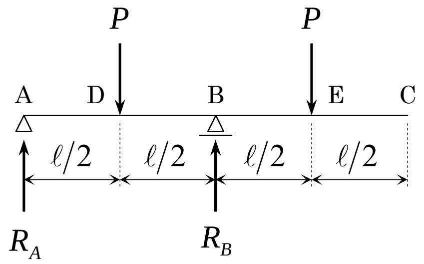
構造力学演習Ⅱ（2018-Report №.９）　　2018/11/20 出題

【問題 UL-OB-1】下図に示す曲げ剛性 EI が一定な張出ばりの C 点の鉛直変位 v_C を〝**単位荷重法**〟を用いて求めよ。



曲げ剛性 $EI=const.$

【解答】

まず、実荷重に対する支点反力 R_A， R_B を求める。

鉛直方向の力の釣合から、　$R_A+R_B=2P$

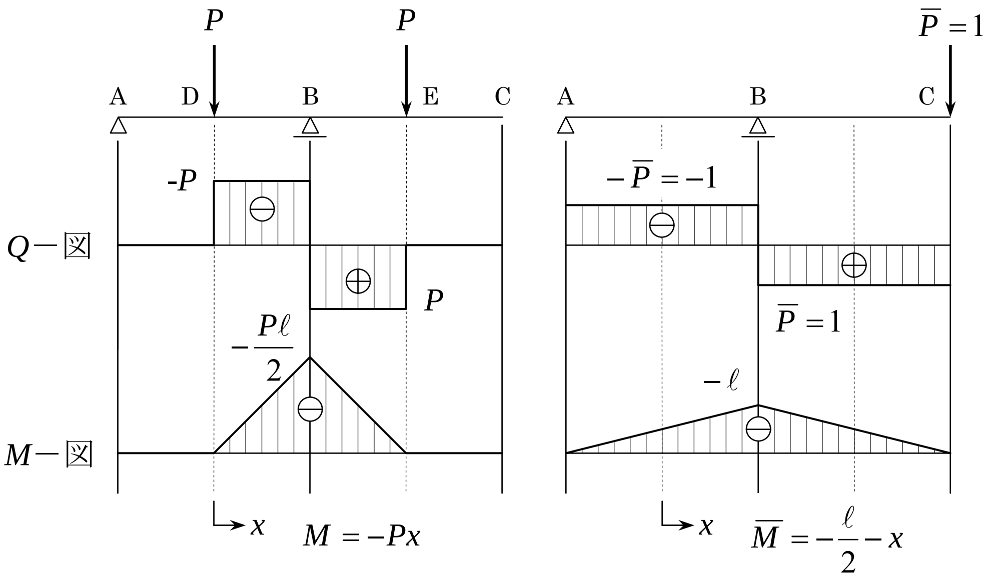
A 点回りのモーメントの釣合から、$R_B\cdot\ell=P\cdot\dfrac{1}{2}\ell+P\cdot\dfrac{3}{2}\ell$　$\therefore R_B=2P$　よって、$R_A=0$

次に、C 点に仮想荷重 $\overline{P}=1$ が載荷された場合の支点反力 $\overline{R}_A$， $\overline{R}_B$ を求める。

鉛直方向の力の釣合から、　$\overline{R}_A+\overline{R}_B=\overline{P}=1$

A 点回りのモーメントの釣合から、$\overline{R}_B\cdot\ell=\overline{P}\cdot 2\ell$　$\therefore \overline{R}_B=2\overline{P}=2$　よって、$\overline{R}_A=-\overline{P}=-1$

以上、2 通りの場合の断面力図を図示すると、下図のようになる。



したがって、C 点の鉛直変位 v_C を〝**単位荷重法**〟を用いて求めると、次のようなる。

$$1\times v_C=\int_0^{2\ell}\overline{M}\cdot\frac{M}{EI}dx=2\times\int_0^{\frac{\ell}{2}}\overline{M}\cdot\frac{M}{EI}dx=\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left(-\frac{\ell}{2}-x\right)\cdot\left(-Px\right)dx$$

$$=\frac{2P}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{\ell}{2}+x\right)\cdot x\,dx=\frac{2P}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{\ell}{2}x+x^2\right)dx=\frac{2P}{EI}\cdot\left[\frac{\ell}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\ell}{2}}\qquad\therefore\ \boxed{v_C=\frac{5}{24}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

$$=\frac{2P}{EI}\cdot\left(\frac{\ell}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell^2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\ell^3}{8}\right)=\frac{2P}{EI}\cdot\left(\frac{\ell^3}{16}+\frac{\ell^3}{24}\right)=\frac{2P\ell^3}{EI}\cdot\frac{3+2}{48}=\frac{5}{24}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

《別解》

〝積分公式〟を用いると、

$$1\times v_C=\int_0^{2\ell}\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}dx=2\times\int_0^{\frac{\ell}{2}}\bar{M}\cdot\frac{M}{EI}dx=\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}}M\cdot\bar{M}dx$$

$$=\frac{2}{EI}\cdot\frac{\frac{\ell}{2}}{6}\cdot\left\{\left(-\frac{\ell}{2}\right)+2\cdot(-\ell)\right\}\cdot\left\{-\frac{P\ell}{2}\right\}=\frac{2}{EI}\cdot\frac{\ell}{12}\cdot\frac{5}{2}\ell\cdot\frac{P\ell}{2}=\frac{5}{24}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore\ \boxed{v_C=\frac{5}{24}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

【問題 UL-R-3】下図－A に示す静定ラーメンについて、A 点の鉛直上方への変位 Δ_A を〝**単位荷重法**〟を用いて以下のような手順で求めよ。ただし、曲げ剛性 EI は一定とし、軸方向力・せん断力の影響は無視する。また、曲げモーメントは、点線側が〝引張〟となる曲げモーメントを〝正〟とする。

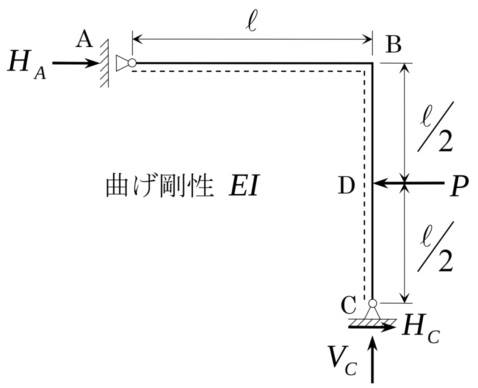
(1) 図－A に示す支点反力 H_A, V_C, H_C を求めよ。

(2) 図－A の曲げモーメント図（M －図）を図示せよ。

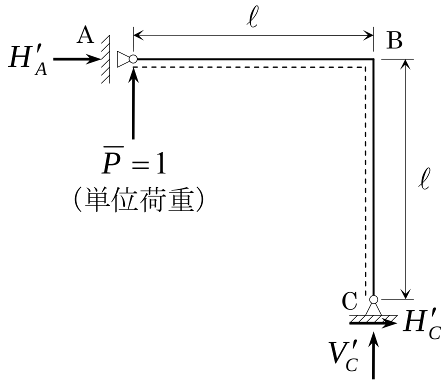
(3) 下図－B に示すように、A 点に単位荷重 $\overline{P}=1$ が作用した場合の支点反力 H'_A, V'_C, H'_C を求めよ。

(4) 図－B の曲げモーメント図（$\overline{M}$ －図）を図示せよ。

(5) 〝**単位荷重法**〟$\left(1\times\Delta_A=\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx\right)$ を適用して、A 点の鉛直上方への変位 Δ_A を求めよ。



【図－A】



【図－B】

【解答】

問題の図において、左図【図－A】を〝与系〟、右図【図－B】を〝仮想系〟として考える。
まず、両系について支点反力を求め、曲げモーメント図を得る。

〝与系〟について、

水平方向の力の釣合から、 $H_A+H_C=P$

鉛直方向の力の釣合から、 $V_C=0$

C 点回りのモーメントの釣合から、 $P\cdot\frac{\ell}{2}=H_A\cdot\ell$

以上より、 $\boxed{H_A=\frac{P}{2}}$, $\boxed{H_C=\frac{P}{2}}$, $\boxed{V_C=0}$

〝仮想系〟について、

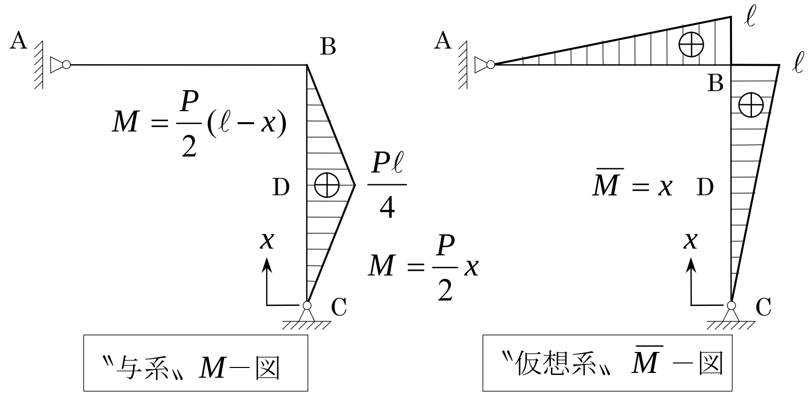
水平方向の力の釣合から、 $H'_A+H'_C=0$

鉛直方向の力の釣合から、 $V'_C+\overline{P}=0$

C 点回りのモーメントの釣合から、 $\overline{P}\cdot\ell+H'_A\cdot\ell=0$

以上より、 $\boxed{H'_A=-\overline{P}=-1}$, $\boxed{H'_C=\overline{P}=1}$, $\boxed{V'_C=-\overline{P}=-1}$

これらより、曲げモーメント図を図示すると、下図のようになる。



A 点の鉛直上方への変位 Δ_A を **〝単位荷重法〟** を用いて求めると、次のようになる。

$$\Delta_A \times 1 = \int \frac{M\overline{M}}{EI}dx = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{1}{2}Px\right)\cdot x\,dx + \frac{1}{EI}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\left\{\frac{1}{2}P\left(\ell-x\right)\right\}\cdot x\,dx$$

$$= \frac{P}{2EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}} x^2 dx + \frac{P}{2EI}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\left(\ell x - x^2\right)dx = \frac{P}{2EI}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\ell}{2}} + \left[\frac{\ell}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\right\}$$

$$= \frac{P}{2EI}\left\{\frac{\ell^3}{24} + \frac{\ell^3}{2} - \frac{\ell^3}{3} - \frac{\ell^3}{8} + \frac{\ell^3}{24}\right\} = \frac{P\ell^3}{2EI}\cdot\frac{1+12-8-3+1}{24} = \frac{P\ell^3}{2EI}\cdot\frac{3}{24} = \frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore \boxed{\Delta_A = \frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

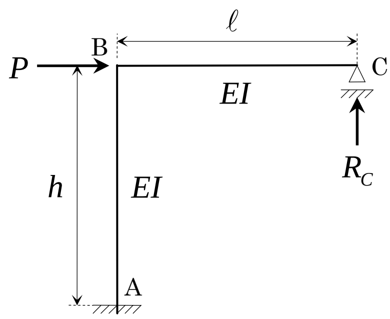
《別解》

〝積分公式〟を用いると、

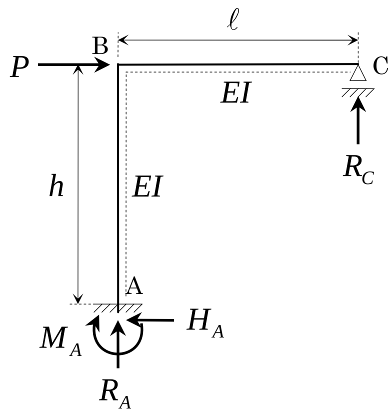
$$\Delta_A \times 1 = \int \frac{M\overline{M}}{EI}dx = \frac{1}{EI}\cdot\left\{\frac{\frac{\ell}{2}}{3}\cdot\frac{P\ell}{4}\cdot\frac{\ell}{2} + \frac{\frac{\ell}{2}}{6}\cdot\frac{P\ell}{4}\cdot\left(\ell + 2\cdot\frac{\ell}{2}\right)\right\} = \frac{1}{EI}\cdot\left(\frac{1}{48}+\frac{2}{48}\right)\cdot P\ell^3 = \frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore \boxed{\Delta_A = \frac{1}{16}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

【問題 LW-R-1】下図に示す 1 次不静定ラーメンの支点 C の支点反力 R_C を〝**最小仕事の原理**〟を用いて求めよ。ただし、各部材の曲げ剛性は、EI で一定とし、せん断力の影響は無視する。



【解答】



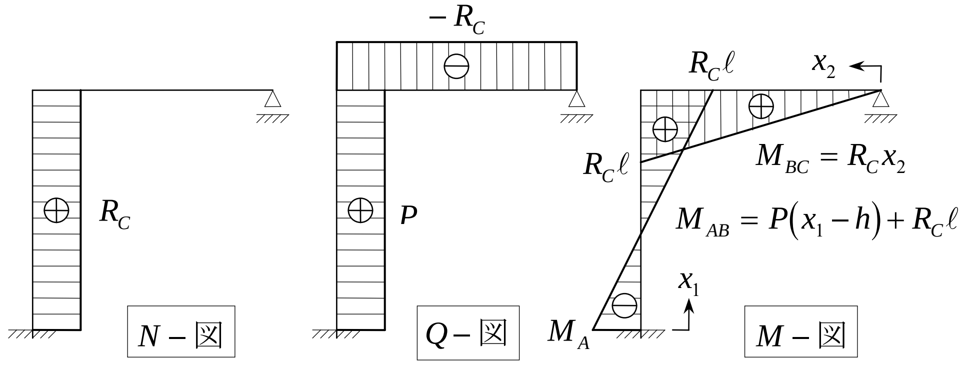
右図に示すように、支点 C の支点反力 R_C を不静定力として、支点反力 R_A，H_A，M_A を求めると、次のようになる。

$$R_A = -R_C$$

$$H_A = P$$

$$M_A = R_C \cdot \ell - P \cdot h$$

これに基づき断面力図を図示すると、下図のようになる。



これらより、全ての断面力による全ひずみエネルギー U は、次のようになる。

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \cdot \int \kappa \frac{Q^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{M^2}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{2EA} \cdot \int_0^h R_C^2 dx_1 + \frac{\kappa}{2GA} \cdot \left[\int_0^h P^2 dx_1 + \int_0^\ell R_C^2 dx_2 \right]$$

$$+ \frac{1}{2EI} \cdot \left[\int_0^h \left\{ P \cdot (x_1 - h) + R_C \cdot \ell \right\}^2 dx_1 + \int_0^\ell \left(R_C \cdot x_2 \right)^2 dx_2 \right]$$

これを、R_C で偏微分すると、〝**最小仕事の原理**〟より、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial R_C} &= \frac{1}{EA}\cdot\int_0^h R_C dx_1 + \frac{\kappa}{GA}\cdot\int_0^\ell R_C dx_2 + \frac{1}{EI}\cdot\left[\int_0^h \left\{P\cdot\left(x_1 - h\right) + R_C\cdot\ell\right\}\cdot\ell\cdot dx_1 + \int_0^\ell R_C\cdot x_2^2 dx_2\right] \\
&= \frac{R_C h}{EA} + \kappa\frac{R_C\ell}{GA} + \frac{1}{EI}\cdot\left\{\ell\cdot\left[P\frac{x_1^2}{2} - Phx_1 + R_C\ell x_1\right]_0^h + R_C\frac{\ell^3}{3}\right\} \\
&= \frac{R_C h}{EA} + \kappa\frac{R_C\ell}{GA} + \frac{1}{EI}\cdot\left\{\ell\cdot\left(P\frac{h^2}{2} - Ph^2 + R_C\ell h\right) + R_C\frac{\ell^3}{3}\right\} \\
&= \frac{R_C h}{EA} + \kappa\frac{R_C\ell}{GA} + \frac{1}{EI}\cdot\left\{\left(h\ell^2 + \frac{\ell^3}{3}\right)\cdot R_C - \frac{1}{2}Ph^2\ell\right\} \\
&= \frac{R_C h}{EA} + \kappa\frac{R_C\ell}{GA} + \frac{\ell}{EI}\cdot\left\{\left(h + \frac{\ell}{3}\right)\cdot\ell\cdot R_C - \frac{1}{2}Ph^2\right\} \\
&= \left\{\frac{h}{EA} + \kappa\frac{\ell}{GA} + \frac{\ell^2}{EI}\cdot\left(h + \frac{\ell}{3}\right)\right\}\cdot R_C - \frac{Ph^2\ell}{2EI} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \boxed{R_C = \frac{\dfrac{Ph^2\ell}{2EI}}{\dfrac{h}{EA} + \kappa\dfrac{\ell}{GA} + \dfrac{\ell^2}{EI}\cdot\left(h + \dfrac{\ell}{3}\right)}}
$$

ここで、軸方向力とせん断力を無視して、曲げモーメントのみを考慮すると、

$$
R_C = \frac{\dfrac{Ph^2}{2}}{\left(h + \dfrac{\ell}{3}\right)\cdot\ell} = \frac{3h^2}{2\ell\cdot(3h + \ell)}P
$$

さらに、$\ell = h$ とすると、$R_C = \dfrac{3}{8}P$ となる。