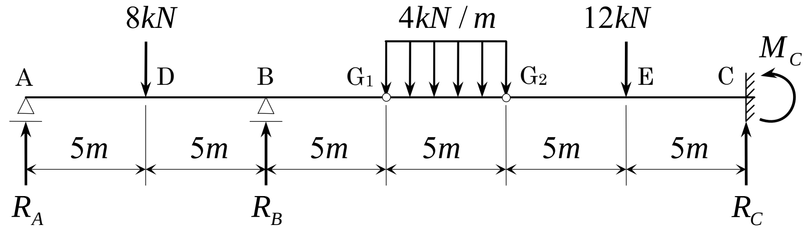
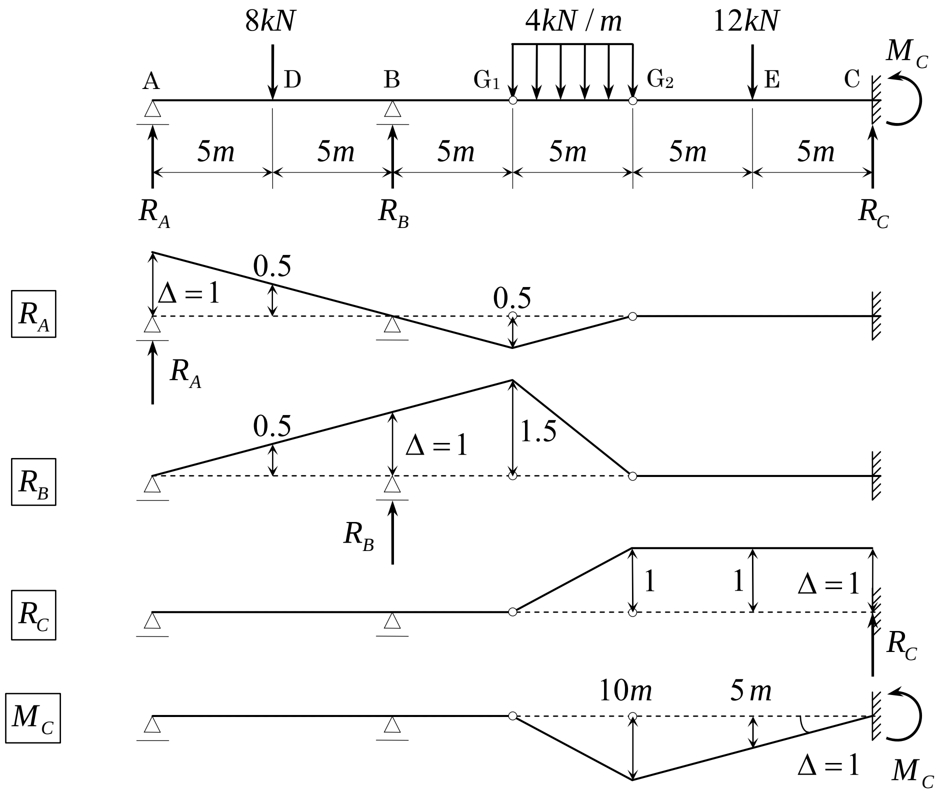
構造力学演習Ⅱ（2018-Report №.８）　　2018/11/13 出題

【問題 UD-G-6】下図に示すゲルバーばりの支点反力 R_A， R_B， R_C と C 点の支点曲げモーメント M_C を〝**仮想変位の原理**〟を用いて求めよ。



【解答】

支点反力 R_A， R_B， R_C と C 点の支点曲げモーメント M_C のそれぞれについて、題意のゲルバーばりの支持条件や幾何学的条件を満足する〝単位〟の仮想変位 $\Delta = 1$ を図示すると下図のようになる。



荷重の方向と逆方向の仮想変位は〝負〟であることに注意して、〝**仮想変位の原理**〟を適用すると次のようになる。

支点反力 R_A について　　$R_A \cdot 1 + 8kN \cdot (-0.5) + 4kN/m \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 5m = 0$

$\therefore R_A = 4 - 5 = -1kN$　　$\therefore \boxed{R_A = -1kN}$

支点反力 R_B について　　$R_B \cdot 1 + 8kN \cdot (-0.5) + 4kN/m \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1.5) \cdot 5m = 0$

$\therefore R_B = 4 + 15 = 19kN$　　$\therefore \boxed{R_B = 19kN}$

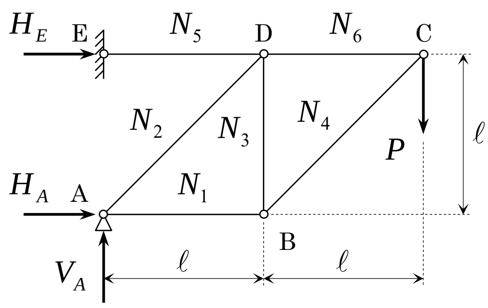
支点反力 R_C について　　$R_C \cdot 1 + 12kN \cdot (-1) + 4kN/m \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 5m = 0$

$\therefore R_C = 12 + 10 = 22kN$　　$\therefore \boxed{R_C = 22kN}$

C 点の支点曲げモーメント M_C について　　$M_C \cdot 1 + 12kN \cdot 5m + 4kN/m \cdot \frac{1}{2} \cdot 10m \cdot 5m = 0$

$\therefore M_C = -60 - 100 = -160kN \cdot m$　　$\therefore \boxed{M_C = -160kN \cdot m}$

【問題 UL-T-4】下図に示す静定トラスの C 点の鉛直変位 v_C を〝**単位荷重法**〟を用いて求めよ。



引張剛性 $EA=const.$

【解答】

まず、支点反力 V_A，H_A，H_E を求める。

鉛直方向の力の釣合から、　$V_A = P$

水平方向の力の釣合から、　$H_A + H_E = 0$

A 点回りのモーメントの釣合から、$H_E \cdot \ell + P \cdot 2\ell = 0$　　$\therefore H_E = -2P$　　よって、$H_A = 2P$

次に、〝節点法〟によりトラスの部材力 N_1 ～ N_6 を求める。

C 点について、

鉛直方向の力の釣合から、$N_4 \sin 45° + P = 0$　　$\therefore N_4 = -\dfrac{P}{\sin 45°} = -\sqrt{2}P$

水平方向の力の釣合から、$N_6 + N_4 \cos 45° = 0$　　$\therefore N_6 = -N_4 \cos 45° = P$

B 点について、

鉛直方向の力の釣合から、$N_4 \sin 45° + N_3 = 0$　　$\therefore N_3 = -N_4 \sin 45° = P$

水平方向の力の釣合から、$N_1 = N_4 \cos 45°$　　$\therefore N_1 = -P$

D 点について、

鉛直方向の力の釣合から、$N_2 \sin 45° + N_3 = 0$　　$\therefore N_2 = -\dfrac{N_3}{\sin 45°} = -\sqrt{2}P$

水平方向の力の釣合から、$N_5 + N_2 \cos 45° = N_6$　　$\therefore N_5 = N_6 - N_2 \cos 45° = P + P = 2P$

E 点について、(check)

水平方向の力の釣合から、$H_E + N_5 = -2P + 2P = 0$

A 点について、(check)

鉛直方向の力の釣合から、$V_A + N_2 \sin 45° = P - P = 0$

水平方向の力の釣合から、$H_A + N_1 + N_2 \cos 45° = 2P - P - P = 0$

したがって、静定トラスの C 点の鉛直変位 v_C を〝**単位荷重法**〟を用いて求めると、次のようになる。

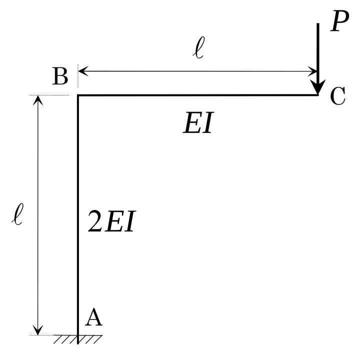
$$1 \times v_C = \sum_{j=1}^{6} \overline{N}_j \frac{N_j}{EA} \ell_j$$

$$= (-1) \cdot \frac{-P}{EA} \cdot \ell + \left(-\sqrt{2}\right) \cdot \frac{-\sqrt{2}P}{EA} \cdot \sqrt{2}\ell + (1) \cdot \frac{P}{EA} \cdot \ell + \left(-\sqrt{2}\right) \cdot \frac{-\sqrt{2}P}{EA} \cdot \sqrt{2}\ell + (2) \cdot \frac{2P}{EA} \cdot \ell + (1) \cdot \frac{P}{EA} \cdot \ell$$

$$= \frac{P\ell}{EA} \cdot \left(1 + 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} + 4 + 1\right) = \left(7 + 4\sqrt{2}\right) \frac{P\ell}{EA}$$

$$\therefore \boxed{v_C = \left(7 + 4\sqrt{2}\right) \frac{P\ell}{EA}}$$

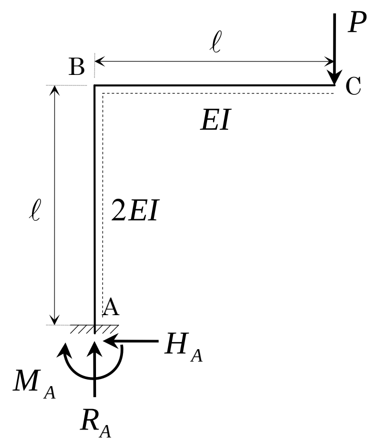
【問題 UL-R-1】下図に示す静定ラーメンの C 点の鉛直たわみ v_C とたわみ角 θ_C を求めよ。ただし、AB, BC 間の曲げ剛性は、それぞれ $2EI$, EI で一定とし、軸方向力・せん断力の影響は無視する。



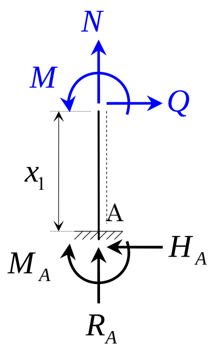
【解答】

右図において、支点反力を求めると、$R_A = P$, $H_A = 0$, $M_A = -P \cdot \ell$

次に、下図のように、A～B 間, B～C 間に分けて断面力を求める。

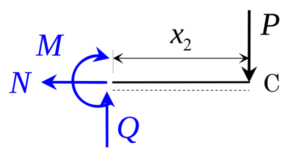


A～B 間について、



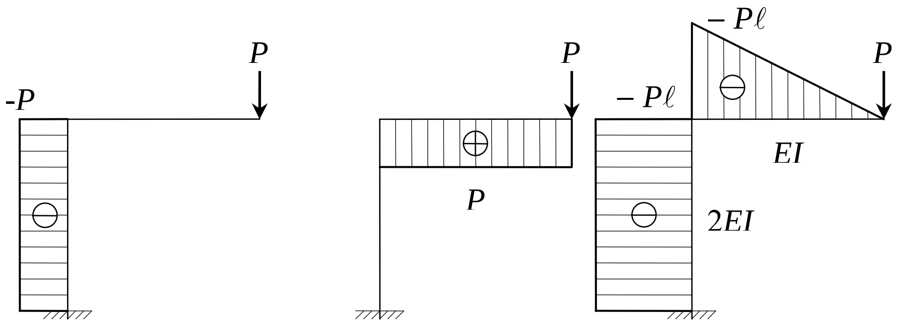
$$N = -R_A = -P$$
$$Q = H_A = 0$$
$$M = H_A \cdot x_1 + M_A = -P \cdot \ell$$

B～C 間について、



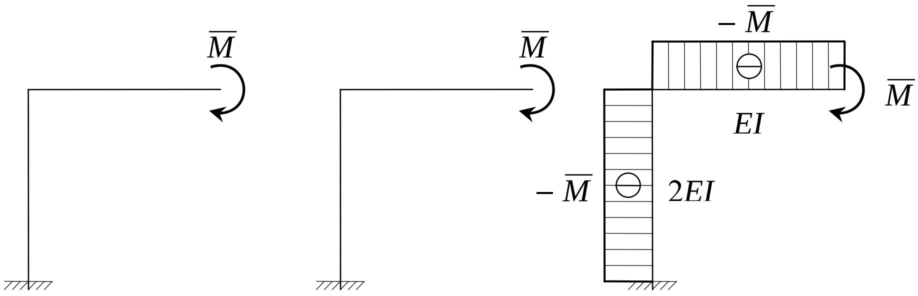
$$N = 0$$
$$Q = P$$
$$M = -P \cdot x_2$$

これらを図示すると、下図のようになる。



N−図　　Q−図　　M−図

C 点に単位の集中モーメント $\overline{M}=1$ が作用する場合は、同様にして、
支点反力を求めると、 $\overline{R}_A=0$, $\overline{H}_A=0$, $\overline{M}_A=-\overline{M}$ であり、
これらを図示すると、下図のようになる。



$\overline{N}-$図　$\overline{Q}-$図　$\overline{M}-$図

したがって、C 点の鉛直たわみ v_C とたわみ角 θ_C は、次のようになる。

$$v_C=\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx$$

$$=\frac{1}{2EI}\cdot\int_0^{\ell}(-P\ell)\cdot(-\ell)\cdot dx+\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\ell}(-Px)\cdot(-x)\cdot dx=\frac{P\ell^3}{2EI}+\frac{P}{EI}\cdot\frac{\ell^3}{3}=\frac{5}{6}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore\boxed{v_C=\frac{5}{6}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

$$\theta_C=\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx$$

$$=\frac{1}{2EI}\cdot\int_0^{\ell}(-P\ell)\cdot(-1)\cdot dx+\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\ell}(-Px)\cdot(-1)\cdot dx=\frac{P\ell^2}{2EI}+\frac{P}{EI}\cdot\frac{\ell^2}{2}=\frac{P\ell^2}{EI}$$

$$\therefore\boxed{\theta_C=\frac{P\ell^2}{EI}}$$

AB, BC 間の引張剛性をそれぞれ $2EA$, EA、せん断剛性をそれぞれ $2GA$, GA とし、軸方向力・せん断力の影響を考慮すると、C 点の鉛直たわみ v_C は、次のようになる。

$$v_C=\int\frac{N\overline{N}}{EA}dx+\int\kappa\frac{Q\overline{Q}}{GA}dx+\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx$$

$$=\frac{1}{2EA}\cdot\int_0^{\ell}(-P)\cdot(-1)\cdot dx+\frac{\kappa}{GA}\cdot\int_0^{\ell}P\cdot 1\cdot dx+\frac{1}{2EI}\cdot\int_0^{\ell}(-P\ell)\cdot(-\ell)\cdot dx+\frac{1}{EI}\cdot\int_0^{\ell}(-Px)\cdot(-x)\cdot dx$$

$$=\frac{P\ell}{2EA}+\kappa\frac{P\ell}{GA}+\frac{P\ell^3}{2EI}+\frac{P}{EI}\cdot\frac{\ell^3}{3}=\frac{P\ell}{2EA}+\kappa\frac{P\ell}{GA}+\frac{5}{6}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore\boxed{v_C=\frac{1}{2}\cdot\frac{P\ell}{EA}+\kappa\frac{P\ell}{GA}+\frac{5}{6}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

また、C 点のたわみ角 θ_C については、軸方向力・せん断力の影響はない。

$$\theta_C=\int\frac{N\overline{N}}{EA}dx+\int\kappa\frac{Q\overline{Q}}{GA}dx+\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx=\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx$$