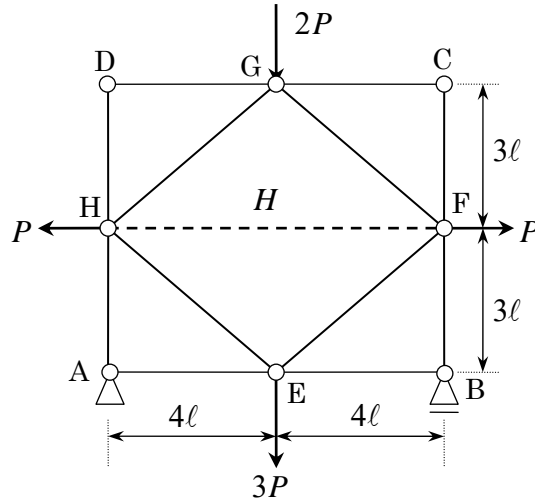


【問題 CP-4】 下図に示す静定トラスについて、次の設問に答えよ。

(1) 破線で表される部材の部材力 H を “仮想変位の原理” を用いて求めよ。

(2) E 点の鉛直方向の変位 v_E を “単位荷重法” を用いて求めよ。

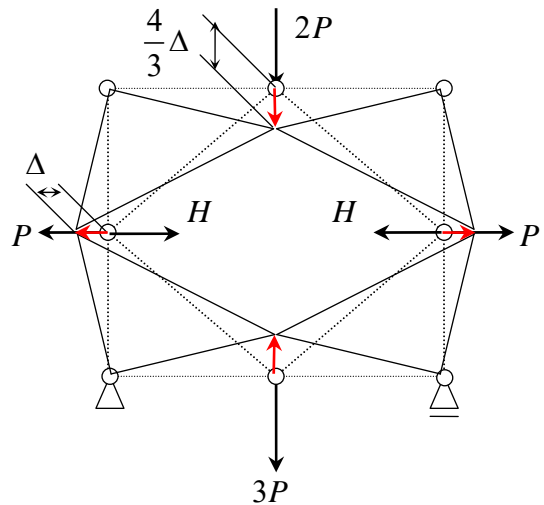
なお、全ての部材の引張剛性は、 EA とする。



【解答】

(1) 右図に示すように、支持条件や幾何学的条件を満足する水平方向の仮想変位を Δ とすると、鉛直方向の仮想変位は $\frac{4}{3}\Delta$ となること、及び、力の方向と逆方向の仮想変位は “負” となることに注意して、“仮想変位の原理” を適用すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & P \cdot \Delta + P \cdot \Delta + H \cdot (-\Delta) + H \cdot (-\Delta) \\
 & + 2P \cdot \frac{4}{3}\Delta + 3P \cdot \left(-\frac{4}{3}\Delta\right) = 0 \\
 \therefore & P + P - H - H + \frac{8}{3}P - 4P = 0 \\
 \therefore & -2H = -\frac{2}{3}P \qquad \therefore \boxed{H = \frac{1}{3}P}
 \end{aligned}$$



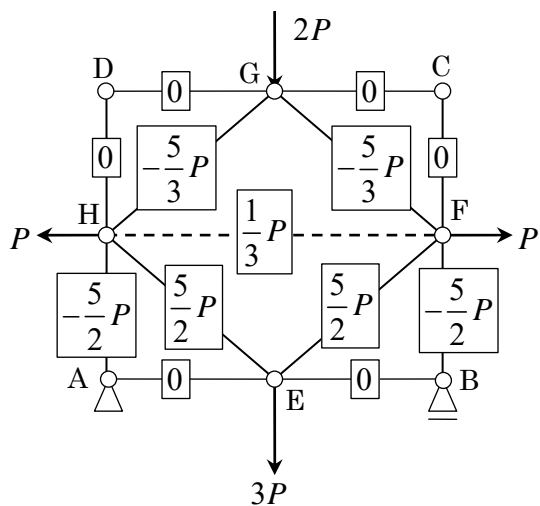
(2) “節点法” を用いて、**実系**の全ての部材力を求めると下左図のようになる。

次に、E 点に単位荷重 $\bar{P}=1$ のみを鉛直方向に載荷させた**仮想系**を考え、これの全ての部材力を求める。

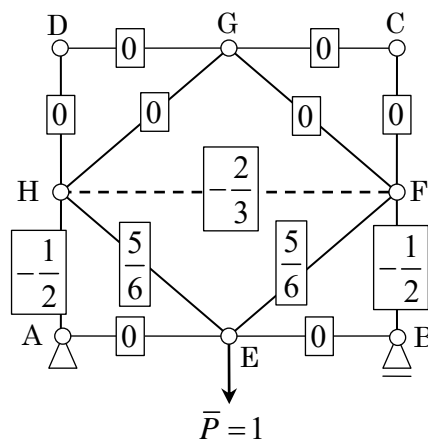
まず、(1) と同様な方法で、部材 HF の部材力 \bar{H} を求めると、

$$\begin{aligned}
 \bar{H} \cdot (-\Delta) + \bar{H} \cdot (-\Delta) + \bar{P} \cdot \left(-\frac{4}{3}\Delta\right) &= 0 \quad \therefore \bar{H} + \bar{H} + \frac{4}{3}\bar{P} = 0 \\
 \therefore 2\bar{H} &= -\frac{4}{3}\bar{P} \quad \therefore \bar{H} = -\frac{2}{3}\bar{P} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

さらに、“節点法” を用いて、**仮想系**の全ての部材力を求めると下右図のようになる。



【実系】



【仮想系】

したがって、“単位荷重法”を用いて、E点の鉛直方向の変位 v_E を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 1 \times v_E &= \sum \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} \ell_{ij} \\
 &= \frac{1}{EA} \left\{ \left(\frac{1}{3} P \right) \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \times 2 \times 4\ell + 2 \times \left(-\frac{5}{2} P \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \times 3\ell + 2 \times \left(\frac{5}{2} P \right) \cdot \left(\frac{5}{6} \right) \times 5\ell \right\} \\
 &= \frac{1}{EA} \left\{ -\frac{16}{9} P\ell + \frac{15}{2} P\ell + \frac{125}{6} P\ell \right\} = \frac{Pl}{EA} \cdot \frac{-32+135+375}{18} = \frac{478}{18} \cdot \frac{Pl}{EA} = \frac{239}{9} \cdot \frac{Pl}{EA} \\
 \therefore v_E &= \frac{239}{9} \cdot \frac{Pl}{EA}
 \end{aligned}$$

【問題 SM-5】 下図に示す曲げ剛性が EI で一定の不静定ばりについて、次の設問に答えよ。

- (1) 支点反力 R_B を不静定力と考えて、添付した“変形の公式”を用いて、これを求めよ。
- (2) 支点反力 R_A , R_C を求めよ。
- (3) 断面力図（せん断力図, 曲げモーメント図）を図示せよ。

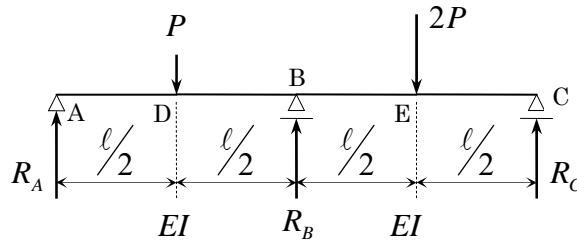


表-8.1(a) 各種はりのたわみおよびたわみ角

	荷重状態	たわみ曲線	特定点のたわみ
単純ばり ①		$y_l = \frac{Pa^2b^2}{6EI\ell} \left(2\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2b} \right)$ $y_r = \frac{Pa^2b^2}{6EI\ell} \left(2\frac{x'}{b} + \frac{x'}{a} - \frac{x'^3}{ab^2} \right)$	$y_c = \frac{Pa^2b^2}{3EI\ell}$
単純ばり ②		$y_l = \frac{Pl^3}{16EI} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{\ell^3} \right) \quad 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2}$	$y_{\max} = y_c = \frac{Pl^3}{48EI}$

【解答】

- (1) 問題の不静定ばりにおいて、支点 B を外したものを静定基本系と考え、まず、“変形の公式”を利用して、 B 点の変位 v_B を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 v_B &= \frac{P \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \ell \right)^2}{6EI(2\ell)} \left(2 \frac{\ell}{\frac{3}{2}\ell} + \frac{\ell}{\frac{\ell}{2}} - \frac{\ell^3}{\left(\frac{\ell}{2} \right) \left(\frac{3}{2}\ell \right)^2} \right) + \frac{2P \left(\frac{3}{2}\ell \right)^2 \left(\frac{\ell}{2} \right)^2}{6EI(2\ell)} \left(2 \frac{\ell}{\frac{3}{2}\ell} + \frac{\ell}{\frac{\ell}{2}} - \frac{\ell^3}{\left(\frac{\ell}{2} \right) \left(\frac{3}{2}\ell \right)^2} \right) \\
 &= \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{3^2}{2^5} \left(\frac{4}{3} + 2 - \frac{8}{9} \right) + \frac{2Pl^3}{6EI} \cdot \frac{3^2}{2^5} \left(\frac{4}{3} + 2 - \frac{8}{9} \right) = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{12+18-8}{9} + \frac{2Pl^3}{6EI} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{12+18-8}{9} \\
 &= \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{22}{32} + \frac{2Pl^3}{6EI} \cdot \frac{22}{32} = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{11}{16} + \frac{2Pl^3}{6EI} \cdot \frac{11}{16} = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \left(\frac{11}{16} + \frac{22}{16} \right) = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{33}{16}
 \end{aligned}$$

次に、静定基本系の B 点に外力 X を作用させたとき、上記の B 点の変位 v_B と等しくなるような外力 X の大きさを求めれば、 B 点の支点反力 R_B が得られる。

そこで、“変形の公式”を利用して、 B 点の変位 v'_B を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 v'_B &= \frac{X(2\ell)^3}{48EI} = \frac{8X\ell^3}{48EI} = \frac{X\ell^3}{6EI} \\
 v_B &= v'_B \text{ であるから、} \quad \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{33}{16} = \frac{X\ell^3}{6EI} \quad \therefore X = \frac{6EI}{\ell^3} \cdot \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{33}{16} = \frac{33}{16}P = R_B
 \end{aligned}$$

よって、 $R_B = \frac{33}{16}P$

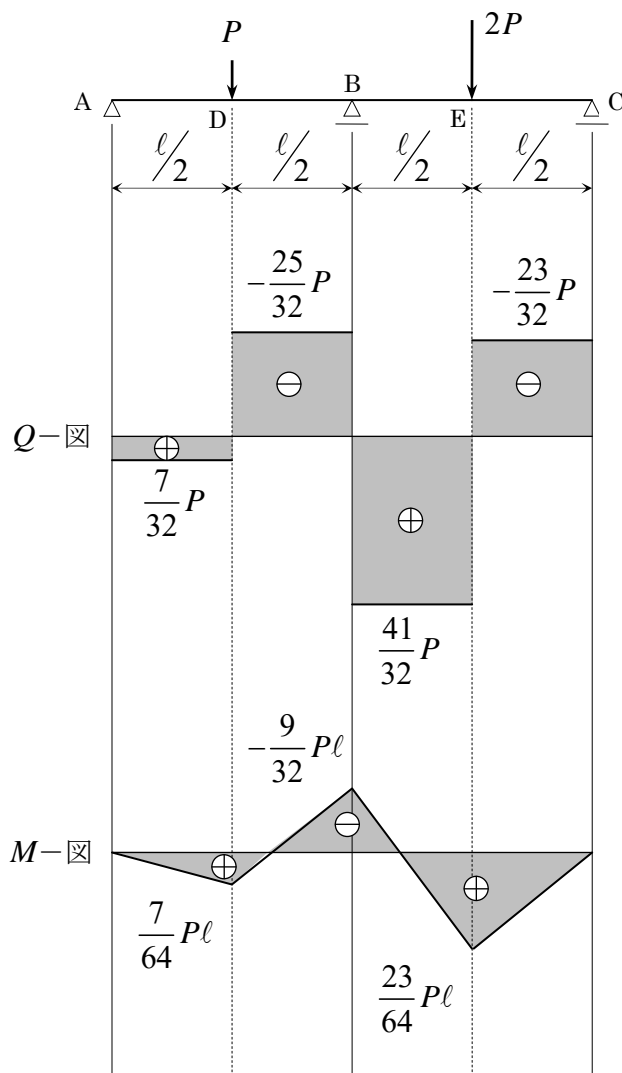
(2) 支点反力 R_A , R_C を求めると、次のようになる。

$$R_A = \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}(2P) - \frac{1}{2}R_B = \frac{5}{4}P - \frac{33}{32}P = \frac{40-33}{32}P = \frac{7}{32}P \quad \therefore R_A = \frac{7}{32}P$$

$$R_C = \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}(2P) - \frac{1}{2}R_B = \frac{7}{4}P - \frac{33}{32}P = \frac{56-33}{32}P = \frac{23}{32}P \quad \therefore R_C = \frac{23}{32}P$$

以上まとめると、支点反力は、 $R_A = \frac{7}{32}P$, $R_B = \frac{33}{16}P$, $R_C = \frac{23}{32}P$ となる。

(3) 断面力図（せん断力図，曲げモーメント図）を図示すると、以下のようになる。



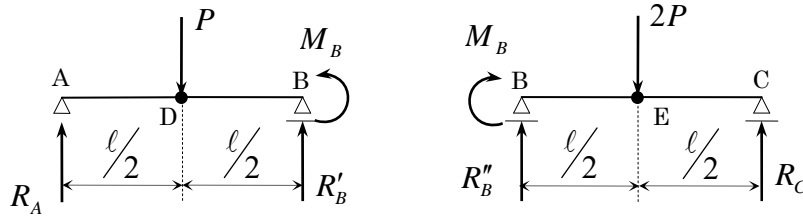
《別解》

A~B~C 間に “3連モーメントの定理” を適用すると、

$$\frac{\ell}{I} M_A + 2 \cdot \left(\frac{\ell}{I} + \frac{\ell}{I} \right) M_B + \frac{\ell}{I} M_C = -6 \cdot \left(\frac{\frac{1}{16} P \ell^2}{I} + \frac{\frac{1}{16} 2 P \ell^2}{I} \right) = -6 \cdot \frac{\ell}{I} \cdot \left(\frac{1}{16} P \ell + \frac{1}{8} P \ell \right) = -6 \cdot \frac{\ell}{I} \cdot \frac{3}{16} P \ell$$

ここで、 $M_A = M_C = 0$ だから、 $4M_B = -6 \cdot \frac{3}{16} P \ell = -\frac{9}{8} P \ell \quad \therefore M_B = -\frac{9}{32} P \ell$

問題の1次不静定ばりは、下図に示すように A~B 間（左スパン）、B~C 間（右スパン）の単純ばりに分けられる。



左スパンについて、

鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R'_B = P$

B 点回りのモーメントの釣合から、 $R_A \ell = M_B + \frac{1}{2} P \ell$

$\therefore R_A \ell = -\frac{9}{32} P \ell + \frac{1}{2} P \ell = \frac{7}{32} P \ell \quad \therefore R_A = \frac{7}{32} P$ さらに、 $R'_B = \frac{25}{32} P$

右スパンについて、

鉛直方向の力の釣合から、 $R''_B + R_C = 2P$

B 点回りのモーメントの釣合から、 $R_C \ell = M_B + 2P \times \frac{1}{2} \ell$

$\therefore R_C \ell = -\frac{9}{32} P \ell + P \ell = \frac{23}{32} P \ell \quad \therefore R_C = \frac{23}{32} P$ さらに、 $R''_B = \frac{41}{32} P$

よって、 $R_B = R'_B + R''_B = \frac{25}{32} P + \frac{41}{32} P = \frac{66}{32} P = \frac{33}{16} P$

以上まとめると、

$$\boxed{M_B = -\frac{9}{32} P \ell}, \quad \boxed{R_A = \frac{7}{32} P}, \quad \boxed{R_B = \frac{33}{16} P}, \quad \boxed{R_C = \frac{23}{32} P}$$