点のたわみ角  $\theta_B$  を求めよ。
- (2)  $C$  点のたわみ角  $\theta_C$  とたわみ  $y_C$  を求めよ。
- (3) 最大のたわみ  $y_{\max}$  とその発生位置  $X$  ( $B$  点からの距離) を求めよ。



【解答】

まず、曲げモーメント図 ( $M$ -図) を描くと、右上図のようになる。

次に、境界条件を考慮して、“共役ばり”を作成し、これに“弾性荷重”を作用させると、右下図のようになる。

- (1) 右下図について、 $\alpha = \frac{Pl}{4EI}$  とおいて、支点反力  $\tilde{R}_A$ 、 $\tilde{R}_B$

を求めると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合から、

$$\tilde{R}_A + \tilde{R}_B = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot l + \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot l = \left(\frac{1}{2} + 1\right)\alpha l = \frac{3}{2}\alpha l$$

$B$  点回りのモーメントの釣合から、

$$\begin{aligned} \tilde{R}_A \cdot 2l &= \frac{1}{2}\alpha l \cdot \left(l + \frac{l}{3}\right) + \alpha l \cdot \frac{2}{3}l = \frac{1}{2}\alpha l \cdot \frac{4}{3}l + \frac{2}{3}\alpha l^2 \\ &= \frac{2}{3}\alpha l^2 + \frac{2}{3}\alpha l^2 = \frac{4}{3}\alpha l^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{R}_A = \frac{2}{3}\alpha l$$

$$\text{また、} \tilde{R}_B = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right)\alpha l = \frac{9-4}{6}\alpha l = \frac{5}{6}\alpha l$$

したがって、 $A$  点のたわみ角  $\theta_A$  と  $B$  点のたわみ角  $\theta_B$  は、次のようになる。

$$\theta_A = \tilde{Q}_A = \tilde{R}_A = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^2}{4EI} = \frac{1}{6} \cdot \frac{Pl^2}{EI} \qquad \theta_B = \tilde{Q}_B = -\tilde{R}_B = -\frac{5}{6} \cdot \frac{Pl^2}{4EI} = -\frac{5}{24} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$$

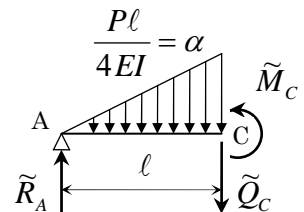
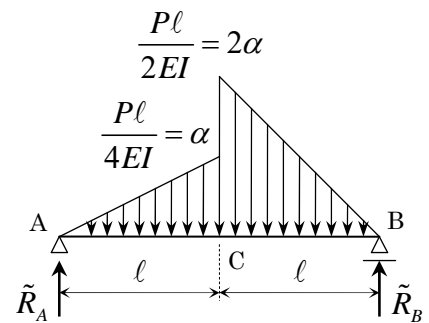
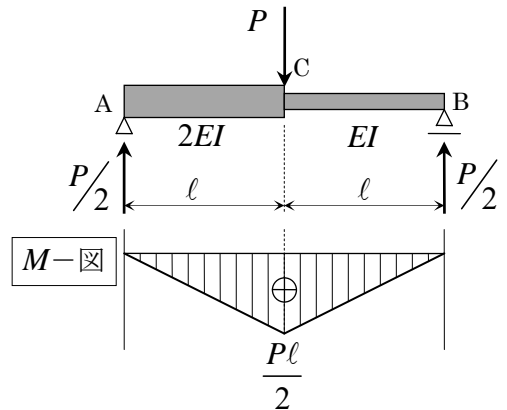
- (2)  $C$  点のたわみ角  $\theta_C$  とたわみ  $y_C$  は、右図について解いて、

$$\tilde{Q}_C + \frac{1}{2}\alpha l = \tilde{R}_A \qquad \therefore \tilde{Q}_C = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\alpha l = \frac{1}{6}\alpha l$$

$$\tilde{M}_C + \frac{1}{2}\alpha l \cdot \frac{l}{3} = \tilde{R}_A \cdot l \qquad \therefore \tilde{M}_C = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)\alpha l^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2$$

したがって、 $C$  点のたわみ角  $\theta_C$  とたわみ  $y_C$  は、次のようになる。

$$\theta_C = \tilde{Q}_C = \frac{1}{6} \cdot \frac{Pl^2}{4EI} = \frac{1}{24} \cdot \frac{Pl^2}{EI} \qquad y_C = \tilde{M}_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl^3}{4EI} = \frac{1}{8} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$



(3) 最大のたわみ  $y_{\max}$  とその発生位置  $X$  ( $B$  点からの距離) については、右図で考える。最大のたわみ  $y_{\max}$  が発生するのは、せん断力  $\tilde{Q}_x = 0$  となるときであるから、最大のたわみの発生位置  $X$  は、次のようになる。

$$\tilde{Q}_x + \tilde{R}_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha}{l} X \cdot X \quad \therefore \tilde{Q}_x + \frac{5}{6}\alpha l = \frac{\alpha}{l} X^2$$

ここで、 $\tilde{Q}_x = 0$  であるから、 $\frac{\alpha}{l} X^2 = \frac{5}{6}\alpha l$

$$\therefore X^2 = \frac{l}{\alpha} \cdot \frac{5}{6}\alpha l = \frac{5}{6}l^2 \quad \text{すなわち、} X > 0 \text{ より、} X = \frac{\sqrt{30}}{6}l$$

このとき、たわみ、すなわち、曲げモーメントは、次のようになる。

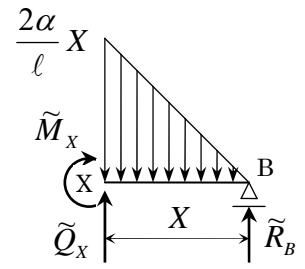
$$\tilde{M}_x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha}{l} \cdot \frac{\sqrt{30}}{6}l \cdot \frac{\sqrt{30}}{6}l \cdot \frac{X}{3} = \tilde{R}_B X \quad \therefore \tilde{M}_x + \frac{5}{6}\alpha l \cdot \frac{X}{3} = \frac{5}{6}\alpha l \cdot X$$

$$\therefore \tilde{M}_x = \frac{5}{6}\alpha l \cdot \frac{2}{3}X = \frac{5}{6}\alpha l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{30}}{6}l = \frac{5\sqrt{30}}{54}\alpha l^2$$

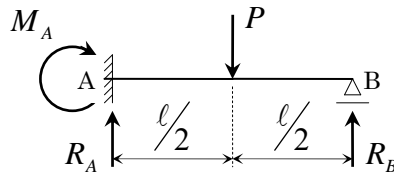
よって、最大のたわみ  $y_{\max}$  は、 $y_{\max} = \tilde{M}_x = \frac{5\sqrt{30}}{54}\alpha l^2 = \frac{5\sqrt{30}}{54} \cdot \frac{Pl^3}{4EI} = \frac{5\sqrt{30}}{216} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$

したがって、最大のたわみ  $y_{\max}$  とその発生位置  $X$  ( $B$  点からの距離) は、次のようになる。

$$X = \frac{\sqrt{30}}{6}l \text{ のとき、} \boxed{y_{\max} = \frac{5\sqrt{30}}{54}\alpha l^2 = \frac{5\sqrt{30}}{216} \cdot \frac{Pl^3}{EI}}$$



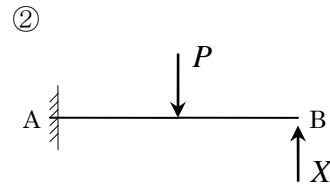
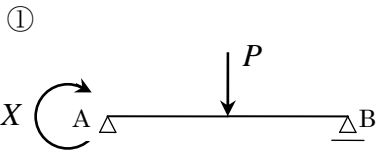
【問題 BD-N-3】 下図に示す“1次不静定ばり”の支点反力 $R_A$ 、 $M_A$ 、 $R_B$ と断面力図（ $Q$ -図、 $M$ -図）を求めよ。



ただし、曲げ剛性 $EI$ は一定とし、不静定力 $X$ を下図のように

- ①  $A$  点の支点曲げモーメント
- ②  $B$  点の支点反力

の2通りに選んで解け。



【解答①】

$A$  点の支点曲げモーメントを不静定力に選ぶと、右図のようになる。  
集中荷重 $P$ による $A$  点のたわみ角 $\theta_A^0$ は、教科書の表より、

$$\theta_A^0 = \frac{P\ell^2}{16EI}$$

不静定モーメント $X$ による $A$  点のたわみ角 $\theta_A^1$ は、教科書の表より、

$$\theta_A^1 = \frac{\ell}{6EI}(2M_A + M_B) = \frac{X\ell}{3EI} \quad (\because M_A = X, M_B = 0)$$

ここで、変位の適合条件より、 $\theta_A^0 + \theta_A^1 = 0$ だから、

$$\frac{P\ell^2}{16EI} + \frac{X\ell}{3EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{3}{16}P\ell = M_A$$

これを用いて、支点反力 $R_A$ 、 $R_B$ を求めると、次のようになる。

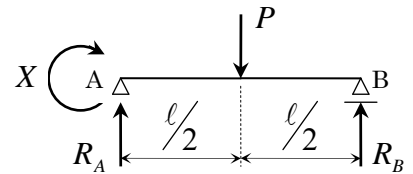
$$R_A \cdot \ell + X = P \cdot \frac{\ell}{2} \quad \therefore R_A = \frac{1}{2}P - \frac{X}{\ell} = \frac{1}{2}P + \frac{3}{16}P = \frac{11}{16}P$$

$$R_B \cdot \ell = X + P \cdot \frac{\ell}{2} \quad \therefore R_B = \frac{1}{2}P + \frac{X}{\ell} = \frac{1}{2}P - \frac{3}{16}P = \frac{5}{16}P$$

以上をまとめると、支点反力 $R_A$ 、 $M_A$ 、 $R_B$ は次のようになる。

$$\boxed{R_A = \frac{11}{16}P, \quad M_A = -\frac{3}{16}P\ell, \quad R_B = \frac{5}{16}P}$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。（次頁参照）



【解答②】

B 点の支点反力を不静定力に選ぶと、右図のようになる。  
 集中荷重  $P$  による B 点のたわみ  $y_B^0$  は、教科書の表より、

$$y_B^0 = \frac{Pa^3}{6EI} \left( 3\frac{\ell}{a} - 1 \right) = \frac{P \left( \frac{\ell}{2} \right)^3}{6EI} (6-1) = \frac{5P\ell^3}{48EI} \quad \left( \because a = \frac{\ell}{2} \right)$$

不静定力  $X$  による B 点のたわみ  $y_B^1$  は、教科書の表より、

$$y_B^1 = -\frac{X\ell^3}{3EI}$$

ここで、変位の適合条件より、 $y_B^0 + y_B^1 = 0$  だから、

$$\frac{5P\ell^3}{48EI} - \frac{X\ell^3}{3EI} = 0 \quad \therefore X = \frac{5}{16}P = R_B$$

これを用いて、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$  を求めると、次のようになる。

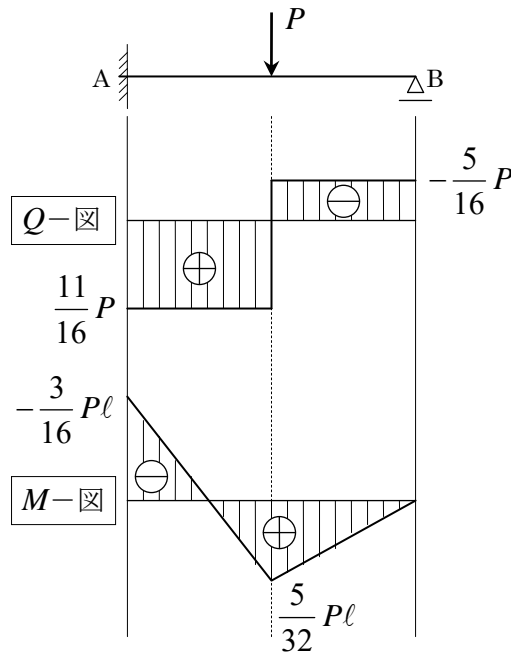
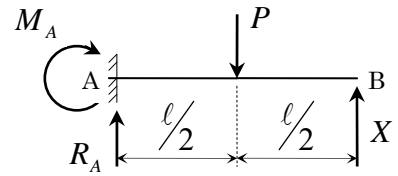
$$R_A + X = P \quad \therefore R_A = P - X = P - \frac{5}{16}P = \frac{11}{16}P$$

$$M_A + P \cdot \frac{\ell}{2} = X \cdot \ell \quad \therefore M_A = X \cdot \ell - \frac{1}{2}P\ell = \frac{5}{16}P\ell - \frac{1}{2}P\ell = -\frac{3}{16}P\ell$$

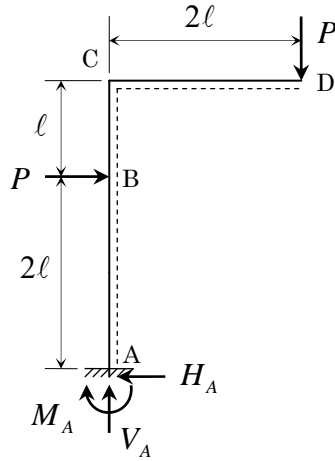
以上をまとめると、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  は次のようになる。

$$R_A = \frac{11}{16}P, \quad M_A = -\frac{3}{16}P\ell, \quad R_B = \frac{5}{16}P$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。



【問題 SF-R-1】 下図のような静定ラーメンの断面力図を図示せよ。



【解答】

まず、支点反力  $H_A$ ,  $V_A$ ,  $M_A$  を求める。

水平方向の力の釣合から、  $H_A = P$

鉛直方向の力の釣合から、  $V_A = P$

A 点回りのモーメントの釣合から、  $M_A + P \times 2l + P \times 2l = 0$

$$\therefore M_A = -4Pl$$

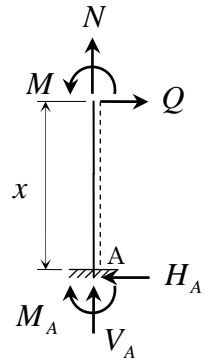
次に、断面力  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  を以下のように3つに分けて求める。

1) A~B 間

$$N + V_A = 0 \quad \therefore N = -V_A = -P$$

$$Q = H_A = P$$

$$M = M_A + H_A x \quad \therefore M = -4Pl + Px = P \cdot (x - 4l)$$



2) B~C 間

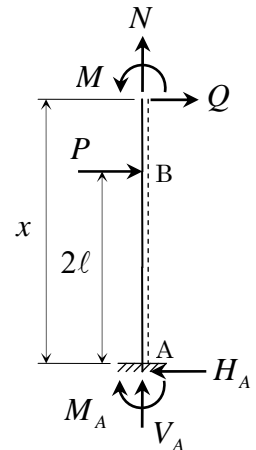
$$N + V_A = 0 \quad \therefore N = -V_A = -P$$

$$Q + P = H_A \quad \therefore Q = 0$$

$$M + P \cdot (x - 2l) = M_A + H_A x$$

$$\therefore M = -P \cdot (x - 2l) - 4Pl + Px$$

$$= -Px + 2Pl - 4Pl + Px = -2Pl$$



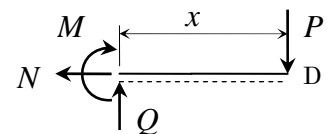
3) C~D 間

$$N = 0$$

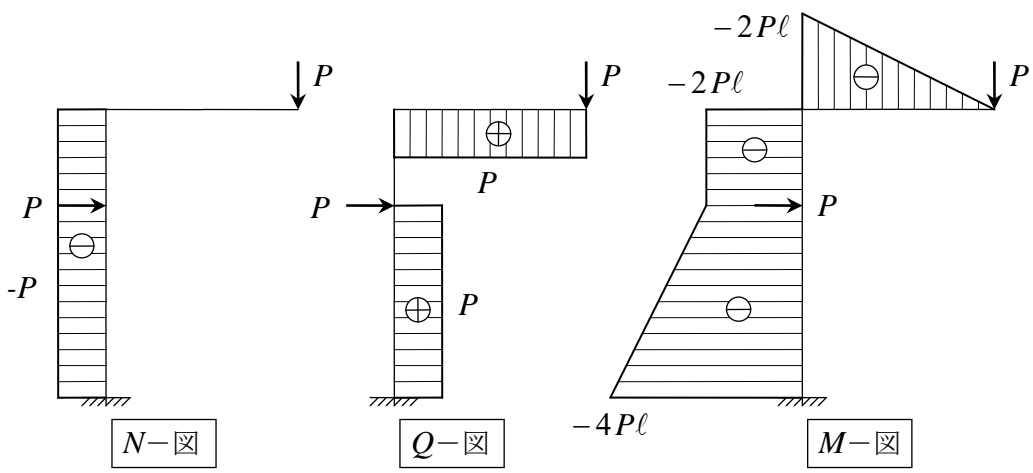
$$Q = P$$

$$M + Px = 0$$

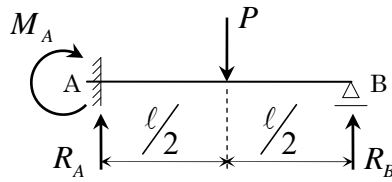
$$\therefore M = -Px$$



以上をまとめて、図示すると下図のようになる。

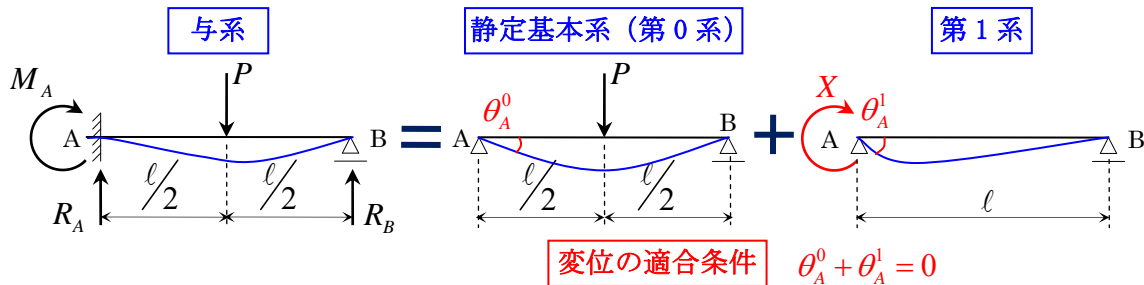


【問題 BD-N-3】 下図に示す“1次不静定ばり”の支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  と断面力図 ( $Q$ -図,  $M$ -図) を求めよ。

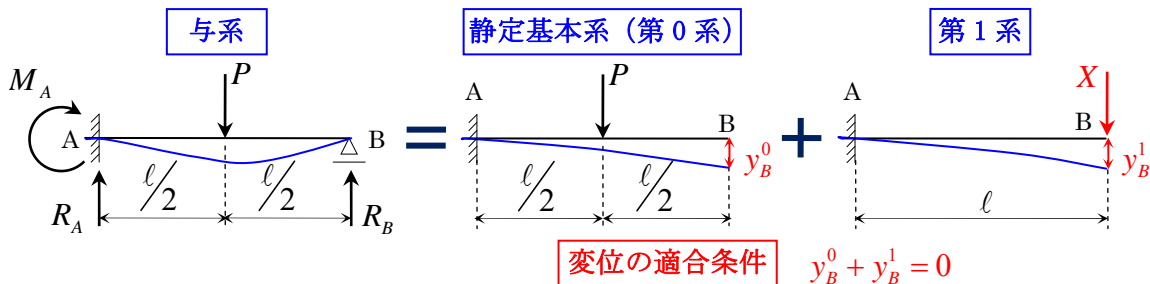


ただし、曲げ剛性  $EI$  は一定とし、不静定力  $X$  を①, ②のように2通り選んで解け。

① A 点の支点曲げモーメント  $\rightarrow$  静定基本系を「単純ばり」とする。



② B 点の支点反力  $\rightarrow$  静定基本系を「片持ばり」とする。



なお、“変位”を求めるには、《変形の公式を用いる方法》と《弾性荷重法を用いる方法》の2つの方法がある。下表は、資料「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」からの抜粋である。

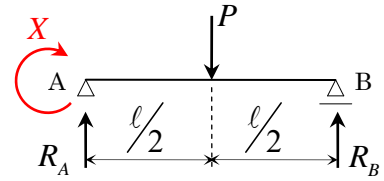
	荷重状態	特定点のたわみ角
単純ばり ②		$\theta_A = -\theta_B = \frac{Pl^2}{16EI}$
単純ばり ⑦		$\theta_A = \frac{l}{6EI}(2M_A + M_B)$ $\theta_B = \frac{-l}{6EI}(M_A + 2M_B)$
	荷重状態	特定点のたわみ
片持ばり ③		$y_{\max} = y_B = \frac{Pa^3}{6EI} \left( 3\frac{l}{a} - 1 \right)$
片持ばり ②		$y_{\max} = y_B = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$

《変形の公式を用いる方法》

【解答①】 (特定点のたわみ角の式を用いる)

A 点の支点曲げモーメントを不静定力に選ぶと、右図のようになる。  
集中荷重  $P$  による A 点のたわみ角  $\theta_A^0$  は、「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」(単純ばり②) より、

$$\theta_A^0 = \frac{Pl^2}{16EI}$$



不静定モーメント  $X$  による A 点のたわみ角  $\theta_A^1$  は、「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」(単純ばり⑦) において  $M_A = X, M_B = 0$  とおくことにより、

$$\theta_A^1 = \frac{l}{6EI}(2M_A + M_B) = \frac{Xl}{3EI}$$

ここで、変位の適合条件より、 $\theta_A^0 + \theta_A^1 = 0$  だから、

$$\frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Xl}{3EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{3}{16}Pl = M_A$$

これを用いて、支点反力  $R_A, R_B$  を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} R_A \cdot l + X &= P \cdot \frac{l}{2} & \therefore R_A &= \frac{1}{2}P - \frac{X}{l} = \frac{1}{2}P + \frac{3}{16}P = \frac{11}{16}P \\ R_B \cdot l &= X + P \cdot \frac{l}{2} & \therefore R_B &= \frac{1}{2}P + \frac{X}{l} = \frac{1}{2}P - \frac{3}{16}P = \frac{5}{16}P \end{aligned}$$

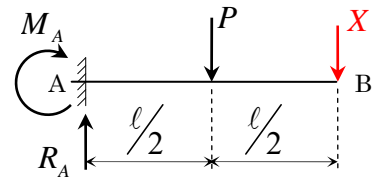
以上をまとめると、支点反力  $R_A, M_A, R_B$  は次のようになる。

$$R_A = \frac{11}{16}P, \quad M_A = -\frac{3}{16}Pl, \quad R_B = \frac{5}{16}P$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。(次頁参照)

【解答②】 (特定点のたわみの式を用いる)

B 点の支点反力を不静定力に選ぶと、右図のようになる。  
集中荷重  $P$  による B 点のたわみ  $y_B^0$  は、「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」(片持ばり③) において  $a = \frac{l}{2}$  とおくことにより、



$$y_B^0 = \frac{Pa^3}{6EI} \left( 3\frac{l}{a} - 1 \right) = \frac{P \left( \frac{l}{2} \right)^3}{6EI} \left\{ 3 \left( \frac{l}{\frac{l}{2}} \right) - 1 \right\} = \frac{Pl^3}{48EI} (6-1) = \frac{5Pl^3}{48EI}$$

不静定力  $X$  による B 点のたわみ  $y_B^1$  は、「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」(片持ばり②) において  $P = X$  とおくことにより、

$$y_B^1 = \frac{Xl^3}{3EI}$$

ここで、変位の適合条件より、 $y_B^0 + y_B^1 = 0$  だから、

$$\frac{5Pl^3}{48EI} + \frac{Xl^3}{3EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{5}{16}P = -R_B$$

これを用いて、支点反力  $R_A, M_A$  を求めると、次のようになる。

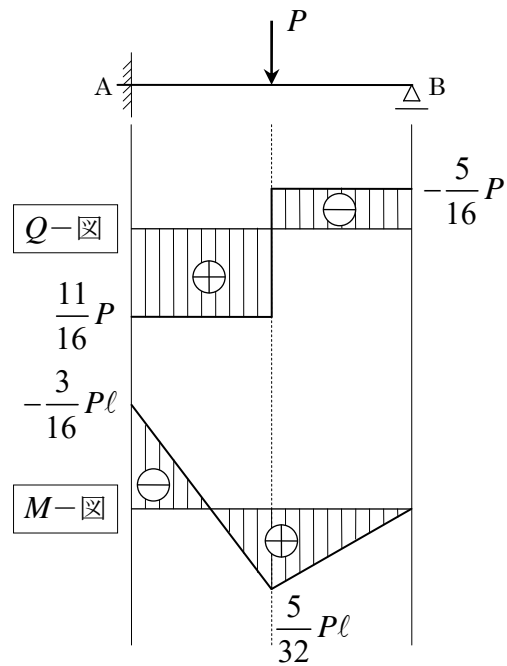
$$\begin{aligned} R_A &= P + X & \therefore R_A &= P - \frac{5}{16}P = \frac{11}{16}P \\ M_A + P \cdot \frac{l}{2} + X \cdot l &= 0 & \therefore M_A &= -\frac{1}{2}Pl - \left( -\frac{5}{16}P \right) \cdot l = -\frac{3}{16}Pl \end{aligned}$$



以上をまとめると、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  は次のようになる。

$$R_A = \frac{11}{16}P, \quad M_A = -\frac{3}{16}Pl, \quad R_B = \frac{5}{16}P$$

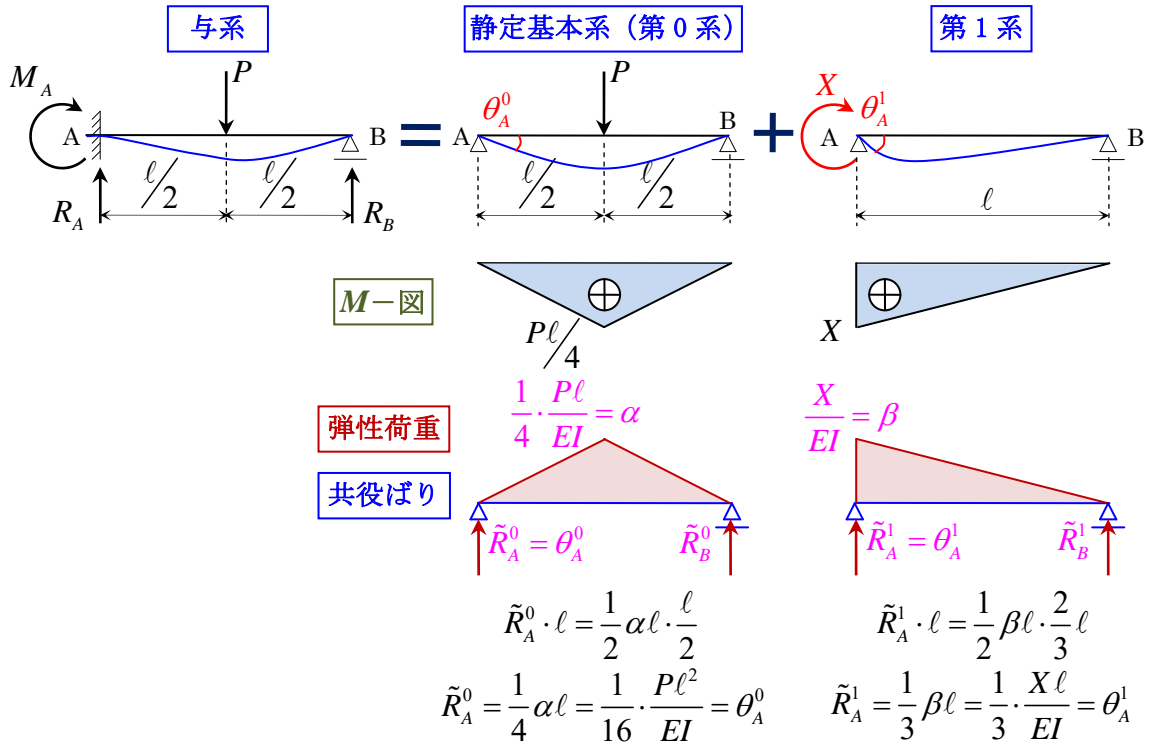
これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。



《弾性荷重法を用いる方法》

【解答①】

下図に示すように、「弾性荷重法」を用いて、「変形の公式を用いる方法」で利用した「単純ばりのA点のたわみ角」を求め、「変位の適合条件」より不静定力  $X = M_A$  を求める。



変位の適合条件  $\theta_A^0 + \theta_A^1 = 0$

$$\theta_A^0 + \theta_A^1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{Pl^2}{EI} + \frac{1}{3} \cdot \frac{Xl}{EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{3}{16} Pl = M_A$$

得られた不静定力  $X = M_A$  を用いて、支点反力  $R_A$ ,  $R_B$  を求めると、次のようになる。

$$R_A \cdot l + X = P \cdot \frac{l}{2} \quad \therefore R_A = \frac{1}{2} P - \frac{X}{l} = \frac{1}{2} P + \frac{3}{16} P = \frac{11}{16} P$$

$$R_B \cdot l = X + P \cdot \frac{l}{2} \quad \therefore R_B = \frac{1}{2} P + \frac{X}{l} = \frac{1}{2} P - \frac{3}{16} P = \frac{5}{16} P$$

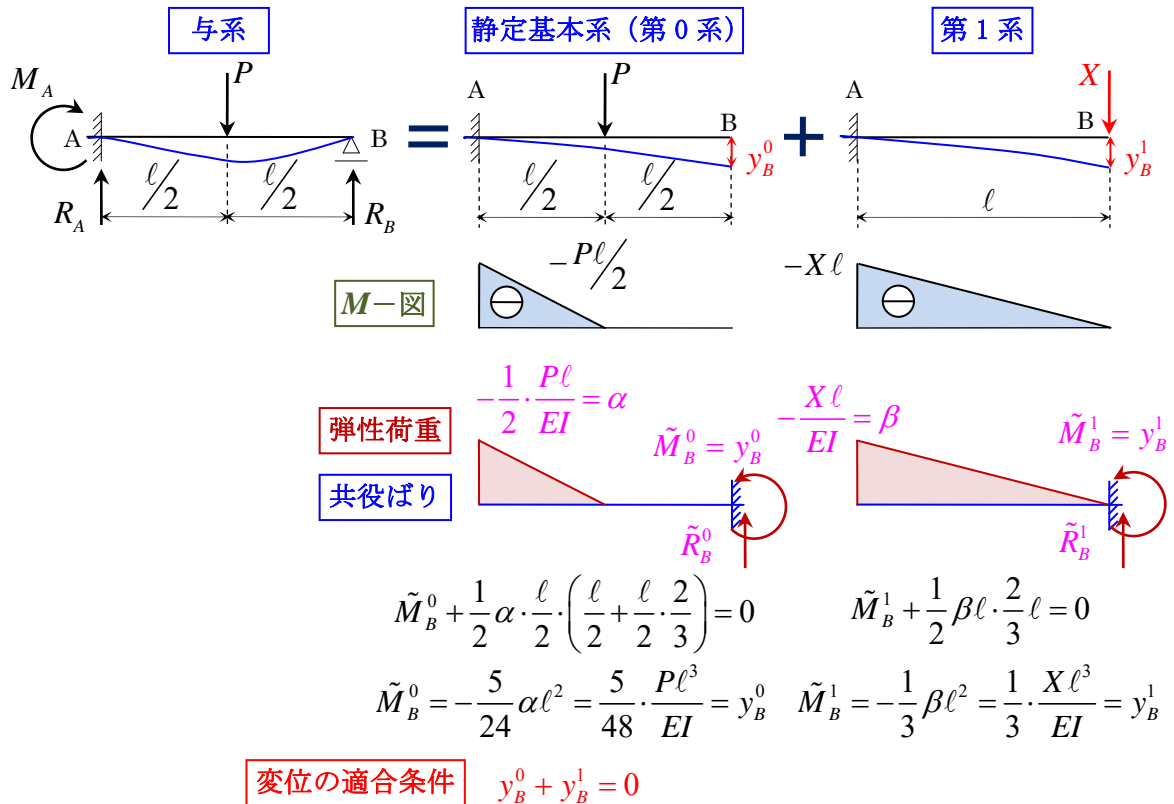
以上をまとめると、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  は次のようになる。

$$R_A = \frac{11}{16} P, \quad M_A = -\frac{3}{16} Pl, \quad R_B = \frac{5}{16} P$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。(前頁参照)

【解答②】

下図に示すように、「弾性荷重法」を用いて、「変形の公式を用いる方法」で利用した「片持ばりのB点のたわみ」を求め、「変位の適合条件」より不静定力  $X = -R_B$  を求める。



$$y_B^0 + y_B^1 = \frac{5}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EI} + \frac{1}{3} \cdot \frac{Xl^3}{EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{5}{16}P = -R_B$$

得られた不静定力  $X = -R_B$  を用いて、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$  を求めると、次のようになる。

$$R_A = P + X \quad \therefore R_A = P - \frac{5}{16}P = \frac{11}{16}P$$

$$M_A + P \cdot \frac{l}{2} + X \cdot l = 0 \quad \therefore M_A = -\frac{1}{2}Pl - \left( -\frac{5}{16}P \right) \cdot l = -\frac{3}{16}Pl$$

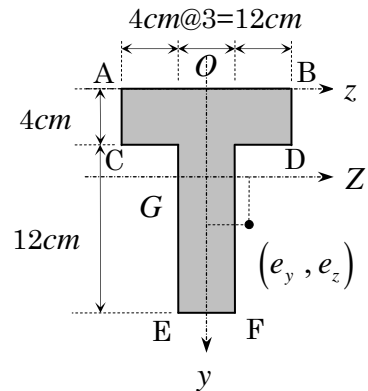
以上をまとめると、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  は次のようになる。

$$R_A = \frac{11}{16}P, \quad M_A = -\frac{3}{16}Pl, \quad R_B = \frac{5}{16}P$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。(前々頁参照)

【5】右図に示すT型断面の『断面の核』を以下の手順で求め、図示せよ。

- (1)  $O$ - $y, z$ 座標系において、T型断面の重心  $G(Y_G, 0)$  を求めよ。
- (2) 重心  $G$  を通る  $y, Z$  軸に関する断面2次モーメント  $I_y, I_z$  を求めよ。
- (3) 『断面の核』を斜線で図示せよ。



【解答】

『断面の核』を求めるためには、重心  $G$  を通る主軸を求める必要がある。

そこで、まず、T型断面の重心  $G$  を求める。このとき、右図に示すT型断面は、 $y$  軸に関して対称であるから、その重心  $G$  は、 $y, z$  座標系において  $(Y_G, 0)$  と表され、次の表から求められる。

	幅 $b_i$	高さ $h_i$	面積 $A_i$	重心 $y_{Gi}$	$G_i$	$A_i \cdot y^2$	$I_{Gi}$
I	12	4	48	2	96	768	64
II	4	12	48	10	480	768	576
計			96		576	1536	640

ここで、表中の記号は、 $G_i = A_i \cdot y_{Gi}$ ,  $A_i \cdot y^2 = A_i \cdot (y_{Gi} - Y_G)^2$ ,  $I_{Gi} = \frac{b_i h_i^3}{12}$  を意味する。

$$\therefore Y_G = \frac{G}{A} = \frac{576}{96} = 6 \text{ (cm)} \quad \text{したがって、} G(Y_G, 0) = (6, 0)$$

次に、右図に示した重心  $G$  を通る  $y, Z$  軸は主軸となるから、 $y, Z$  軸に関する断面2次モーメント  $I_y, I_z$  は、次のようになる。

$$I_z = A_i \cdot (y_{Gi} - Y_G)^2 + I_{Gi} = 1536 + 640 = 2176 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$I_y = \frac{4 \times 12^3}{12} + \frac{12 \times 4^3}{12} = 576 + 64 = 640 \text{ (cm}^4\text{)}$$

また、断面積  $A$  は、 $A = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$  だから、 $y, Z$  軸に関する回転半径をそれぞれ  $r_y, r_z$  とすると、

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{640}{96} = \frac{20}{3} \cong 6.67 \text{ (cm}^2\text{)} \quad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{2176}{96} = \frac{68}{3} \cong 22.67 \text{ (cm}^2\text{)}$$

ここで、載荷荷重の偏心位置を  $(e_y, e_z)$  とすると、中立軸は、 $1 + \frac{e_y}{r_z^2} y + \frac{e_z}{r_y^2} z = 0$  と表され、

中立軸が  $y, Z$  軸と交わる点すなわち切片  $n_y, n_z$  は、次のようになる。

$$n_y = -\frac{r_z^2}{e_y}, \quad n_z = -\frac{r_y^2}{e_z} \quad \text{逆に、} \quad e_y = -\frac{r_z^2}{n_y}, \quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z}$$

よって、『断面の核』の端の位置を決めるためには、中立軸が次の4通り(6通り)の限界位置にある場合について、載荷荷重の偏心位置  $(e_y, e_z)$  を求めればよい。

(1) 直線  $AB$  が中立軸になるとき、即ち、 $y = -6 \text{ (cm)}$  のとき、切片は、 $n_y = -6, n_z = \infty$  となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{68/3}{-6} = \frac{34}{9} \cong 3.78 \text{ (cm)} \quad \therefore K(e_y, e_z) = \left( \frac{34}{9}, 0 \right) \cong (3.78, 0)$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{20/3}{\infty} = 0 \text{ (cm)}$$

(2) 直線  $AC$  または直線  $BD$  が中立軸になるとき、即ち、 $Z = \pm 6 \text{ (cm)}$  のとき、切片は、 $n_y = \infty, n_z = \pm 6$  となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{68/3}{\infty} = 0 \text{ (cm)}$$

$$\therefore L(e_y, e_z) = \left(0, \mp \frac{10}{9}\right) \cong (0, \mp 1.11)$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{20/3}{\pm 6} = \mp \frac{10}{9} \cong \mp 1.11 \text{ (cm)}$$

(3) 直線 CE または直線 DF が中立軸になるとき、

$$C(Z, y) = C(-6, -2), E(-2, 10) \text{ だから、直線 CE は、 } y - 10 = \frac{-2 - 10}{-6 - (-2)}(Z + 2) \text{ 即ち、 } y = 3Z + 16$$

で表され、切片  $n_y$  は、 $Z = 0$  として、 $n_y = 16 \text{ (cm)}$ 、切片  $n_z$  は、 $y = 0$  として、 $n_z = -\frac{16}{3} \text{ (cm)}$

$$\text{また、 } D(Z, y) = D(6, -2), F(2, 10) \text{ だから、直線 DF は、 } y - 10 = \frac{-2 - 10}{6 - 2}(Z - 2) \text{ 即ち、 } y = -3Z + 16$$

で表され、切片  $n_y$  は、 $Z = 0$  として、 $n_y = 16 \text{ (cm)}$ 、切片  $n_z$  は、 $y = 0$  として、 $n_z = \frac{16}{3} \text{ (cm)}$

したがって、切片は、 $n_y = 16$ 、 $n_z = \mp \frac{16}{3}$  となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{68/3}{16} = -\frac{68}{48} = -\frac{17}{12} \cong -1.42 \text{ (cm)}$$

$$\therefore M(e_y, e_z) = \left(-\frac{17}{12}, \pm \frac{5}{4}\right) \cong (-1.42, \pm 1.25)$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{20/3}{\mp 16/3} = \pm \frac{20}{16} = \pm \frac{5}{4} = \pm 1.25 \text{ (cm)}$$

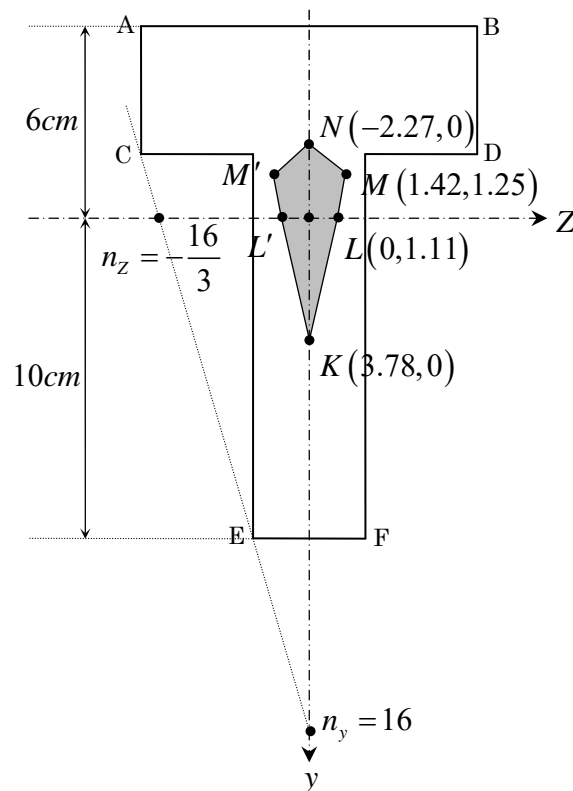
(4) 直線 EF が中立軸になるとき、即ち、 $y = 10 \text{ (cm)}$  のとき、切片は、 $n_y = 10$ 、 $n_z = \infty$  となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{68/3}{10} = -\frac{34}{15} \cong -2.27 \text{ (cm)}$$

$$\therefore N(e_y, e_z) = \left(-\frac{34}{15}, 0\right) \cong (-2.27, 0)$$

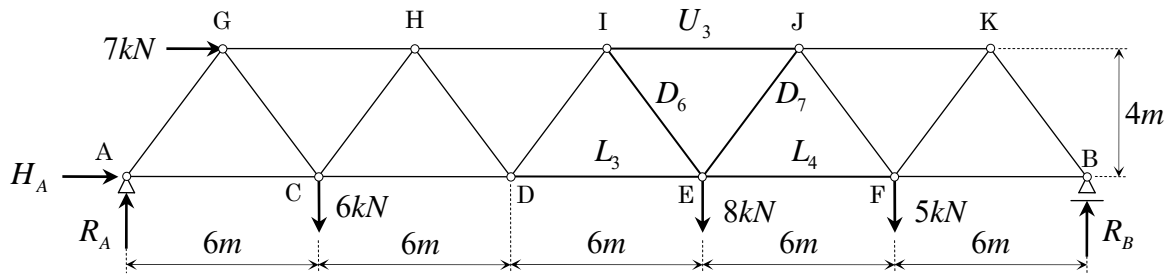
$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{20/3}{\infty} = 0 \text{ (cm)}$$

以上をまとめて、「断面の核」を塗りつぶして図示すると下図のようになる。



【問題 SF-T-2】 下図に示す静定ワーレントラスについて、以下の設問に答えよ。

- (1) 支点反力  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$  を求めよ。  
 (2) 部材力  $U_3$ ,  $D_6$ ,  $D_7$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  を求めよ。



【解答】

(1) 支点反力  $H_A$ ,  $R_A$ ,  $R_B$  を求めると、

水平方向の力の釣合から、  $H_A + 7 = 0 \quad \therefore H_A = -7 \text{ (kN)}$

鉛直方向の力の釣合から、  $R_A + R_B = 6 + 8 + 5 = 19$

A 点回りのモーメントの釣合から、

$$R_B \times 30m = 6kN \times 6m + 8kN \times 18m + 5kN \times 24m + 7kN \times 4m$$

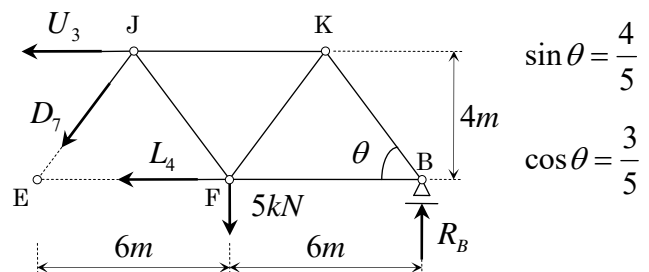
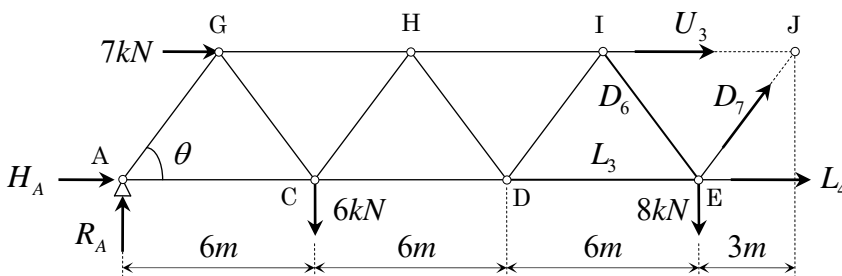
$$= 36 + 144 + 120 + 28 = 328$$

$$\therefore R_B = \frac{328}{30} = \frac{164}{15} \text{ (kN)} \quad \text{よって、} R_A = \frac{121}{15} \text{ (kN)}$$

以上をまとめると、  $R_A = \frac{121}{15} \text{ (kN)}$ ,  $H_A = -7 \text{ (kN)}$ ,  $R_B = \frac{164}{15} \text{ (kN)}$

(2) 部材力は、“断面法（切断法）”を基本として求める。

このため、下図に示すように  $t-t$  で切断して、左自由体と右自由体それぞれについて考える。



$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

[左自由体について]

水平方向の力の釣合から、

$$H_A + 7 + U_3 + D_7 \cos \theta + L_4 = 0$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$D_7 \sin \theta + R_A = 6 + 8$$

[右自由体について]

$$U_3 + D_7 \cos \theta + L_4 = 0$$

$$D_7 \sin \theta + 5 = R_B$$

$$\therefore \frac{4}{5}D_7 = 14 - \frac{121}{15} = \frac{89}{15}$$

$$\therefore D_7 = \frac{89}{15} \cdot \frac{5}{4} = \frac{89}{12} \text{ (kN)}$$

$J$  点回りのモーメントの釣合から、

$$4L_4 + 4H_A + 6kN \times 15m + 8kN \times 3m = R_A \times 21m$$

$$\therefore 4L_4 - 28 + 90 + 24 = \frac{121}{15} \cdot 21 = \frac{847}{5}$$

$$\therefore 4L_4 = \frac{847}{5} - 86 = \frac{847 - 430}{5} = \frac{417}{5}$$

$$\therefore L_4 = \frac{417}{20} \text{ (kN)}$$

$E$  点回りのモーメントの釣合から、

$$4U_3 + 7kN \times 4m + R_A \times 18m = 6kN \times 12m$$

$$\therefore 4U_3 + 28 + \frac{121}{15} \cdot 18 = 72$$

$$\therefore 4U_3 = 72 - \frac{726}{5} - 28 = 44 - \frac{726}{5}$$

$$= \frac{220 - 726}{5} = -\frac{506}{5}$$

$$\therefore U_3 = -\frac{506}{20} = -\frac{253}{10} \text{ (kN)}$$

$$\therefore \frac{4}{5}D_7 = \frac{164}{15} - 5 = \frac{89}{15}$$

$$4L_4 + 5kN \times 3m = R_B \times 9m$$

$$\therefore 4L_4 + 15 = \frac{164}{15} \cdot 9 = \frac{492}{5}$$

$$\therefore 4L_4 = \frac{492}{5} - 15 = \frac{492 - 75}{5} = \frac{417}{5}$$

$$4U_3 + R_B \times 12m = 5kN \times 6m$$

$$\therefore 4U_3 + \frac{164}{15} \cdot 12 = 30$$

$$\therefore 4U_3 = 30 - \frac{656}{5}$$

$$= \frac{150 - 656}{5} = -\frac{506}{5}$$

次に、 $E$  点での力の釣合を考えると、

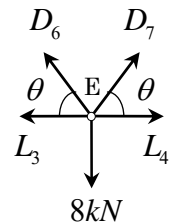
鉛直方向の力の釣合から、  $D_6 \sin \theta + D_7 \sin \theta = 8$

$$\therefore \frac{4}{5}(D_6 + D_7) = 8 \quad \therefore D_6 + D_7 = 10$$

$$\therefore D_6 = 10 - D_7 = 10 - \frac{89}{12} = \frac{120 - 89}{12} = \frac{31}{12} \text{ (kN)}$$

水平方向の力の釣合から、  $L_3 + D_6 \cos \theta = L_4 + D_7 \cos \theta$

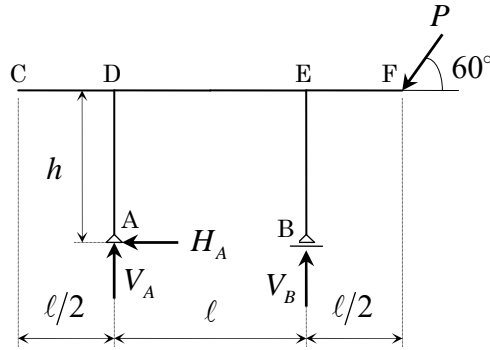
$$\therefore L_3 = L_4 + \frac{3}{5}(D_7 - D_6) = \frac{417}{20} + \frac{3}{5}\left(\frac{89}{12} - \frac{31}{12}\right) = \frac{417}{20} + \frac{3}{5} \cdot \frac{68}{12} = \frac{417}{20} + \frac{68}{20} = \frac{485}{20} = \frac{95}{4} \text{ (kN)}$$



以上をまとめると、

$$\boxed{U_3 = -\frac{253}{10} \text{ (kN)}}, \quad \boxed{D_6 = \frac{31}{12} \text{ (kN)}}, \quad \boxed{D_7 = \frac{89}{12} \text{ (kN)}}, \quad \boxed{L_3 = \frac{95}{4} \text{ (kN)}}, \quad \boxed{L_4 = \frac{417}{20} \text{ (kN)}}$$

【問題 SF-R-2】 下図に示す静定ラーメンの断面力図、すなわち、軸方向力図 ( $N$ -図), せん断力図 ( $Q$ -図), 曲げモーメント図 ( $M$ -図) を図示せよ。



【解答】

荷重  $P$  を鉛直方向と水平方向に分解すると、

$$\text{鉛直荷重} \quad P \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} P$$

$$\text{水平荷重} \quad P \cos 60^\circ = \frac{1}{2} P$$

となり、右図のようになる。

このとき、支点反力  $V_A$ ,  $H_A$ ,  $V_B$  を剛体の釣合条件より求めると、次のようになる。

$$\text{水平方向の力の釣合から、} \quad H_A + \frac{1}{2} P = 0 \quad \therefore H_A = -\frac{1}{2} P$$

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} \quad V_A + V_B = \frac{\sqrt{3}}{2} P$$

$$A \text{ 点回りのモーメントの釣合から、} \quad V_B \cdot \ell + \frac{1}{2} P \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{2} P \cdot \left( \ell + \frac{\ell}{2} \right)$$

$$\therefore V_B = \frac{3\sqrt{3}}{4} P - \frac{1}{2} P \cdot \frac{h}{\ell} = \frac{P}{2} \cdot \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{\ell} \right) \quad \therefore V_A = \frac{P}{2} \cdot \left( \frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

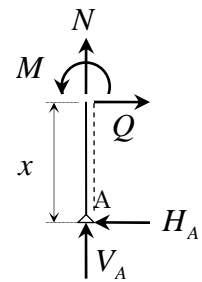
これらを用いて、部材  $AD$ ,  $BE$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$  毎に断面力  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  を求めて行く。

部材  $AD$  について、

$$N + V_A = 0 \quad \therefore N = -V_A = -\frac{P}{2} \cdot \left( \frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$Q = H_A = -\frac{1}{2} P$$

$$M = H_A x = -\frac{1}{2} P x$$

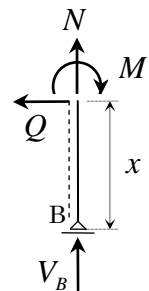


部材  $BE$  について、

$$N + V_B = 0 \quad \therefore N = -V_B = -\frac{P}{2} \cdot \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{\ell} \right)$$

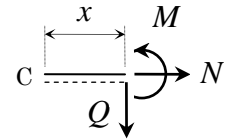
$$Q = 0$$

$$M = 0$$





部材  $CD$  について、  
 $N = Q = M = 0$

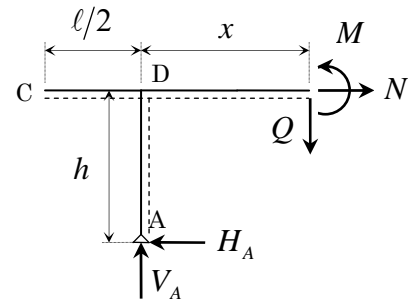


部材  $DE$  について、

$$N = H_A = -\frac{1}{2}P$$

$$Q = V_A = \frac{P}{2} \cdot \left( \frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$M = V_A x + H_A h = \frac{P}{2} \cdot \left( \frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot x - \frac{1}{2}Ph$$

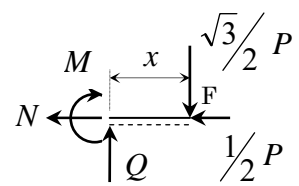


部材  $EF$  について、

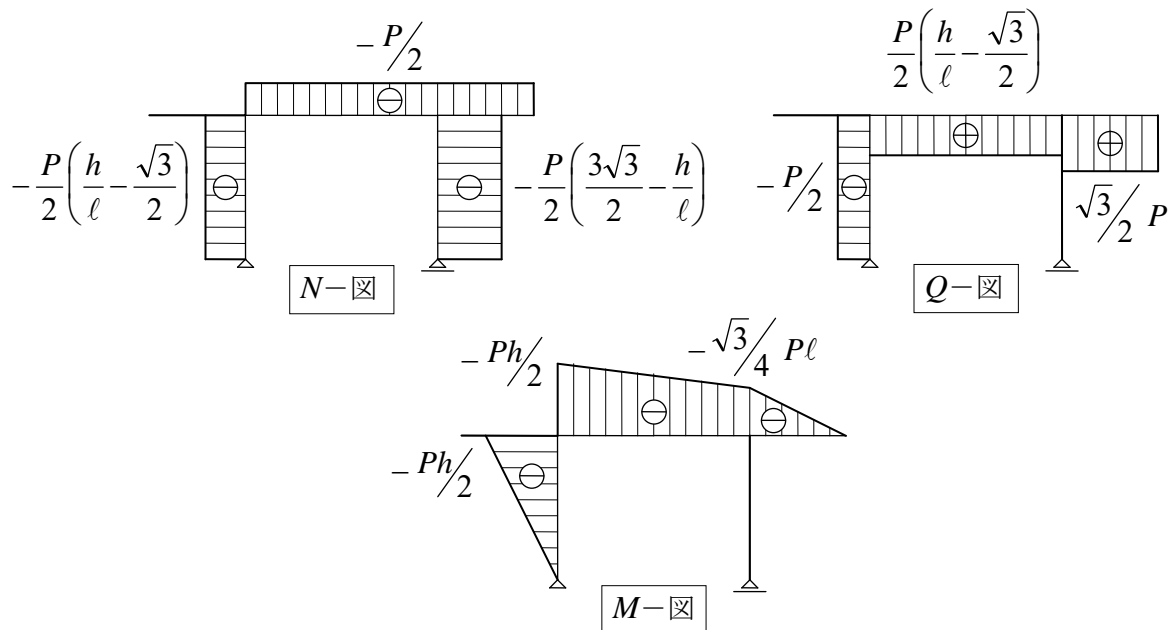
$$N + \frac{1}{2}P = 0 \quad \therefore N = -\frac{1}{2}P$$

$$Q = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

$$M + \frac{\sqrt{3}}{2}Px = 0 \quad \therefore M = -\frac{\sqrt{3}}{2}Px$$



以上をまとめて、断面力図を図示すると下図のようになる。



【3】下図-Aに示す静定トラスについて、次の設問に答えよ。

- (1) 支点反力  $H_A$ ,  $V_A$ ,  $H_B$  を求めよ。
- (2) すべての部材力  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $L$  を求めよ。
- (3) 荷重  $P$  を漸次増加するとき、最初に座屈を起こす荷重  $P_{CR}$  とその部材を求めよ。

なお、各部材は、ヤング係数  $E$  で、その断面は下図-Bに示すような中空長方形断面とする。

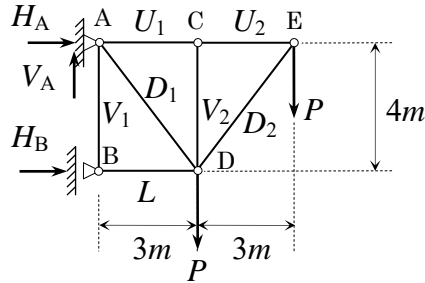


図-A

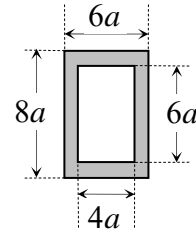


図-B

【解答】

- (1) 水平方向の力の釣合から、 $H_A + H_B = 0$

鉛直方向の力の釣合から、 $V_A = P + P = 2P$

A点回りのモーメントの釣り合いから、 $H_B \times 4m = P \times 6m + P \times 3m$

$$\therefore H_B = \frac{9}{4}P \text{ また、 } H_A = -\frac{9}{4}P \quad \text{以上をまとめると、} \quad \boxed{H_A = -\frac{9}{4}P}, \quad \boxed{V_A = 2P}, \quad \boxed{H_B = \frac{9}{4}P}$$

- (2) “節点法”を用いて、各部材力を求めると、次のようになる。

①E点について、 $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \theta = \frac{3}{5}$  だから、

$$\begin{aligned} \text{鉛直方向の力の釣合から、} & P + D_2 \sin \theta = 0 & \therefore D_2 = -\frac{P}{\sin \theta} = -\frac{5}{4}P \\ \text{水平方向の力の釣合から、} & U_2 + D_2 \cos \theta = 0 & \therefore U_2 = -D_2 \cos \theta = \frac{5}{4}P \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{4}P \end{aligned}$$

②C点について、

$$\begin{aligned} \text{鉛直方向の力の釣合から、} & V_2 = 0 \\ \text{水平方向の力の釣合から、} & U_1 = U_2 = \frac{3}{4}P \end{aligned}$$

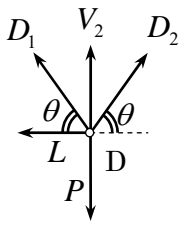
③B点について、

$$\begin{aligned} \text{鉛直方向の力の釣合から、} & V_1 = 0 \\ \text{水平方向の力の釣合から、} & H_B + L = 0 \quad \therefore L = -H_B = -\frac{9}{4}P \end{aligned}$$

④A点について、

$$\begin{aligned} \text{鉛直方向の力の釣合から、} & V_1 + D_1 \sin \theta = V_A \\ \therefore D_1 = \frac{V_A - V_1}{\sin \theta} & = \frac{5}{4} \cdot 2P = \frac{5}{2}P \\ \text{水平方向の力の釣合から、} & U_1 + H_A + D_1 \cos \theta = 0 \\ U_1 + H_A + D_1 \cos \theta & = \frac{3}{4}P - \frac{9}{4}P + \frac{5}{2}P \cdot \frac{3}{5} = -\frac{6}{4}P + \frac{3}{2}P = 0 \quad (\text{check O.K.}) \end{aligned}$$

⑤D点について、



鉛直方向の力の釣合から、 $D_1 \sin \theta + D_2 \sin \theta + V_2 = P$

$$D_1 \sin \theta + D_2 \sin \theta + V_2 = \frac{5}{2}P \cdot \frac{4}{5} - \frac{5}{4}P \cdot \frac{4}{5} = 2P - P = P \quad (\text{check O.K.})$$

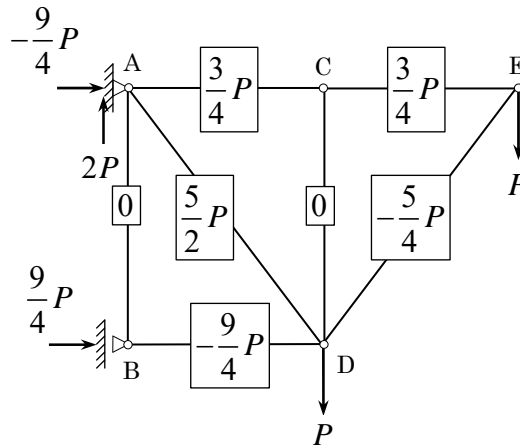
水平方向の力の釣合から、 $L + D_1 \cos \theta = D_2 \cos \theta$

$$L + D_1 \cos \theta = -\frac{9}{4}P + \frac{5}{2}P \cdot \frac{3}{5} = -\frac{9}{4}P + \frac{3}{2}P = \frac{-9+6}{4}P = -\frac{3}{4}P$$

$$D_2 \cos \theta = -\frac{5}{4}P \cdot \frac{3}{5} = -\frac{3}{4}P \quad (\text{check O.K.})$$

以上をまとめると、

$$\boxed{U_1 = U_2 = \frac{3}{4}P}, \quad \boxed{D_1 = \frac{5}{2}P}, \quad \boxed{D_2 = -\frac{5}{4}P}, \quad \boxed{V_1 = V_2 = 0}, \quad \boxed{L = -\frac{9}{4}P}$$



(3) 荷重  $P$  を漸次増加するとき、最初に座屈を起こす荷重  $P_{CR}$  とその部材を求める。

まず、圧縮力が作用する部材は、 $DE(D_2)$ 、 $BD(L)$ の2部材であり、部材  $DE(D_2)$ 、部材  $BD(L)$ の2種類の部材について、座屈を起こす荷重  $P_{CR}$  を比較して小さい方が最初に座屈することになる。

ここで、両端回転支持の場合の最小座屈荷重は、 $\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$  で表される。

ここに、 $\ell$  : 部材長、 $I$  : 弱軸に関する断面2次モーメントである。

2種類の部材の座屈を起こす荷重  $P_{CR}$  は、次のようになる。

①部材  $DE(D_2)$ の座屈を起こす荷重  $P_{CR}^D$  について

$$\frac{5}{4}P_{CR}^D = \frac{\pi^2 EI}{5^2} \quad \therefore P_{CR}^D = \frac{4}{5} \cdot \frac{\pi^2 EI}{5^2} = \frac{4}{125}\pi^2 EI$$

②部材  $BD(L)$ の座屈を起こす荷重  $P_{CR}^L$  について

$$\frac{9}{4}P_{CR}^L = \frac{\pi^2 EI}{3^2} \quad \therefore P_{CR}^L = \frac{4}{9} \cdot \frac{\pi^2 EI}{3^2} = \frac{4}{81}\pi^2 EI$$

ここで、座屈を起こす荷重  $P_{CR}$  を比較すると、次のようになる。

$$P_{CR}^D = \frac{4}{125}\pi^2 EI = \frac{324}{125 \cdot 81}\pi^2 EI < P_{CR}^L = \frac{4}{81}\pi^2 EI = \frac{500}{125 \cdot 81}\pi^2 EI \quad \therefore P_{CR}^D < P_{CR}^L$$

したがって、**最初に座屈を起こす部材は、部材  $DE(D_2)$**  である。

次に、断面2次モーメント  $I$  は、弱軸に関する断面2次モーメントであるから、

$$I = \frac{8a \cdot (6a)^3}{12} - \frac{6a \cdot (4a)^3}{12} = 144a^4 - 32a^4 = 112a^4$$

よって、最初に座屈を起こす荷重  $P_{CR}$  は、次のようになる。

$$P_{CR} = P_{CR}^D = \frac{4}{125}\pi^2 EI = \frac{4}{125}\pi^2 E \cdot 112a^4 = \frac{448}{125}\pi^2 E a^4 \quad \therefore \boxed{P_{CR} = \frac{448}{125}\pi^2 E a^4}$$

【2】 下図に示すような曲げ剛性が  $2EI$  と  $EI$  の「変断面ばり」について、以下の設問に答えよ。

- (1) 図-1 に示すように「変断面片持ばり」の中央に集中荷重  $P$  が作用するとき、  
「弾性荷重法」を用いて、 $B$  点のたわみ角  $\theta_B^1$  とたわみ  $y_B^1$  を求めよ。
- (2) 図-2 に示すように「変断面片持ばり」の先端に集中荷重  $P$  が作用するとき、  
「弾性荷重法」を用いて、 $B$  点のたわみ角  $\theta_B^2$  とたわみ  $y_B^2$  を求めよ。
- (3) (1)と(2)の結果を利用して、図-3 に示すように「一端固定・他端単純支持の変断面ばり」の中央に集中荷重  $P$  が作用するとき、支点反力  $R_A$ 、 $R_B$  と支点曲げモーメント  $M_A$  を求めよ。
- (4) 図-3 のせん断力図 ( $Q$ -図), 曲げモーメント図 ( $M$ -図) を図示せよ。

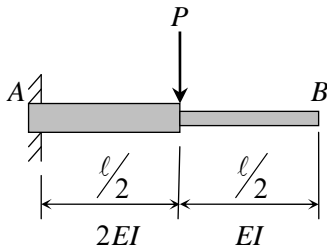


図-1

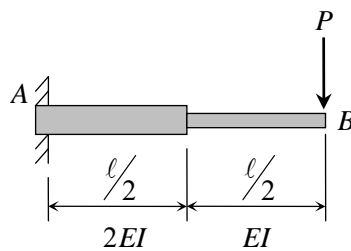


図-2

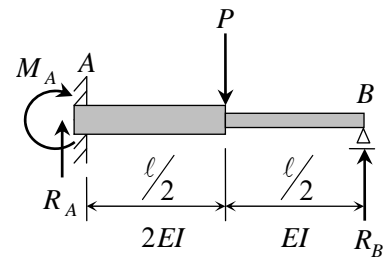
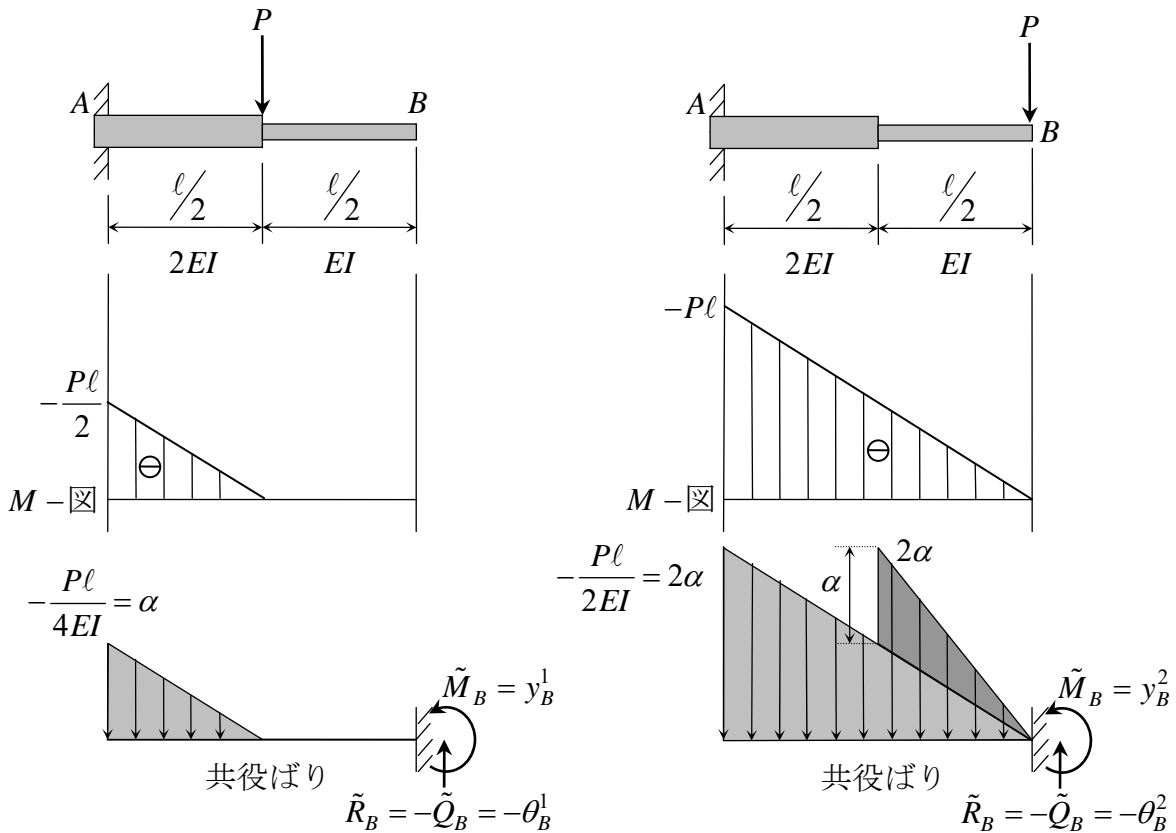


図-3

【解答】

図-1 と図-2 に示すような「変断面片持ばり」の曲げモーメント図 ( $M$ -図) と弾性荷重を載荷した「共役ばり」は、下図のようになる。



剛体の釣合条件から、 $B$  点の支点反力  $\tilde{R}_B$ 、支点曲げモーメント  $\tilde{M}_B$  を求めると、次のようになる。

(1) 鉛直方向の力の釣合から、 $\tilde{R}_B = \frac{1}{2} \times \alpha \times \frac{l}{2} = \frac{1}{4} \alpha l \therefore \theta_B^1 = \tilde{Q}_B = -\tilde{R}_B = \frac{1}{4} \alpha l = \frac{1}{16} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$

$B$  点周りの力のモーメントの釣合から、 $\tilde{M}_B + \frac{1}{4} \alpha l \times \left( \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) = 0$

$$\therefore \tilde{M}_B = -\frac{1}{4}\alpha l \times \frac{5}{6}l = -\frac{5}{24}\alpha l^2 \quad \therefore y_B^1 = \tilde{M}_B = -\frac{5}{24}\alpha l^2 = \frac{5}{96} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

したがって、 $\theta_B^1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$ ,  $y_B^1 = \frac{5}{96} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$

(2) 鉛直方向の力の釣合から、 $\tilde{R}_B = \frac{1}{2} \times 2\alpha \times l + \frac{1}{2} \times \alpha \times \frac{l}{2} = \left(1 + \frac{1}{4}\right)\alpha l = \frac{5}{4}\alpha l$

$$\therefore \theta_B^2 = \tilde{Q}_B = -\tilde{R}_B = -\frac{5}{4}\alpha l = -\frac{5}{16} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$$

B点周りの力のモーメントの釣合から、 $\tilde{M}_B + \alpha l \times \frac{2}{3}l + \frac{1}{4}\alpha l \times \left(\frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = 0$

$$\therefore \tilde{M}_B = -\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12}\right)\alpha l^2 = -\frac{9}{12}\alpha l^2 = -\frac{3}{4}\alpha l^2 \quad \therefore y_B^2 = \tilde{M}_B = -\frac{3}{4}\alpha l^2 = \frac{3}{16} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

したがって、 $\theta_B^2 = \frac{5}{16} \cdot \frac{Pl^2}{EI}$ ,  $y_B^2 = \frac{3}{16} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$

(3)  $y_B^1 = y_B^2$ となる図-2の荷重を  $P \Rightarrow X$  とすると、

$$\frac{5}{96} \cdot \frac{Pl^3}{EI} = \frac{3}{16} \cdot \frac{Xl^3}{EI} \text{ だから、 } X = \frac{5}{96} \cdot \frac{Pl^3}{EI} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{EI}{l^3} = \frac{5}{18}P \quad \therefore R_B = X = \frac{5}{18}P$$

支点反力  $R_A$  と支点曲げモーメント  $M_A$  は、剛体の釣合条件から、

鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R_B = P \quad \therefore R_A = P - R_B = P - \frac{5}{18}P = \frac{13}{18}P$

A点周りの力のモーメントの釣合から、 $M_A + P \times \frac{l}{2} = R_B \times l$

$$\therefore M_A = \frac{5}{18}Pl - \frac{1}{2}Pl = -\frac{4}{18}Pl = -\frac{2}{9}Pl$$

したがって、 $R_A = \frac{13}{18}P$ ,  $R_B = \frac{5}{18}P$ ,  $M_A = -\frac{2}{9}Pl$

(4) 図-3のせん断力図 (Q-図), 曲げモーメント図 (M-図) を図示すると、右図のようになる。

