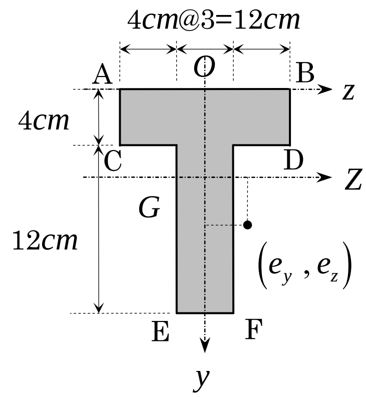
【５】右図に示すＴ型断面の『断面の核』を以下の手順で求め、図示せよ。

⑴ O- y, z 座標系において、Ｔ型断面の重心 $G\left(Y_G, 0\right)$ を求めよ。

⑵ 重心 G を通る y, Z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_Z を求めよ。

⑶ 『断面の核』を斜線で図示せよ。



【解答】

『断面の核』を求めるためには、重心 G を通る主軸を求める必要がある。

そこで、まず、Ｔ型断面の重心 G を求める。このとき、右図に示すＴ型断面は、y 軸に関して対称であるから、その重心 G は、y, z 座標系において $\left(Y_G, 0\right)$ と表され、次の表から求められる。

	幅 b_i	高さ h_i	面積 A_i	重心 y_{Gi}	G_i	$A_i \cdot y^2$	I_{Gi}
Ⅰ	12	4	48	2	96	768	64
Ⅱ	4	12	48	10	480	768	576
計			96		576	1536	640

ここで、表中の記号は、$G_i = A_i \cdot y_{Gi}$， $A_i \cdot y^2 = A_i \cdot \left(y_{Gi} - Y_G\right)^2$， $I_{Gi} = \dfrac{b_i h_i^3}{12}$ を意味する。

$$\therefore Y_G = \frac{G}{A} = \frac{576}{96} = 6\,(cm)$$ したがって、$G\left(Y_G, 0\right) = \left(6, 0\right)$

次に、右図に示した重心 G を通る y, Z 軸は主軸となるから、y, Z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_Z は、次のようになる。

$$I_Z = A_i \cdot \left(y_{Gi} - Y_G\right)^2 + I_{Gi} = 1536 + 640 = 2176\,(cm^4)$$

$$I_y = \frac{4 \times 12^3}{12} + \frac{12 \times 4^3}{12} = 576 + 64 = 640\,(cm^4)$$

また、断面積 A は、$A = 96\,(cm^2)$ だから、y, Z 軸に関する回転半径をそれぞれ r_y， r_z とすると、

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{640}{96} = \frac{20}{3} \cong 6.67\,(cm^2) \qquad r_z^2 = \frac{I_Z}{A} = \frac{2176}{96} = \frac{68}{3} \cong 22.67\,(cm^2)$$

ここで、載荷荷重の偏心位置を $\left(e_y\,,\, e_z\right)$ とすると、中立軸は、$1 + \dfrac{e_y}{r_z^2} y + \dfrac{e_z}{r_y^2} z = 0$ と表され、

中立軸が y, Z 軸と交わる点すなわち切片 n_y， n_z は、次のようになる。

$$n_y = -\frac{r_z^2}{e_y}, \quad n_z = -\frac{r_y^2}{e_z} \quad \text{逆に、} \quad e_y = -\frac{r_z^2}{n_y}, \quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z}$$

よって、〝断面の核〟の端の位置を決めるためには、中立軸が次の４通り（６通り）の限界位置にある場合について、載荷荷重の偏心位置を $\left(e_y\,,\, e_z\right)$ を求めればよい。

⑴ 直線 AB が中立軸になるとき、即ち、$y = -6\,(cm)$ のとき、切片は、$n_y = -6$， $n_z = \infty$ となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{68/3}{-6} = \frac{34}{9} \cong 3.78\,(cm)$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{20/3}{\infty} = 0\,(cm)$$

$$\therefore K\left(e_y, e_z\right) = \left(\frac{34}{9}, 0\right) \cong \left(3.78, 0\right)$$

⑵ 直線 AC または直線 BD が中立軸になるとき、即ち、$Z = \pm 6\,(cm)$ のとき、切片は、$n_y = \infty$， $n_z = \pm 6$ となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{68/3}{\infty} = 0\ (cm)$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{20/3}{\pm 6} = \mp\frac{10}{9} \cong \mp 1.11\ (cm)$$

$$\therefore L\left(e_y, e_z\right) = \left(0,\ \mp\frac{10}{9}\right) \cong \left(0,\ \mp 1.11\right)$$

(3) 直線 CE または直線 DF が中立軸になるとき、

$C\left(Z, y\right) = C\left(-6, -2\right)$, $E\left(-2, 10\right)$だから、直線 CE は、$y - 10 = \dfrac{-2-10}{-6-\left(-2\right)}\left(Z+2\right)$即ち、$y = 3Z + 16$

で表され、切片n_yは、$Z = 0$として、$n_y = 16\left(cm\right)$、切片n_Zは、$y = 0$として、$n_Z = -\dfrac{16}{3}\left(cm\right)$

また、$D\left(Z, y\right) = D\left(6, -2\right)$, $F\left(2, 10\right)$だから、直線 DF は、$y - 10 = \dfrac{-2-10}{6-2}\left(Z-2\right)$即ち、$y = -3Z + 16$

で表され、切片n_yは、$Z = 0$として、$n_y = 16\left(cm\right)$、切片n_Zは、$y = 0$として、$n_Z = \dfrac{16}{3}\left(cm\right)$

したがって、切片は、$n_y = 16$, $n_Z = \mp\dfrac{16}{3}$となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{68/3}{16} = -\frac{68}{48} = -\frac{17}{12} \cong -1.42\ (cm)$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{20/3}{\mp 16/3} = \pm\frac{20}{16} = \pm\frac{5}{4} = \pm 1.25\ (cm)$$

$$\therefore M\left(e_y, e_z\right) = \left(-\frac{17}{12},\ \pm\frac{5}{4}\right) \cong \left(-1.42,\ \pm 1.25\right)$$

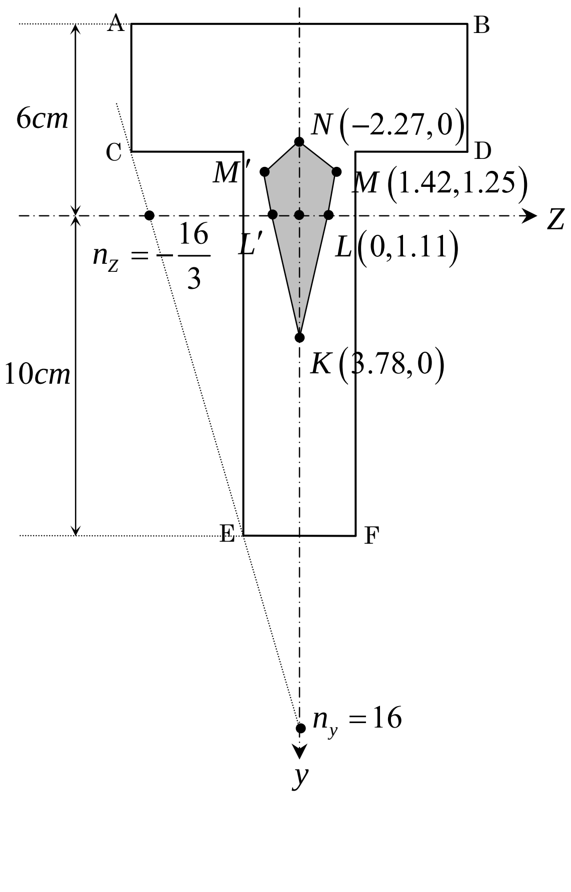
(4) 直線 EF が中立軸になるとき、即ち、$y = 10\ (cm)$のとき、切片は、$n_y = 10$, $n_z = \infty$となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{68/3}{10} = -\frac{34}{15} \cong -2.27\ (cm)$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{20/3}{\infty} = 0\ (cm)$$

$$\therefore N\left(e_y, e_z\right) = \left(-\frac{34}{15},\ 0\right) \cong \left(-2.27,\ 0\right)$$

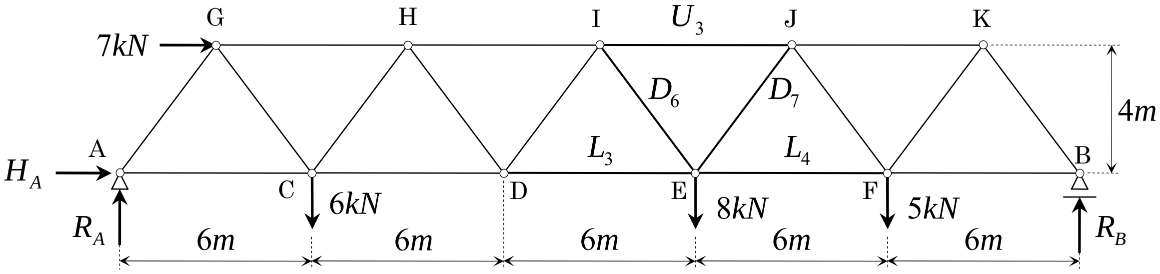
以上をまとめて、〝断面の核〟を塗りつぶしで図示すると下図のようになる。



【問題 SF-T-2】下図に示す静定ワーレントラスについて、以下の設問に答えよ。

(1) 支点反力 R_A, H_A, R_B を求めよ。

(2) 部材力 U_3, D_6, D_7, L_3, L_4 を求めよ。



【解答】

(1) 支点反力 H_A, R_A, R_B を求めると、

水平方向の力の釣合から、　$H_A + 7 = 0$　　$\therefore H_A = -7\ (kN)$

鉛直方向の力の釣合から、　$R_A + R_B = 6 + 8 + 5 = 19$

A 点回りのモーメントの釣合から、

$$R_B \times 30m = 6kN \times 6m + 8kN \times 18m + 5kN \times 24m + 7kN \times 4m$$

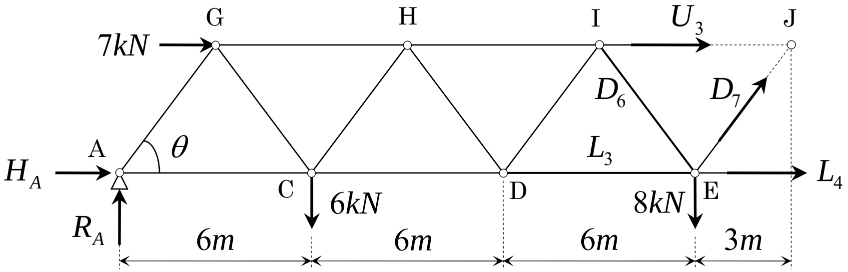
$$= 36 + 144 + 120 + 28 = 328$$

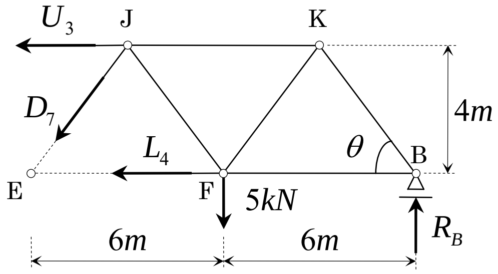
$$\therefore R_B = \frac{328}{30} = \frac{164}{15}\ (kN)$$　よって、$R_A = \frac{121}{15}\ (kN)$

以上をまとめると、$\boxed{R_A = \frac{121}{15}\ (kN)}$, $\boxed{H_A = -7\ (kN)}$, $\boxed{R_B = \frac{164}{15}\ (kN)}$

(2) 部材力は、〝断面法（切断法）〟を基本として求める。

このため、下図に示すように $t-t$ で切断して、左自由体と右自由体それぞれについて考える。





$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

［左自由体について］

水平方向の力の釣合から、

$$H_A + 7 + U_3 + D_7 \cos\theta + L_4 = 0$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$D_7 \sin\theta + R_A = 6 + 8$$

［右自由体について］

$$U_3 + D_7 \cos\theta + L_4 = 0$$

$$D_7 \sin\theta + 5 = R_B$$

$$\therefore \frac{4}{5}D_7 = 14 - \frac{121}{15} = \frac{89}{15}$$
$$\therefore \frac{4}{5}D_7 = \frac{164}{15} - 5 = \frac{89}{15}$$

$$\therefore D_7 = \frac{89}{15}\cdot\frac{5}{4} = \frac{89}{12}\,(kN)$$

J 点回りのモーメントの釣合から、

$$4L_4 + 4H_A + 6kN\times 15m + 8kN\times 3m = R_A \times 21m$$
$$4L_4 + 5kN\times 3m = R_B \times 9m$$

$$\therefore 4L_4 - 28 + 90 + 24 = \frac{121}{15}\cdot 21 = \frac{847}{5}$$
$$\therefore 4L_4 + 15 = \frac{164}{15}\cdot 9 = \frac{492}{5}$$

$$\therefore 4L_4 = \frac{847}{5} - 86 = \frac{847-430}{5} = \frac{417}{5}$$
$$\therefore 4L_4 = \frac{492}{5} - 15 = \frac{492-75}{5} = \frac{417}{5}$$

$$\therefore L_4 = \frac{417}{20}\,(kN)$$

E 点回りのモーメントの釣合から、

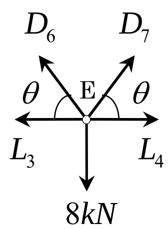
$$4U_3 + 7kN\times 4m + R_A \times 18m = 6kN\times 12m$$
$$4U_3 + R_B \times 12m = 5kN\times 6m$$

$$\therefore 4U_3 + 28 + \frac{121}{15}\cdot 18 = 72$$
$$\therefore 4U_3 + \frac{164}{15}\cdot 12 = 30$$

$$\therefore 4U_3 = 72 - \frac{726}{5} - 28 = 44 - \frac{726}{5} = \frac{220-726}{5} = -\frac{506}{5}$$
$$\therefore 4U_3 = 30 - \frac{656}{5} = \frac{150-656}{5} = -\frac{506}{5}$$

$$\therefore U_3 = -\frac{506}{20} = -\frac{253}{10}\,(kN)$$

次に、E 点での力の釣合を考えると、



鉛直方向の力の釣合から、　$D_6 \sin\theta + D_7 \sin\theta = 8$

$$\therefore \frac{4}{5}\left(D_6 + D_7\right) = 8 \qquad \therefore D_6 + D_7 = 10$$

$$\therefore D_6 = 10 - D_7 = 10 - \frac{89}{12} = \frac{120-89}{12} = \frac{31}{12}\,(kN)$$

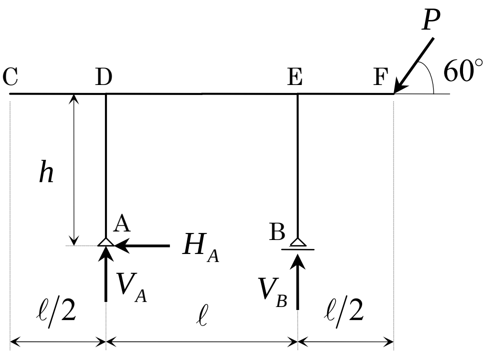
水平方向の力の釣合から、　$L_3 + D_6\cos\theta = L_4 + D_7\cos\theta$

$$\therefore L_3 = L_4 + \frac{3}{5}\left(D_7 - D_6\right) = \frac{417}{20} + \frac{3}{5}\left(\frac{89}{12} - \frac{31}{12}\right) = \frac{417}{20} + \frac{3}{5}\cdot\frac{68}{12} = \frac{417}{20} + \frac{68}{20} = \frac{485}{20} = \frac{95}{4}\,(kN)$$

以上をまとめると、

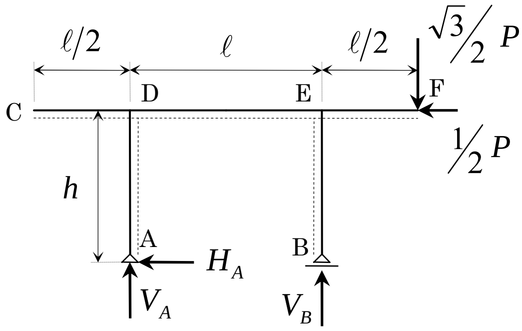
$$\boxed{U_3 = -\frac{253}{10}\,(kN)},\ \boxed{D_6 = \frac{31}{12}\,(kN)},\ \boxed{D_7 = \frac{89}{12}\,(kN)},\ \boxed{L_3 = \frac{95}{4}\,(kN)},\ \boxed{L_4 = \frac{417}{20}\,(kN)}$$

【問題 SF-R-2】下図に示す静定ラーメンの断面力図、すなわち、軸方向力図（N－図），せん断力図（Q－図），曲げモーメント図（M－図）を図示せよ。



【解答】

荷重 P を鉛直方向と水平方向に分解すると、



鉛直荷重　　$P\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}P$

水平荷重　　$P\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}P$

となり、右図のようになる。

このとき、支点反力 V_A，H_A，V_B を剛体の釣合条件より求めると、次のようになる。

水平方向の力の釣合から、　$H_A + \dfrac{1}{2}P = 0$　　$\therefore H_A = -\dfrac{1}{2}P$

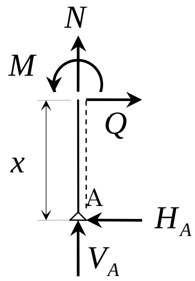
鉛直方向の力の釣合から、　$V_A + V_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}P$

A 点回りのモーメントの釣合から、　$V_B \cdot \ell + \dfrac{1}{2}P \cdot h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}P \cdot \left(\ell + \dfrac{\ell}{2}\right)$

$$\therefore V_B = \frac{3\sqrt{3}}{4}P - \frac{1}{2}P \cdot \frac{h}{\ell} = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{\ell}\right) \qquad \therefore V_A = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

これらを用いて、部材 AD，BE，CD，DE，EF 毎に断面力 N，Q，M を求めて行く。

部材 AD について、

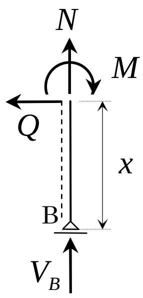


$$N + V_A = 0 \qquad \therefore N = -V_A = -\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Q = H_A = -\frac{1}{2}P$$

$$M = H_A x = -\frac{1}{2}Px$$

部材 BE について、



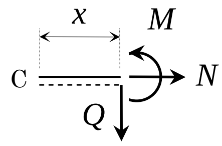
$$N + V_B = 0 \qquad \therefore N = -V_B = -\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{h}{\ell}\right)$$

$$Q = 0$$

$$M = 0$$

部材 CD について、

$$N = Q = M = 0$$

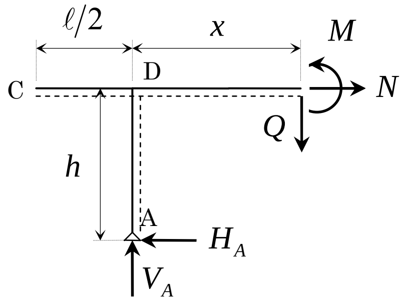


部材 DE について、

$$N = H_A = -\frac{1}{2}P$$

$$Q = V_A = \frac{P}{2}\cdot\left(\frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$M = V_A x + H_A h = \frac{P}{2}\cdot\left(\frac{h}{\ell} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot x - \frac{1}{2}Ph$$

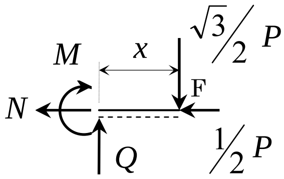


部材 EF について、

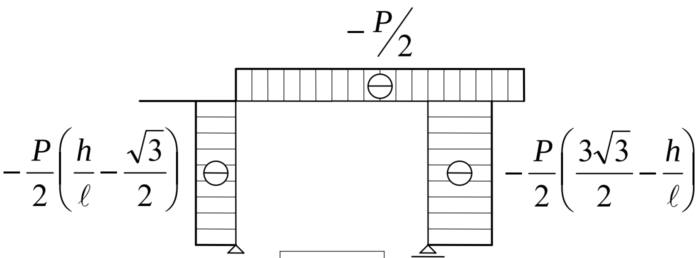
$$N + \frac{1}{2}P = 0 \qquad \therefore N = -\frac{1}{2}P$$

$$Q = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

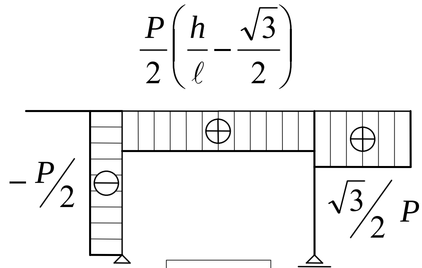
$$M + \frac{\sqrt{3}}{2}Px = 0 \qquad \therefore M = -\frac{\sqrt{3}}{2}Px$$



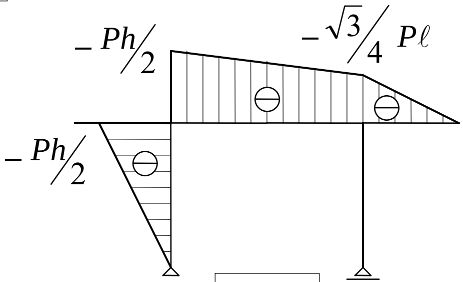
以上をまとめて、断面力図を図示すると下図のようになる。



N－図



Q－図



M－図