構造力学演習Ⅱ（2018-Report №.１）　　2018/09/04 出題

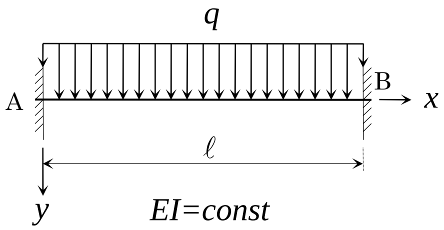
【問題 BD4-B-3】下図に示すような曲げ剛性 EI が一定の“両端固定ばり”について、以下の設問に答えよ。

(1) たわみ角 $\theta(x)$ とたわみ $y(x)$ の式

(2) 最大のたわみ $y_{\max}$ とその発生位置 $x_{\max}$

(3) せん断力図（Q−図）と曲げモーメント図（M−図）

を求めよ。



【解答】

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す４階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=qx+C_1$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1, C_2, C_3, C_4 を求める。

(a) $x=0$ のとき、$y'=0$ より、　$C_3=0$

(b) $x=0$ のとき、$y=0$ より、　$C_4=0$

(c) $x=\ell$ のとき、$y'=0$ より、　$\dfrac{q}{6}\ell^3+\dfrac{C_1}{2}\ell^2+C_2\ell=0$　………①

(d) $x=\ell$ のとき、$y=0$ より、　$\dfrac{q}{24}\ell^4+\dfrac{C_1}{6}\ell^3+\dfrac{C_2}{2}\ell^2=0$　………②

①を変形すると、　$q\ell^2+3C_1\ell+6C_2=0$　………①’

②を変形すると、　$q\ell^2+4C_1\ell+12C_2=0$　………②’

①’×２−②’より、　$q\ell^2+2C_1\ell=0$　　$\therefore C_1=-\dfrac{q}{2}\ell$

これを①’に代入すると、　$6C_2=-q\ell^2-3\cdot\left(-\dfrac{q}{2}\ell\right)\cdot\ell=\dfrac{q}{2}\ell^2$　　$\therefore C_2=\dfrac{q}{12}\ell^2$

よって、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみ $y(x)$ の式は、次のようになる。

$$EIy''' = qx - \frac{q}{2}\ell$$

$$EIy'' = \frac{q}{2}x^2 - \frac{q}{2}\ell x + \frac{q}{12}\ell^2$$

$$EIy' = \frac{q}{6}x^3 - \frac{q}{4}\ell x^2 + \frac{q}{12}\ell^2 x$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 - \frac{q}{12}\ell x^3 + \frac{q}{24}\ell^2 x^2$$

$$\therefore \begin{cases} \theta(x) = y'(x) = \dfrac{q}{6EI}x^3 - \dfrac{q}{4EI}\ell x^2 + \dfrac{q}{12EI}\ell^2 x \\ y(x) = \dfrac{q}{24EI}x^4 - \dfrac{q}{12EI}\ell x^3 + \dfrac{q}{24EI}\ell^2 x^2 \end{cases}$$

これらを整理すると、次のようになる。

$$\boxed{\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{q\ell^3}{12EI}\cdot\left\{2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 3\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + 1\right\}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) \\ y(x) &= \frac{q\ell^4}{24EI}\cdot\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + 1\right\}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \end{aligned}}$$

(2) 最大のたわみ $y_{\max}$ は、たわみ角 $\theta(x) = \dfrac{dy}{dx} = 0$ のときに生ずるから、

$$\left\{2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 3\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + 1\right\}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) = 0 \quad \therefore \left(\frac{x}{\ell}\right)\cdot\left\{2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) - 1\right\}\cdot\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right) - 1\right\} = 0 \quad \therefore \frac{x}{\ell} = 0,\ \ \frac{1}{2},\ \ 1$$

ここで、$0 < \dfrac{x}{\ell} < 1$ でないと意味を持たないから、$\dfrac{x}{\ell} = \dfrac{1}{2}$ すなわち、$x_{\max} = \dfrac{1}{2}\ell$ のとき、次のような最大のたわみ $y_{\max}$ を生じる。

$$y_{\max} = y\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{q\ell^4}{24EI}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) = \frac{q\ell^4}{384EI} = 0.002604166\cdots\frac{q\ell^4}{EI} \fallingdotseq 0.00260\cdot\frac{q\ell^4}{EI}$$

整理すると、

$\boxed{x_{\max} = \dfrac{1}{2}\ell}$ のとき、$\boxed{y_{\max} = \dfrac{q\ell^4}{384EI} \fallingdotseq 0.00260\cdot\dfrac{q\ell^4}{EI}}$

ちなみに、両端単純支持の場合は、$y_{\max} = y\left(\dfrac{\ell}{2}\right) = \dfrac{5q\ell^4}{384EI} \fallingdotseq 0.01302\cdot\dfrac{q\ell^4}{EI}$ である。

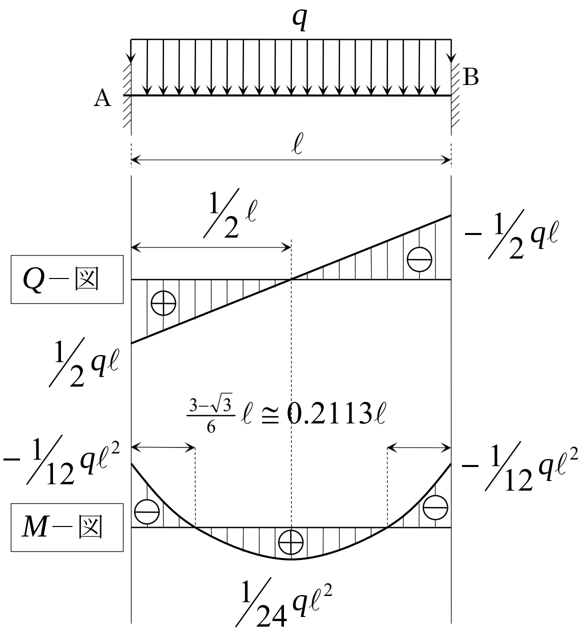
(3) 支点反力 M_A， M_B， R_A， R_B ,を求めると、以下のようになる。

$M=-EIy''$ より、　　　　$M_A=-EIy''\big|_{x=0}=-\dfrac{1}{12}q\ell^2=M_B$

$Q=-EIy'''$ より、　　　　$R_A=Q_A=-EIy'''\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}q\ell=R_B$

以上より、　$\boxed{M_A=M_B=-\dfrac{1}{12}q\ell^2}$,　$\boxed{R_A=R_B=\dfrac{1}{2}q\ell}$

せん断力図（Q－図）、曲げモーメント図（M－図）を図示すると、下図のようになる。



曲げモーメントの最大値を求めると、

$$M_{\max}=-EIy''\big|_{x=\frac{1}{2}\ell}$$

$$=-\frac{q}{2}\cdot\frac{1}{4}\ell^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ell-\frac{1}{12}q\ell^2$$

$$=\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)\cdot q\ell^2$$

$$=\frac{-3+6-2}{24}q\ell^2$$

$$=\frac{1}{24}q\ell^2$$

$M=-EIy''=-\dfrac{q}{2}x^2+\dfrac{1}{2}q\ell x-\dfrac{1}{12}q\ell^2=0$ を解くと、

$$-6x^2+6\ell x-\ell^2=0$$

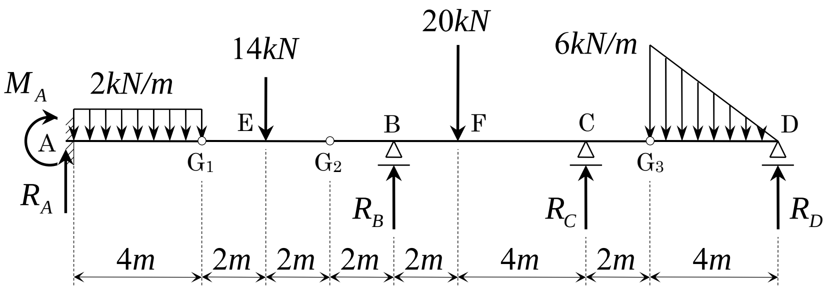
$$\therefore 6x^2-6\ell x+\ell^2=0$$

$$\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}\ell$$

【問題 SF-G-2】下図に示す静定ゲルバーばりについて、以下の設問に答えよ。

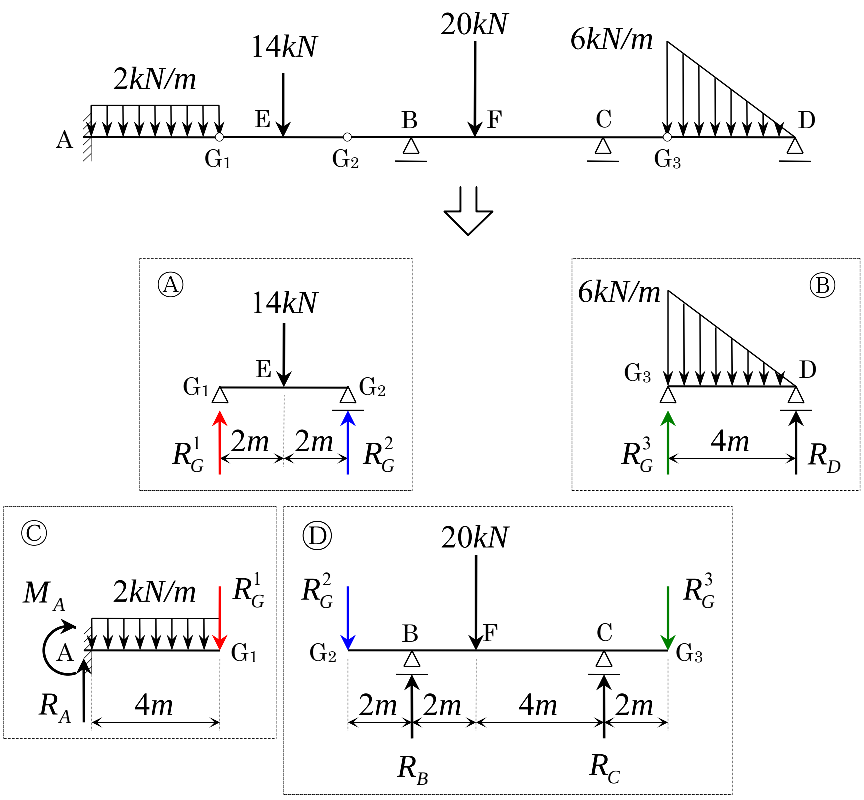
(1) 支点反力 R_A, M_A, R_B, R_C, R_D を求めよ。

(2) 断面力図、即ち、せん断力図（Q－図）, 曲げモーメント図（M－図）を図示せよ。



【解答】

(1) 静定ゲルバーばりを下図のように４つに分解して考える。



Ⓐについて解くと、$R_G^1 = R_G^2 = \dfrac{14}{2} = 7\ (kN)$

Ⓑについて解くと、$R_D + R_G^3 = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4 = 12$

$4R_D = 12\cdot\dfrac{4}{3} = 16 \qquad \therefore R_D = 4\ (kN)$ また、$R_G^3 = 8\ (kN)$

Ⓒについて解くと、$R_A = 2\cdot 4 + R_G^1 = 8 + 7 = 15\ (kN)$

$M_A + 8\cdot 2 + R_G^1\cdot 4 = 0 \quad \therefore M_A = -16 - 28 = -44\ (kN\cdot m)$

Ⓓについて解くと、$R_B + R_C = R_G^2 + 20 + R_G^3 = 7 + 20 + 8 = 35$

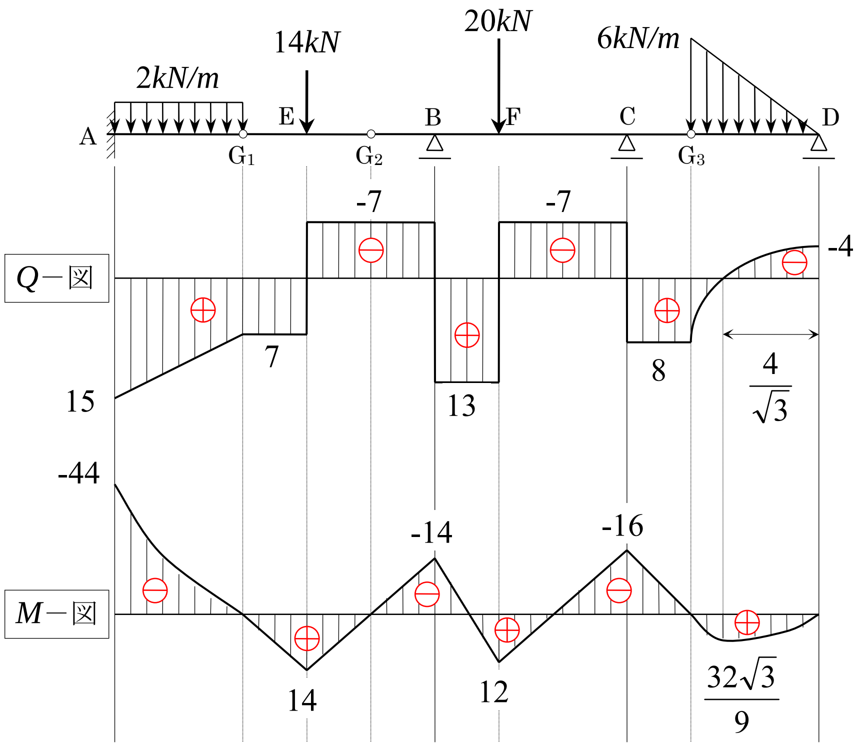
$6R_C + 2R_G^2 = 20\cdot 2 + R_G^3\cdot 8 \qquad 6R_C = 40 + 64 - 14 = 90$

$\therefore R_C = 15\ (kN)$ また、$R_B = 20\ (kN)$

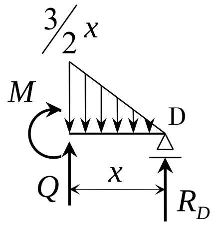
以上より、支点反力 R_A, M_A, R_B, R_C, R_D をまとめると、次のようになる。

$\boxed{R_C = 15\,(kN)}$, $\boxed{M_A = -44\,(kN \cdot m)}$, $\boxed{R_B = 20\,(kN)}$, $\boxed{R_C = 15\,(kN)}$, $\boxed{R_D = 4\,(kN)}$

(2)せん断力図（Qー図），曲げモーメント図（Mー図）を図示すると、下図のようになる。



なお、区間 G_3D の変曲点ついては、右図のように考えて求めた。



$$Q + R_D = \frac{1}{2} x \cdot \frac{3}{2} x = \frac{3}{4} x^2 \qquad \therefore Q = \frac{3}{4} x^2 - 4$$

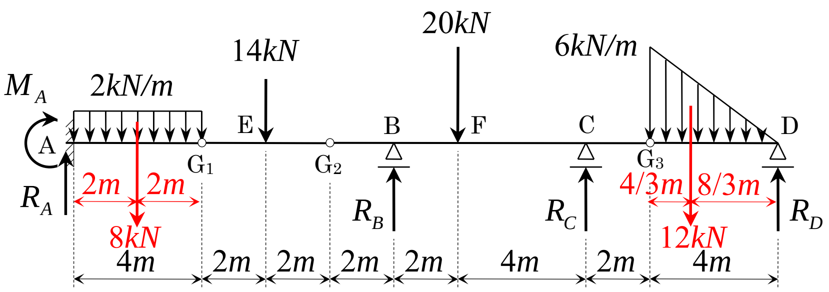
$Q = 0$ となるのは、$x^2 = \frac{16}{3}$ のときであり、$x > 0$ であるから、

$$\therefore x = \frac{4}{\sqrt{3}} \cong 2.309\,(m)$$

このとき、$M + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = R_D \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$

$$\therefore M = \frac{16}{\sqrt{3}} - \frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{32}{3\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{9} \cong 6.158\,(kN \cdot m)$$

【別解】



ゲルバー梁全体に対して、剛体の釣合条件を適用する。

鉛直方向の力の釣合

$$R_A+R_B+R_C+R_D=8+14+20+12=54 \qquad \therefore R_A+R_B+R_C+R_D=54 \quad \cdots\cdots①$$

A 点回りのモーメントの釣合

$$R_B\cdot 10m+R_C\cdot 16m+R_D\cdot 22m$$

$$=M_A+8kN\cdot 2m+14kN\cdot 6m+20kN\cdot 12m+12kN\cdot(18+4/3)m$$

$$10R_B+16R_C+22R_D=M_A+16+84+240+216+16=M_A+572$$

$$\therefore 10R_B+16R_C+22R_D=M_A+572 \quad \cdots\cdots②$$

G1 点回りのモーメントの釣合

（左側）$M_A+R_A\cdot 4m=8kN\cdot 2m$ $\qquad \therefore M_A+4R_A=16 \quad \cdots\cdots③_L$

（右側）$R_B\cdot 6m+R_C\cdot 12m+R_D\cdot 18m=14kN\cdot 2m+20kN\cdot 8m+12kN\cdot(14+4/3)m$

$$6R_B+12R_C+18R_D=28+160+168+16=372 \qquad \therefore R_B+2R_C+3R_D=62 \quad \cdots\cdots③_R$$

G2 点回りのモーメントの釣合

（左側）$M_A+R_A\cdot 8m=8kN\cdot 6m+14kN\cdot 2m$

$$M_A+8R_A=48+28=76 \qquad \therefore M_A+8R_A=76 \quad \cdots\cdots④_L$$

（右側）$R_B\cdot 2m+R_C\cdot 8m+R_D\cdot 14m=20kN\cdot 4m+12kN\cdot(10+4/3)m$

$$2R_B+8R_C+14R_D=80+120+16=216 \qquad \therefore R_B+4R_C+7R_D=108 \quad \cdots\cdots④_R$$

G3 点回りのモーメントの釣合

（左側）$M_A+R_A\cdot 18m+R_B\cdot 8m+R_C\cdot 2m=8kN\cdot 16m+14kN\cdot 12m+20kN\cdot 6m$

$$M_A+18R_A+8R_B+2R_C=128+168+120=416$$

$$\therefore M_A+18R_A+8R_B+2R_C=416 \quad \cdots\cdots⑤_L$$

（右側）$R_D\cdot 4m=12kN\cdot 4/3\,m$ $\qquad 4R_D=16 \qquad \therefore R_D=4kN \quad \cdots\cdots⑤_R$

支点反力 R_A， M_A， R_B， R_C， R_D （５つの未知数）に対して、①～⑤の５つの方程式を用いれば、一意的に支点反力は計算できる。ただし、③～⑤の３つの方程式については、（左側）（右側）のいずれか一方を用いる。

例えば、①，②，③L，④L，⑤R を用いれば次のようになる。

$$R_A+R_B+R_C+R_D=54 \quad \cdots\cdots①$$

$$10R_B+16R_C+22R_D=M_A+572 \quad \cdots\cdots②$$

$$M_A+4R_A=16 \quad \cdots\cdots③_L$$

$$M_A+8R_A=76 \quad \cdots\cdots④_L$$

$$R_D=4kN \quad \cdots\cdots⑤_R$$

④L－③L より、 $4R_A=60$ $\qquad \therefore R_A=15kN$

これを③L に代入すると、 $M_A+4\times 15=16$ $\quad \therefore M_A=-44kN\cdot m$

これらと⑤R を①，②に代入すると、

$$15+R_B+R_C+4=54 \qquad \therefore R_B+R_C=35 \quad \cdots\cdots①'$$

$$10R_B+16R_C+22\times 4=-44+572 \qquad \therefore 10R_B+16R_C=440$$

$$\therefore 5R_B+8R_C=220 \quad \cdots\cdots②'$$

①'×8－②'より、 $3R_B=35\times 8-220=280-220=60$

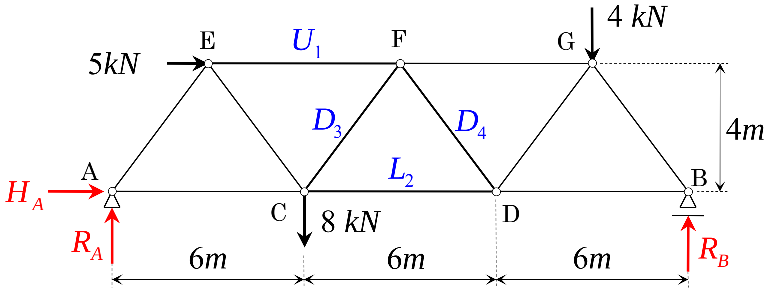
$$\therefore R_B=20kN$$

これを①'に代入すると、 $20+R_C=35$ $\qquad \therefore R_C=15kN$

以上をまとめると、

$$\boxed{R_A=15kN},\ \boxed{M_A=-44kN\cdot m},\ \boxed{R_B=20kN},\ \boxed{R_C=15kN},\ \boxed{R_D=4kN}$$

【問題 SF-T-1】下図に示す静定ワーレントラスの部材力U_1， D_3， D_4， L_2を求めよ。



【解答】

まず、支点反力H_A， R_A， R_Bを求めると、

水平方向の力の釣合から、 $H_A + 5 = 0 \qquad \therefore H_A = -5\ (kN)$

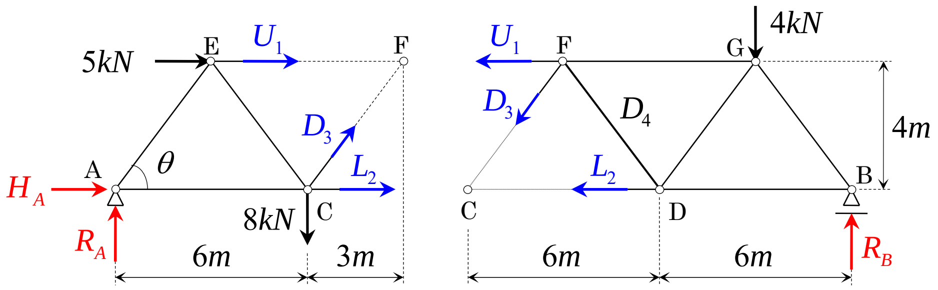
鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R_B = 8 + 4 = 12$

A点回りのモーメントの釣合から、

$$R_B \times 18m = 8kN \times 6m + 4kN \times 15m + 5kN \times 4m$$
$$= 48 + 60 + 20 = 128$$

$$\therefore R_B = \frac{128}{18} = \frac{64}{9}\ (kN) \qquad \text{よって、} R_A = \frac{44}{9}\ (kN)$$

次に、下図に示すように$t-t$で切断して、左自由体と右自由体それぞれについて考えると、



$$\sin\theta = \frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{3}{5}$$

［左自由体について］　　［右自由体について］

水平方向の力の釣合から、

$$H_A + 5 + U_1 + \frac{3}{5}D_3 + L_2 = 0 \qquad\qquad U_1 + L_2 + \frac{3}{5}D_3 = 0$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5}D_3 + R_A = 8 \qquad\qquad \frac{4}{5}D_3 + 4 = R_B$$

$$\therefore \frac{4}{5}D_3 = 8 - \frac{44}{9} = \frac{28}{9} \qquad\qquad \therefore \frac{4}{5}D_3 = \frac{64}{9} - 4 = \frac{28}{9}$$

$$\therefore D_3 = \frac{28}{9} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{9}\ (kN)$$

F点回りのモーメントの釣合から、

$$4L_2 + 4H_A + 8kN \times 3m = R_A \times 9m \qquad\qquad 4L_2 + 4kN \times 6m = R_B \times 9m$$

$$\therefore 4L_2 - 20 + 24 = 44 \qquad\qquad \therefore 4L_2 + 24 = 64$$

$$\therefore 4L_2 = 40$$

$$\therefore L_2 = 10\ (kN)$$

C点回りのモーメントの釣合から、

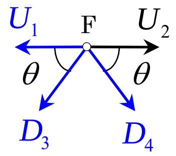
$$4U_1 + 5kN \times 4m + R_A \times 6m = 0 \qquad\qquad 4U_1 + R_B \times 12m = 4kN \times 9m$$

$$\therefore 4U_1 + 20 + \frac{44}{9}\cdot 6 = 0 \qquad \therefore 4U_1 + \frac{64}{9}\cdot 12 = 36$$

$$\therefore 4U_1 = -\frac{88}{3} - 20 = -\frac{148}{3} \qquad \therefore 4U_1 = 36 - \frac{256}{3} = -\frac{148}{3}$$

$$\therefore U_1 = -\frac{148}{3}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{37}{3}\,(kN)$$

さらに、F 点での力の釣合を考えると、



水平方向の力の釣合から、 $U_1 + \frac{3}{5}D_3 = U_2 + \frac{3}{5}D_4$

鉛直方向の力の釣合から、 $\frac{4}{5}D_3 + \frac{4}{5}D_4 = 0$

$$\therefore D_4 = -D_3 = -\frac{35}{9}\,(kN)$$

以上をまとめると、

$\boxed{U_1 = -\frac{37}{3}\,(kN)}$, $\boxed{D_3 = \frac{35}{9}\,(kN)}$, $\boxed{D_4 = -\frac{35}{9}\,(kN)}$, $\boxed{L_2 = 10\,(kN)}$