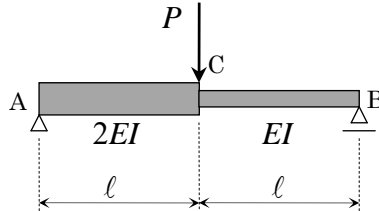


【問題 EL-HSB-2】 下図に示すような“変断面単純ばり”の  $C$  点に集中荷重  $P$  が作用するとき、以下の設問に答えよ。ただし、 $A \sim C$  間の曲げ剛性は  $2EI$ 、 $C \sim B$  間の曲げ剛性は  $EI$  とする。

- (1)  $A$  点のたわみ角  $\theta_A$  と  $B$  点のたわみ角  $\theta_B$  を求めよ。
- (2)  $C$  点のたわみ角  $\theta_C$  とたわみ  $y_C$  を求めよ。
- (3) 最大のたわみ  $y_{\max}$  とその発生位置  $X$  ( $B$  点からの距離) を求めよ。



【解答】

まず、曲げモーメント図 ( $M$ -図) を描くと、右上図のようになる。

次に、境界条件を考慮して、“共役ばり”を作成し、これに“弾性荷重”を作用させると、右下図のようになる。

- (1) 右下図について、 $\alpha = \frac{Pl}{4EI}$  とおいて、支点反力  $\tilde{R}_A$ 、 $\tilde{R}_B$

を求めると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合から、

$$\tilde{R}_A + \tilde{R}_B = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot l + \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot l = \left(\frac{1}{2} + 1\right)\alpha l = \frac{3}{2}\alpha l$$

$B$  点回りのモーメントの釣合から、

$$\begin{aligned} \tilde{R}_A \cdot 2l &= \frac{1}{2} \alpha l \cdot \left(l + \frac{l}{3}\right) + \alpha l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{2} \alpha l \cdot \frac{4}{3} l + \frac{2}{3} \alpha l^2 \\ &= \frac{2}{3} \alpha l^2 + \frac{2}{3} \alpha l^2 = \frac{4}{3} \alpha l^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{R}_A = \frac{2}{3} \alpha l$$

$$\text{また、} \tilde{R}_B = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right)\alpha l = \frac{9-4}{6}\alpha l = \frac{5}{6}\alpha l$$

したがって、 $A$  点のたわみ角  $\theta_A$  と  $B$  点のたわみ角  $\theta_B$  は、次のようになる。

$$\theta_A = \tilde{Q}_A = \tilde{R}_A = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl}{4EI} = \frac{1}{6} \cdot \frac{Pl}{EI} \qquad \theta_B = \tilde{Q}_B = -\tilde{R}_B = -\frac{5}{6} \cdot \frac{Pl}{4EI} = -\frac{5}{24} \cdot \frac{Pl}{EI}$$

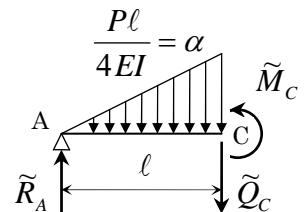
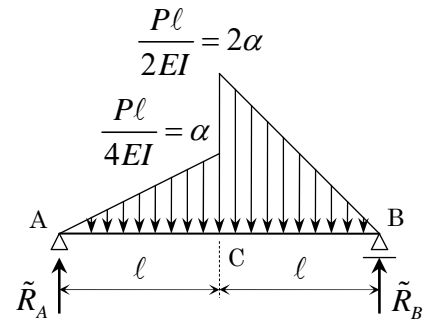
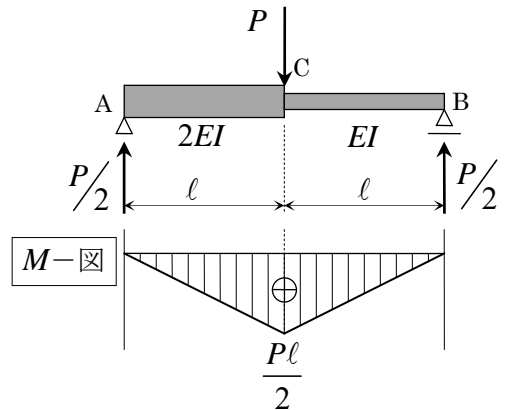
- (2)  $C$  点のたわみ角  $\theta_C$  とたわみ  $y_C$  は、右図について解いて、

$$\tilde{Q}_C + \frac{1}{2} \alpha l = \tilde{R}_A \qquad \therefore \tilde{Q}_C = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\alpha l = \frac{1}{6} \alpha l$$

$$\tilde{M}_C + \frac{1}{2} \alpha l \cdot \frac{l}{3} = \tilde{R}_A \cdot l \qquad \therefore \tilde{M}_C = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)\alpha l^2 = \frac{1}{2} \alpha l^2$$

したがって、 $C$  点のたわみ角  $\theta_C$  とたわみ  $y_C$  は、次のようになる。

$$\theta_C = \tilde{Q}_C = \frac{1}{6} \cdot \frac{Pl}{4EI} = \frac{1}{24} \cdot \frac{Pl}{EI} \qquad y_C = \tilde{M}_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl^3}{4EI} = \frac{1}{8} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$



(3) 最大のたわみ  $y_{\max}$  とその発生位置  $X$  ( $B$  点からの距離) については、右図で考える。最大のたわみ  $y_{\max}$  が発生するのは、せん断力  $\tilde{Q}_x = 0$  となるときであるから、最大のたわみの発生位置  $X$  は、次のようになる。

$$\tilde{Q}_x + \tilde{R}_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha}{l} X \cdot X \quad \therefore \tilde{Q}_x + \frac{5}{6}\alpha l = \frac{\alpha}{l} X^2$$

ここで、 $\tilde{Q}_x = 0$  であるから、 $\frac{\alpha}{l} X^2 = \frac{5}{6}\alpha l$

$$\therefore X^2 = \frac{l}{\alpha} \cdot \frac{5}{6}\alpha l = \frac{5}{6}l^2 \quad \text{すなわち、} X > 0 \text{ より、} X = \frac{\sqrt{30}}{6}l$$

このとき、たわみ、すなわち、曲げモーメントは、次のようになる。

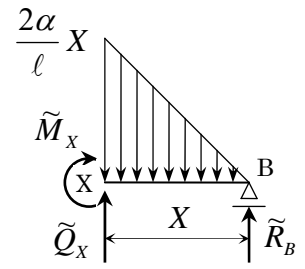
$$\tilde{M}_x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\alpha}{l} \cdot \frac{\sqrt{30}}{6}l \cdot \frac{\sqrt{30}}{6}l \cdot \frac{X}{3} = \tilde{R}_B X \quad \therefore \tilde{M}_x + \frac{5}{6}\alpha l \cdot \frac{X}{3} = \frac{5}{6}\alpha l \cdot X$$

$$\therefore \tilde{M}_x = \frac{5}{6}\alpha l \cdot \frac{2}{3}X = \frac{5}{6}\alpha l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{30}}{6}l = \frac{5\sqrt{30}}{54}\alpha l^2$$

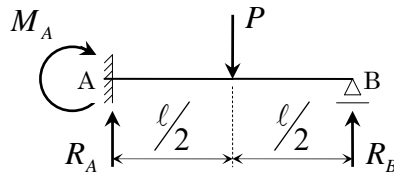
よって、最大のたわみ  $y_{\max}$  は、 $y_{\max} = \tilde{M}_x = \frac{5\sqrt{30}}{54}\alpha l^2 = \frac{5\sqrt{30}}{54} \cdot \frac{Pl^3}{4EI} = \frac{5\sqrt{30}}{216} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$

したがって、最大のたわみ  $y_{\max}$  とその発生位置  $X$  ( $B$  点からの距離) は、次のようになる。

$$X = \frac{\sqrt{30}}{6}l \text{ のとき、} \boxed{y_{\max} = \frac{5\sqrt{30}}{54}\alpha l^2 = \frac{5\sqrt{30}}{216} \cdot \frac{Pl^3}{EI}}$$



【問題 BD-N-3】 下図に示す“1次不静定ばり”の支点反力 $R_A$ 、 $M_A$ 、 $R_B$ と断面力図（ $Q$ -図、 $M$ -図）を求めよ。



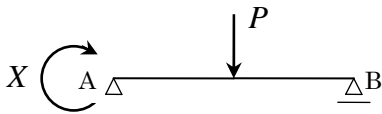
ただし、曲げ剛性 $EI$ は一定とし、不静定力 $X$ を下図のように

①  $A$  点の支点曲げモーメント

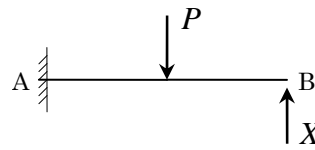
②  $B$  点の支点反力

の2通りに選んで解け。

①



②



【解答①】

$A$  点の支点曲げモーメントを不静定力に選ぶと、右図のようになる。

集中荷重 $P$ による $A$  点のたわみ角 $\theta_A^0$ は、教科書の表より、

$$\theta_A^0 = \frac{P\ell^2}{16EI}$$

不静定モーメント $X$ による $A$  点のたわみ角 $\theta_A^1$ は、教科書の表より、

$$\theta_A^1 = \frac{\ell}{6EI}(2M_A + M_B) = \frac{X\ell}{3EI} \quad (\because M_A = X, M_B = 0)$$

ここで、変位の適合条件より、 $\theta_A^0 + \theta_A^1 = 0$ だから、

$$\frac{P\ell^2}{16EI} + \frac{X\ell}{3EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{3}{16}P\ell = M_A$$

これを用いて、支点反力 $R_A$ 、 $R_B$ を求めると、次のようになる。

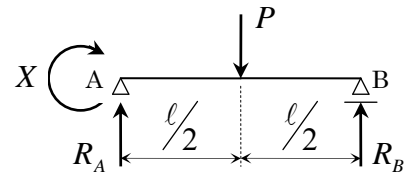
$$R_A \cdot \ell + X = P \cdot \frac{\ell}{2} \quad \therefore R_A = \frac{1}{2}P - \frac{X}{\ell} = \frac{1}{2}P + \frac{3}{16}P = \frac{11}{16}P$$

$$R_B \cdot \ell = X + P \cdot \frac{\ell}{2} \quad \therefore R_B = \frac{1}{2}P + \frac{X}{\ell} = \frac{1}{2}P - \frac{3}{16}P = \frac{5}{16}P$$

以上をまとめると、支点反力 $R_A$ 、 $M_A$ 、 $R_B$ は次のようになる。

$$\boxed{R_A = \frac{11}{16}P, \quad M_A = -\frac{3}{16}P\ell, \quad R_B = \frac{5}{16}P}$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。（次頁参照）



【解答②】

B 点の支点反力を不静定力に選ぶと、右図のようになる。  
 集中荷重  $P$  による B 点のたわみ  $y_B^0$  は、教科書の表より、

$$y_B^0 = \frac{Pa^3}{6EI} \left( 3\frac{\ell}{a} - 1 \right) = \frac{P \left( \frac{\ell}{2} \right)^3}{6EI} (6-1) = \frac{5P\ell^3}{48EI} \quad \left( \because a = \frac{\ell}{2} \right)$$

不静定力  $X$  による B 点のたわみ  $y_B^1$  は、教科書の表より、

$$y_B^1 = -\frac{X\ell^3}{3EI}$$

ここで、変位の適合条件より、 $y_B^0 + y_B^1 = 0$  だから、

$$\frac{5P\ell^3}{48EI} - \frac{X\ell^3}{3EI} = 0 \quad \therefore X = \frac{5}{16}P = R_B$$

これを用いて、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$  を求めると、次のようになる。

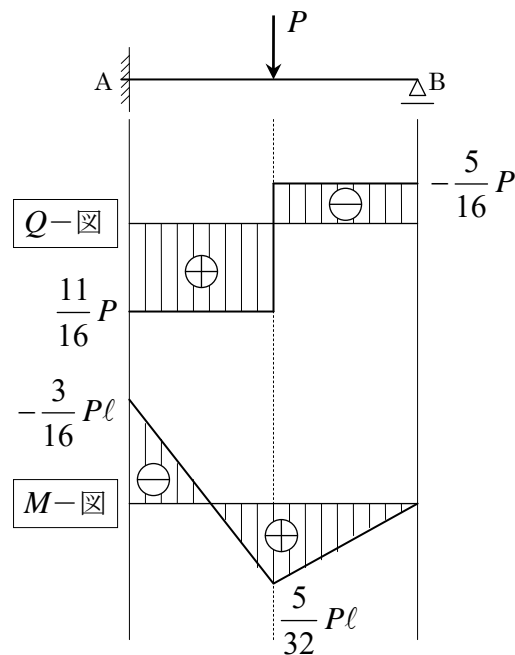
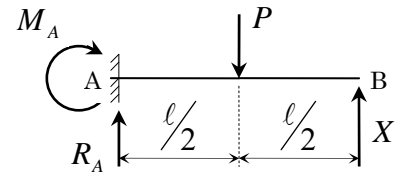
$$R_A + X = P \quad \therefore R_A = P - X = P - \frac{5}{16}P = \frac{11}{16}P$$

$$M_A + P \cdot \frac{\ell}{2} = X \cdot \ell \quad \therefore M_A = X \cdot \ell - \frac{1}{2}P\ell = \frac{5}{16}P\ell - \frac{1}{2}P\ell = -\frac{3}{16}P\ell$$

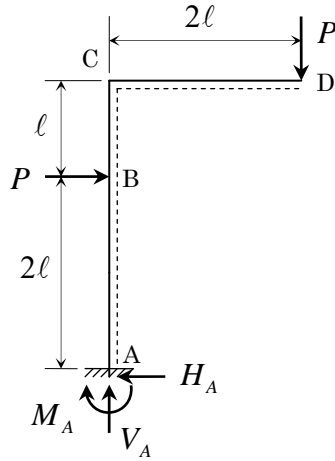
以上をまとめると、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  は次のようになる。

$$R_A = \frac{11}{16}P, \quad M_A = -\frac{3}{16}P\ell, \quad R_B = \frac{5}{16}P$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。



【問題 SF-R-1】 下図のような静定ラーメンの断面力図を図示せよ。



【解答】

まず、支点反力  $H_A$ ,  $V_A$ ,  $M_A$  を求める。

水平方向の力の釣合から、  $H_A = P$

鉛直方向の力の釣合から、  $V_A = P$

A 点回りのモーメントの釣合から、  $M_A + P \times 2l + P \times 2l = 0$

$$\therefore M_A = -4Pl$$

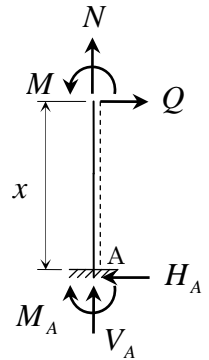
次に、断面力  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  を以下のように3つに分けて求める。

1) A~B 間

$$N + V_A = 0 \quad \therefore N = -V_A = -P$$

$$Q = H_A = P$$

$$M = M_A + H_A x \quad \therefore M = -4Pl + Px = P \cdot (x - 4l)$$



2) B~C 間

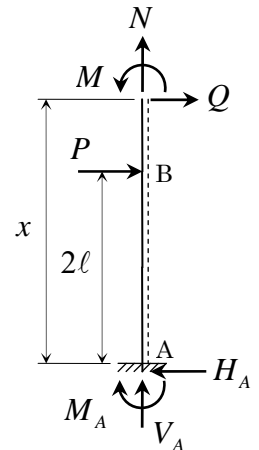
$$N + V_A = 0 \quad \therefore N = -V_A = -P$$

$$Q + P = H_A \quad \therefore Q = 0$$

$$M + P \cdot (x - 2l) = M_A + H_A x$$

$$\therefore M = -P \cdot (x - 2l) - 4Pl + Px$$

$$= -Px + 2Pl - 4Pl + Px = -2Pl$$



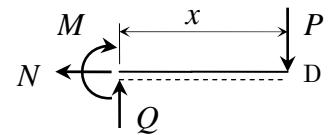
3) C~D 間

$$N = 0$$

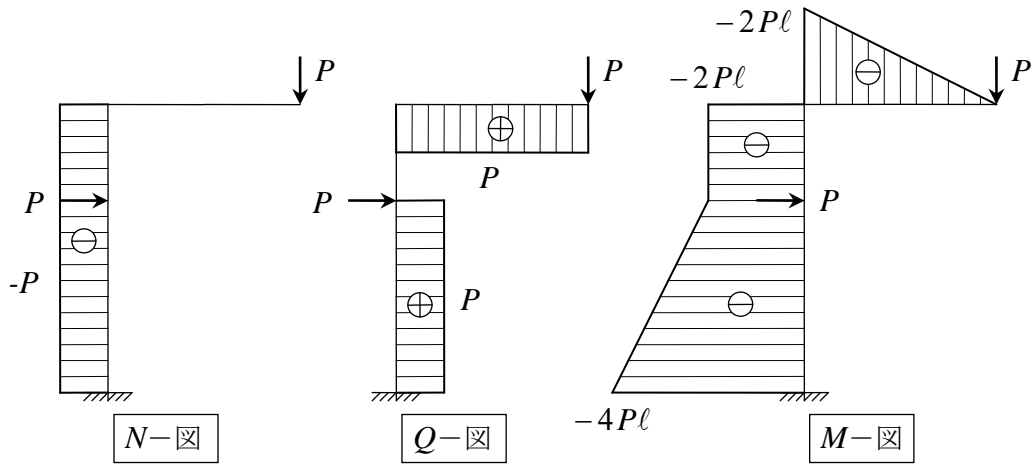
$$Q = P$$

$$M + Px = 0$$

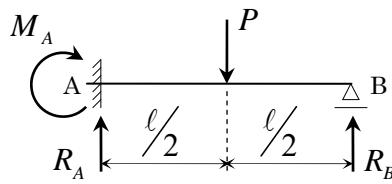
$$\therefore M = -Px$$



以上をまとめて、図示すると下図のようになる。

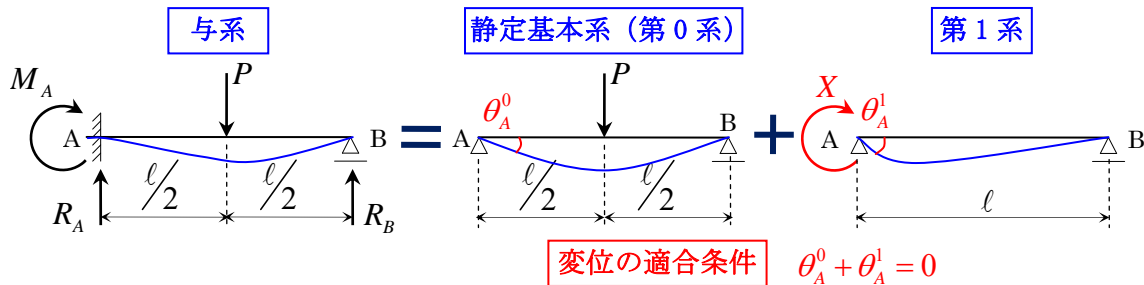


【問題 BD-N-3】 下図に示す“1次不静定ばり”の支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  と断面力図 ( $Q$ -図,  $M$ -図) を求めよ。

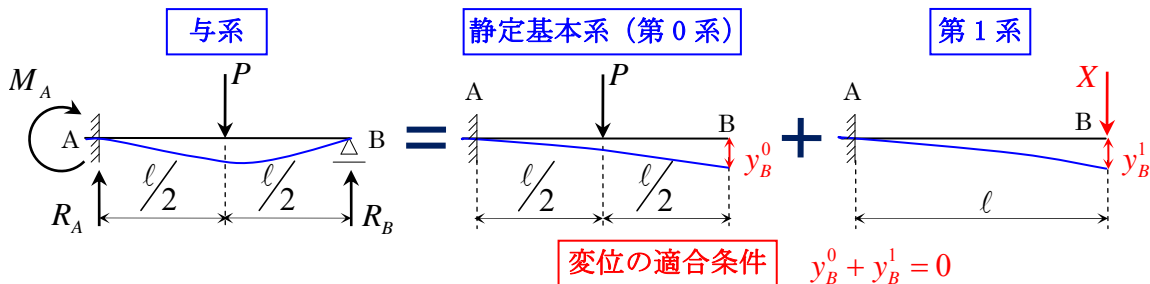


ただし、曲げ剛性  $EI$  は一定とし、不静定力  $X$  を①, ②のように2通り選んで解け。

① A 点の支点曲げモーメント  $\rightarrow$  静定基本系を「単純ばり」とする。



② B 点の支点反力  $\rightarrow$  静定基本系を「片持ばり」とする。



なお、“変位”を求めるには、《変形の公式を用いる方法》と《弾性荷重法を用いる方法》の2つの方法がある。下表は、資料「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」からの抜粋である。

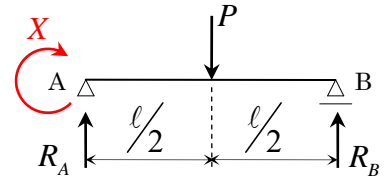
	荷重状態	特定点のたわみ角
単純ばり ②		$\theta_A = -\theta_B = \frac{Pl^2}{16EI}$
単純ばり ⑦		$\theta_A = \frac{l}{6EI}(2M_A + M_B)$ $\theta_B = \frac{-l}{6EI}(M_A + 2M_B)$
	荷重状態	特定点のたわみ
片持ばり ③		$y_{\max} = y_B = \frac{Pa^3}{6EI} \left( 3\frac{l}{a} - 1 \right)$
片持ばり ②		$y_{\max} = y_B = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$

《変形の公式を用いる方法》

【解答①】 (特定点のたわみ角の式を用いる)

A 点の支点曲げモーメントを不静定力に選ぶと、右図のようになる。  
集中荷重  $P$  による A 点のたわみ角  $\theta_A^0$  は、「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」(単純ばり②) より、

$$\theta_A^0 = \frac{Pl^2}{16EI}$$



不静定モーメント  $X$  による A 点のたわみ角  $\theta_A^1$  は、「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」(単純ばり⑦) において  $M_A = X, M_B = 0$  とおくことにより、

$$\theta_A^1 = \frac{l}{6EI}(2M_A + M_B) = \frac{Xl}{3EI}$$

ここで、変位の適合条件より、 $\theta_A^0 + \theta_A^1 = 0$  だから、

$$\frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Xl}{3EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{3}{16}Pl = M_A$$

これを用いて、支点反力  $R_A, R_B$  を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} R_A \cdot l + X &= P \cdot \frac{l}{2} & \therefore R_A &= \frac{1}{2}P - \frac{X}{l} = \frac{1}{2}P + \frac{3}{16}P = \frac{11}{16}P \\ R_B \cdot l &= X + P \cdot \frac{l}{2} & \therefore R_B &= \frac{1}{2}P + \frac{X}{l} = \frac{1}{2}P - \frac{3}{16}P = \frac{5}{16}P \end{aligned}$$

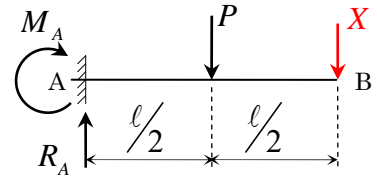
以上をまとめると、支点反力  $R_A, M_A, R_B$  は次のようになる。

$$\boxed{R_A = \frac{11}{16}P, \quad M_A = -\frac{3}{16}Pl, \quad R_B = \frac{5}{16}P}$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。(次頁参照)

【解答②】 (特定点のたわみの式を用いる)

B 点の支点反力を不静定力に選ぶと、右図のようになる。  
集中荷重  $P$  による B 点のたわみ  $y_B^0$  は、「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」(片持ばり③) において  $a = \frac{l}{2}$  とおくことにより、



$$y_B^0 = \frac{Pa^3}{6EI} \left( 3\frac{l}{a} - 1 \right) = \frac{P \left( \frac{l}{2} \right)^3}{6EI} \left\{ 3 \left( \frac{l}{\frac{l}{2}} \right) - 1 \right\} = \frac{Pl^3}{48EI} (6-1) = \frac{5Pl^3}{48EI}$$

不静定力  $X$  による B 点のたわみ  $y_B^1$  は、「表-各種はりのたわみおよびたわみ角」(片持ばり②) において  $P = X$  とおくことにより、

$$y_B^1 = \frac{Xl^3}{3EI}$$

ここで、変位の適合条件より、 $y_B^0 + y_B^1 = 0$  だから、

$$\frac{5Pl^3}{48EI} + \frac{Xl^3}{3EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{5}{16}P = -R_B$$

これを用いて、支点反力  $R_A, M_A$  を求めると、次のようになる。

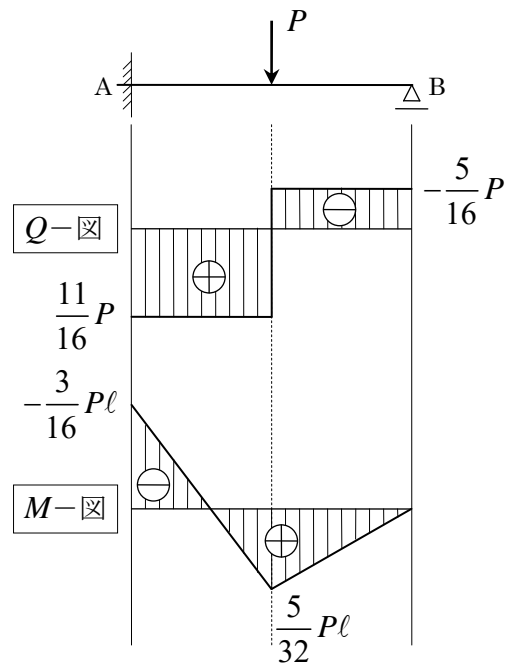
$$\begin{aligned} R_A &= P + X & \therefore R_A &= P - \frac{5}{16}P = \frac{11}{16}P \\ M_A + P \cdot \frac{l}{2} + X \cdot l &= 0 & \therefore M_A &= -\frac{1}{2}Pl - \left( -\frac{5}{16}P \right) \cdot l = -\frac{3}{16}Pl \end{aligned}$$



以上をまとめると、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  は次のようになる。

$$R_A = \frac{11}{16}P, \quad M_A = -\frac{3}{16}P\ell, \quad R_B = \frac{5}{16}P$$

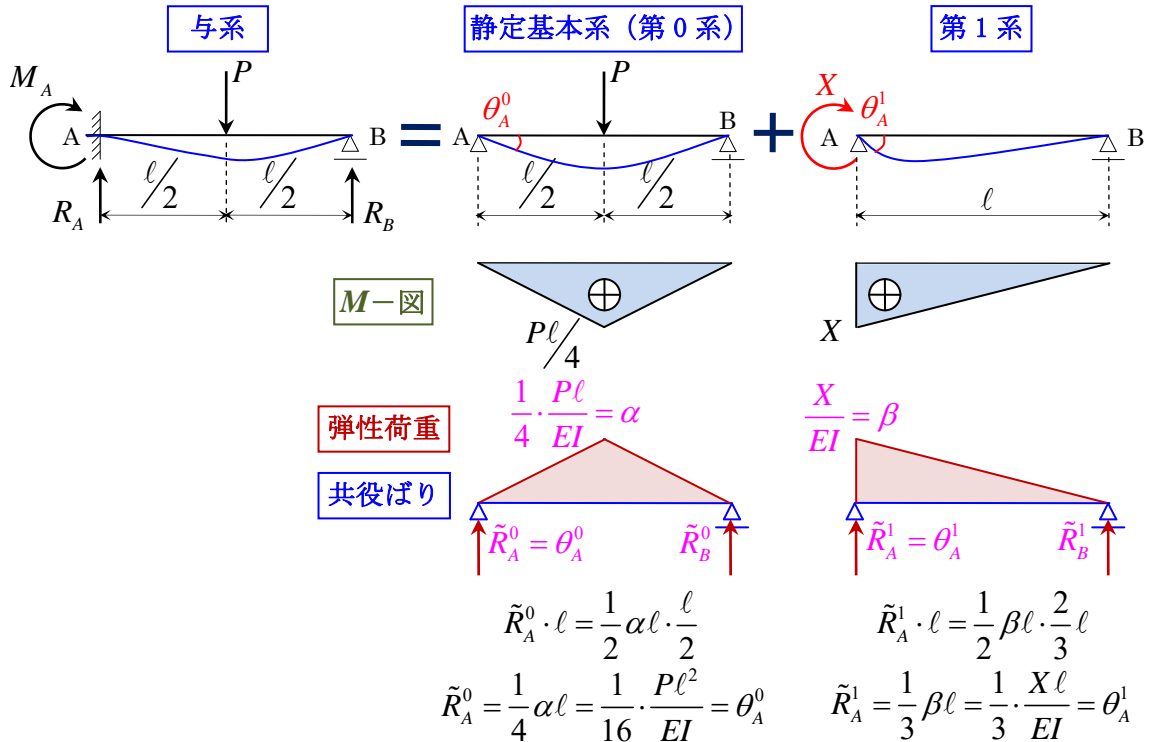
これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。



《弾性荷重法を用いる方法》

【解答①】

下図に示すように、「弾性荷重法」を用いて、「変形の公式を用いる方法」で利用した「単純ばりのA点のたわみ角」を求め、「変位の適合条件」より不静定力  $X = M_A$  を求める。



**変位の適合条件**  $\theta_A^0 + \theta_A^1 = 0$

$$\theta_A^0 + \theta_A^1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{P\ell^2}{EI} + \frac{1}{3} \cdot \frac{X\ell}{EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{3}{16} P\ell = M_A$$

得られた不静定力  $X = M_A$  を用いて、支点反力  $R_A$ ,  $R_B$  を求めると、次のようになる。

$$R_A \cdot \ell + X = P \cdot \frac{\ell}{2} \quad \therefore R_A = \frac{1}{2} P - \frac{X}{\ell} = \frac{1}{2} P + \frac{3}{16} P = \frac{11}{16} P$$

$$R_B \cdot \ell = X + P \cdot \frac{\ell}{2} \quad \therefore R_B = \frac{1}{2} P + \frac{X}{\ell} = \frac{1}{2} P - \frac{3}{16} P = \frac{5}{16} P$$

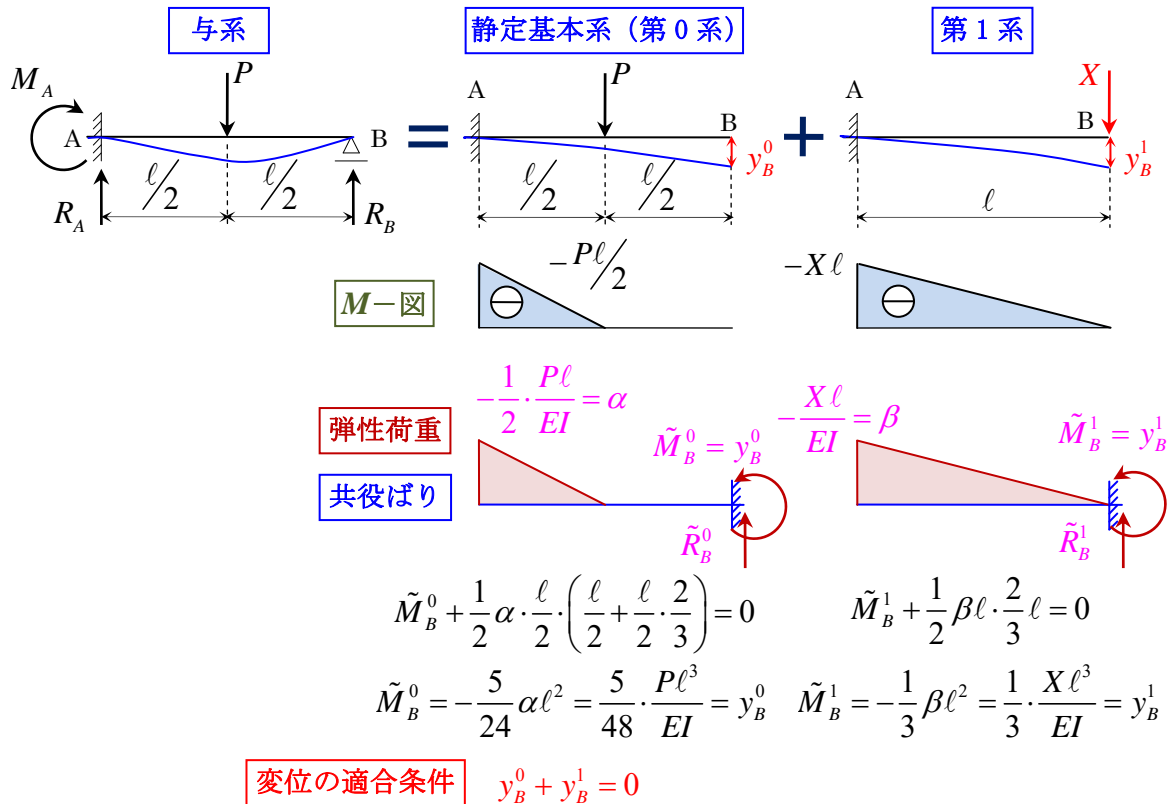
以上をまとめると、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  は次のようになる。

$$R_A = \frac{11}{16} P, \quad M_A = -\frac{3}{16} P\ell, \quad R_B = \frac{5}{16} P$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。(前頁参照)

【解答②】

下図に示すように、「弾性荷重法」を用いて、「変形の公式を用いる方法」で利用した「片持ばりのB点のたわみ」を求め、「変位の適合条件」より不静定力  $X = -R_B$  を求める。



$$y_B^0 + y_B^1 = \frac{5}{48} \cdot \frac{P \ell^3}{EI} + \frac{1}{3} \cdot \frac{X \ell^3}{EI} = 0 \quad \therefore X = -\frac{5}{16} P = -R_B$$

得られた不静定力  $X = -R_B$  を用いて、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$  を求めると、次のようになる。

$$R_A = P + X \quad \therefore R_A = P - \frac{5}{16} P = \frac{11}{16} P$$

$$M_A + P \cdot \frac{\ell}{2} + X \cdot \ell = 0 \quad \therefore M_A = -\frac{1}{2} P \ell - \left( -\frac{5}{16} P \right) \cdot \ell = -\frac{3}{16} P \ell$$

以上をまとめると、支点反力  $R_A$ ,  $M_A$ ,  $R_B$  は次のようになる。

$$R_A = \frac{11}{16} P, \quad M_A = -\frac{3}{16} P \ell, \quad R_B = \frac{5}{16} P$$

これらを用いて、断面力図を図示すると、下図のようになる。(前々頁参照)