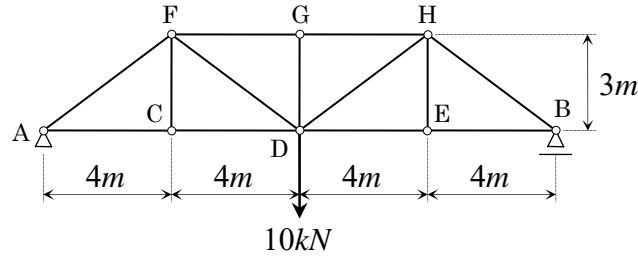
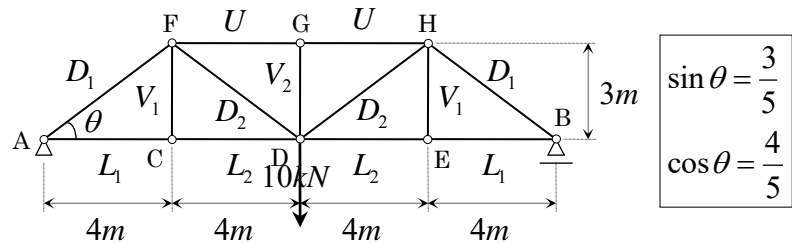


【問題 SE-T-2】 下図に示す静定トラスのひずみエネルギー  $U$  を求めよ。ただし、すべての部材は、ヤング率を  $E$ 、部材断面積を  $A$  とする。



【解答】

構造と荷重の対称性から、支点反力は、 $A$  点、 $B$  点とも  $5kN$  であり、右図のように部材力名を決め、その部材力を「節点法」により求めると、次のようになる。



$A$  点について、

$$\begin{aligned}
 D_1 \sin \theta + 5 &= 0 & \therefore D_1 &= -\frac{5}{\sin \theta} = -5 \cdot \frac{5}{3} = -\frac{25}{3} \text{ (kN)} \\
 D_1 \cos \theta + L_1 &= 0 & \therefore L_1 &= -D_1 \cos \theta = -\left(-\frac{25}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{20}{3} \text{ (kN)}
 \end{aligned}$$

$C$  点について、

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 0 \text{ (kN)} \\
 L_1 &= L_2 & \therefore L_2 &= \frac{20}{3} \text{ (kN)}
 \end{aligned}$$

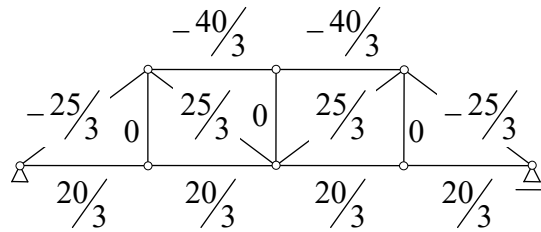
$F$  点について、

$$\begin{aligned}
 (D_1 + D_2) \sin \theta + V_1 &= 0 & \therefore D_2 &= -D_1 = \frac{25}{3} \text{ (kN)} \\
 U + D_2 \cos \theta &= D_1 \cos \theta \\
 \therefore U &= (D_1 - D_2) \cos \theta = \left(-\frac{50}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{40}{3} \text{ (kN)}
 \end{aligned}$$

$G$  点について、

$$V_2 = 0 \text{ (kN)}$$

以上より、部材力は下図のようになる。



次に、軸方向力によるひずみエネルギー  $U_N$  は、

$$U_N = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \frac{N^2}{EA} dx \quad \text{ここに、 } N: \text{軸方向力}$$

$\ell$ : 部材長

で表される。ここで、トラス部材は、軸方向力が部材長にわたり一定であるから、

$$U_N = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{EA} \ell$$

となる。

これを全部材について加算すれば、トラス全体のひずみエネルギー  $U$  が求まり、次のようになる。

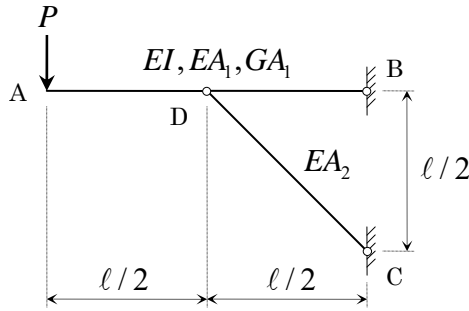
$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{25}{3}\right)^2}{EA} \cdot 5 \times 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{40}{3}\right)^2}{EA} \cdot 4 \times 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{20}{3}\right)^2}{EA} \cdot 4 \times 4$$

$$= \frac{1}{9EA} (25^2 \times 10 + 40^2 \times 4 + 20^2 \times 8) = \frac{6250 + 6400 + 3200}{9EA} = \frac{15850}{9EA}$$

$\therefore U = \frac{15850}{9EA}$

【問題 SE-S-1】 下図に示す構造物のひずみエネルギー  $U$  を求めよ。

ただし、各部材のヤング係数、せん断弾性係数は、 $E$ 、 $G$  であり、部材  $AB$ 、部材  $CD$  の断面積は、それぞれ  $A_1$ 、 $A_2$  である。また、部材  $AB$  の断面 2 次モーメントは、 $I$  である。



【解答】

$B$ 、 $C$  点の支点反力を  $H_B$ 、 $V_B$ 、 $R_C$  とすると、

水平方向の力の釣合から、

$$H_B + R_C \cos 45^\circ = 0$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$V_B + R_C \sin 45^\circ = P$$

$B$  点回りのモーメントの釣合から、

$$P \cdot l = R_C \cos 45^\circ \times \frac{l}{2} \quad \therefore R_C = 2\sqrt{2}P$$

よって、 $H_B = -2P$ 、 $V_B = -P$

このとき、断面力図は、右図のようになる。

各部材に作用する各断面力によるひずみエネルギーを考えると、次のようになる。

$$\begin{aligned} U_{AB}^M &= 2 \times \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}l} \left\{ \frac{(-Px)^2}{EI} \right\} dx = \frac{P^2}{EI} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}l} x^2 dx \\ &= \frac{P^2}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^3}{8} = \frac{P^2 \ell^3}{24EI} \end{aligned}$$

$$U_{AB}^Q = 2 \times \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}l} \left\{ \kappa \frac{(-P)^2}{GA_1} \right\} dx = \kappa \frac{P^2}{GA_1} \cdot \frac{l}{2} = \kappa \frac{P^2 \ell}{2GA_1}$$

$$U_{AB}^N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EA_1} \cdot (2P)^2 \cdot \frac{1}{2} l = \frac{P^2 \ell}{EA_1}$$

$$U_{CD}^N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EA_2} \cdot (-2\sqrt{2}P)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l = \frac{2\sqrt{2}P^2 \ell}{EA_2}$$

したがって、全ひずみエネルギー  $U$  は、各ひずみエネルギーの和で表されるから、次のようになる。

$$\begin{aligned} U &= U_{AB}^M + U_{AB}^Q + U_{AB}^N + U_{CD}^N \\ &= \frac{P^2 \ell^3}{24EI} + \kappa \frac{P^2 \ell}{2GA_1} + \frac{P^2 \ell}{EA_1} + \frac{2\sqrt{2}P^2 \ell}{EA_2} \end{aligned}$$

