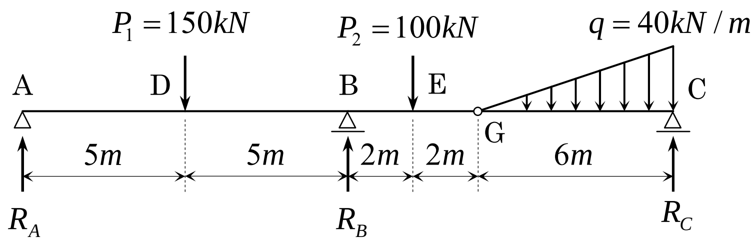
構造力学演習Ⅱ（2019-Report №. 1） 2019/09/03 出題

【問題 SF-G-1】下図に示す静定ゲルバーばりについて、以下の設問に答えよ。

(1) 図中の支点反力 $R_A$， $R_B$， $R_C$ を求めよ。

(2) せん断力図（$Q$－図）、曲げモーメント図（$M$－図）を図示せよ。なお、主要点の数値を記入せよ。




**【解答】**

(1)下図のように、静定ゲルバーばりを〝単純ばり〟と〝張出ばり〟に分解して考える。

まず、〝単純ばり〟について、剛体の釣合を求めると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合から、$R_C+R_G=\dfrac{1}{2}\times q\times 6m=120kN$

G 点回りのモーメント釣合から、$R_C\times 6m=\left(\dfrac{1}{2}\times q\times 6m\right)\times\dfrac{2}{3}\times 6m=120kN\times 4m=480kN\cdot m$

$\therefore R_C=80kN$ 　したがって　 $R_G=40kN$

次に、〝張出ばり〟について、剛体の釣合を求めると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合から、$R_A+R_B=P_1+P_2+R_G=150+100+40=290kN$

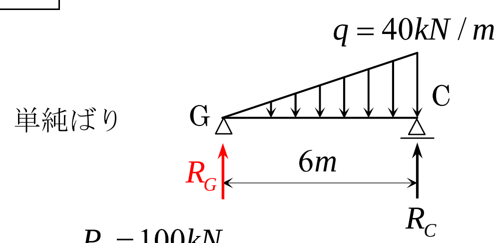
A 点回りのモーメント釣合から、

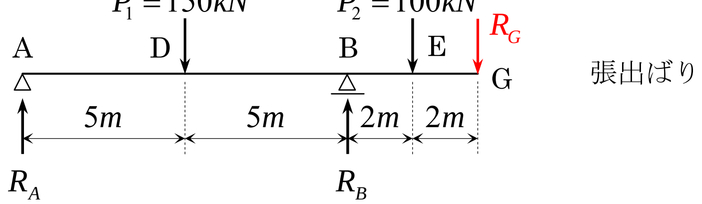
$$
\begin{aligned}
R_B\times 10m &= P_1\times 5m+P_2\times 12m+R_G\times 14m\\
&=150kN\times 5m+100KN\times 12m+40kN\times 14m\\
&=750+1200+560=2510kN\cdot m
\end{aligned}
$$

$\therefore R_B=251kN$ 　したがって　 $R_A=39kN$

よって、支点反力 $R_A$， $R_B$， $R_C$ は、以下のようになる。

$\boxed{R_A=39kN}$, $\boxed{R_B=251kN}$, $\boxed{R_C=80kN}$




(2) せん断力図、曲げモーメント図を図示すると、下図のようになる。

GC 間において、せん断力がゼロになる位置とその位置における曲げモーメントについては、下図 A，B のように考えて、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合から、$Q+R_C=Q+80=qx-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{20}{3}x^2=40x-\dfrac{10}{3}x^2$

$\therefore \dfrac{10}{3}x^2-40x+80=0$ 　 $\therefore x^2-12x+24=0$ 　 $\therefore x=6\pm\sqrt{6^2-24}=6\pm\sqrt{12}=6\pm 2\sqrt{3}$

ここで、$0<x\le 6$ より $x=6-2\sqrt{3}\ m$

モーメントの釣合から

$$M+\frac{40\sqrt{3}}{3}\cdot\left(6-2\sqrt{3}\right)\cdot\frac{6-2\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(6-2\sqrt{3}\right)\cdot\frac{40\left(3-\sqrt{3}\right)}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(6-2\sqrt{3}\right)=R_C\cdot\left(6-2\sqrt{3}\right)$$

$$\therefore M+\frac{40\sqrt{3}}{3}\cdot 2\left(3-\sqrt{3}\right)^2+\frac{160}{9}\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)^3=80\cdot 2\left(3-\sqrt{3}\right)$$

$$\therefore M+160\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)+\frac{320}{3}\cdot\left(9-5\sqrt{3}\right)=160\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)$$

$$M=480-160\sqrt{3}-320\sqrt{3}+480-960+\frac{1600\sqrt{3}}{3}$$

$$=-480\sqrt{3}+\frac{1600\sqrt{3}}{3}=\frac{1600-1440}{3}\sqrt{3}=\frac{160\sqrt{3}}{3}\ kN\cdot m$$

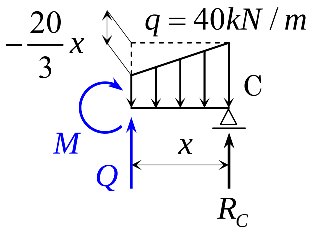


図 A

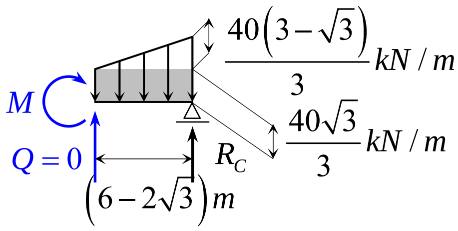
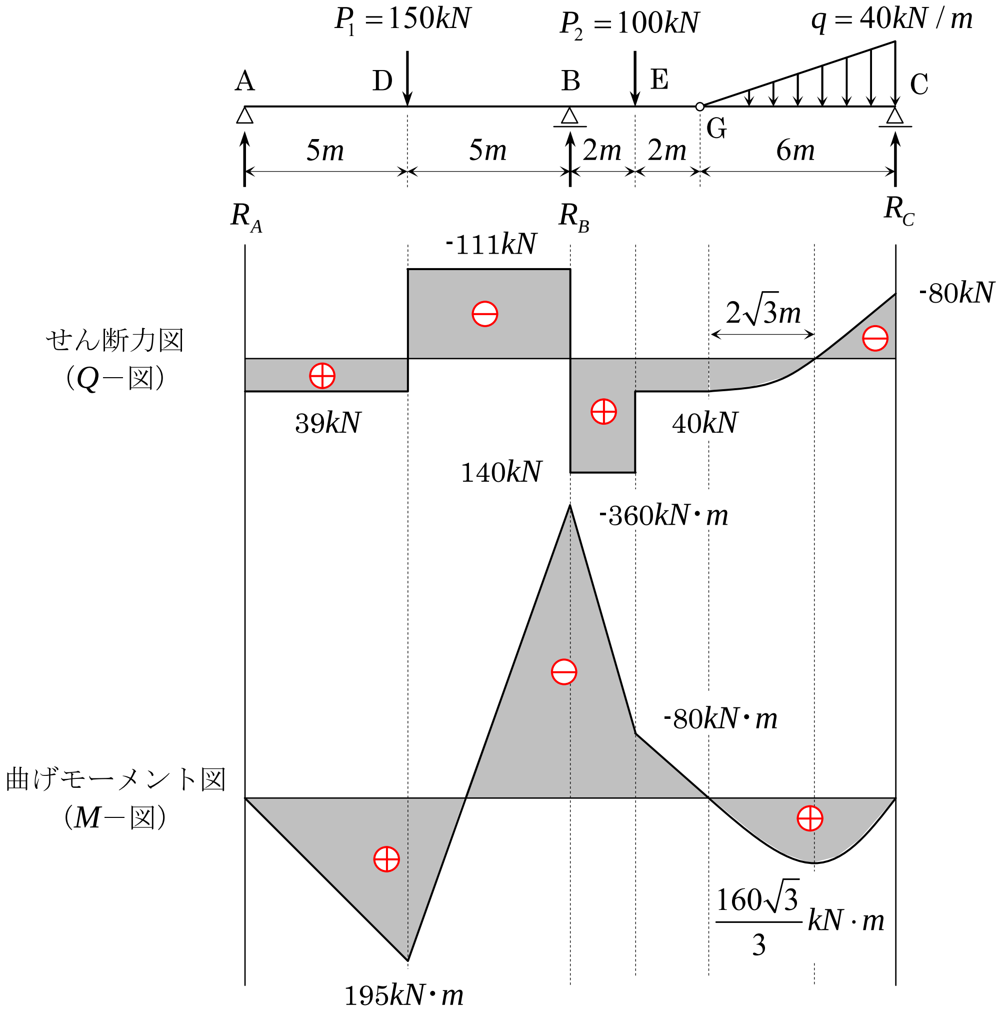
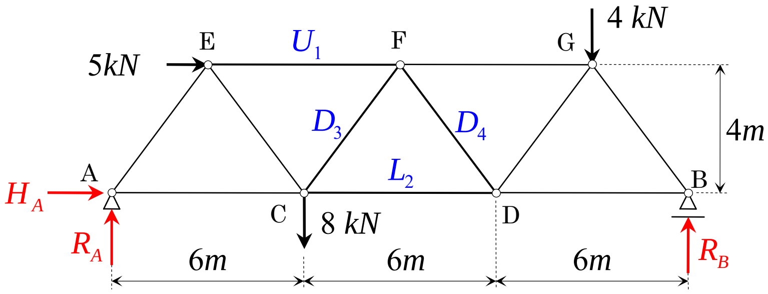


図 B



【問題 SF-T-1】下図に示す静定ワーレントラスの部材力 $U_1$， $D_3$， $D_4$， $L_2$ を求めよ。




【解答】

まず、支点反力 $H_A$， $R_A$， $R_B$ を求めると、

水平方向の力の釣合から、　　$H_A + 5 = 0$　　$\therefore H_A = -5\ (kN)$

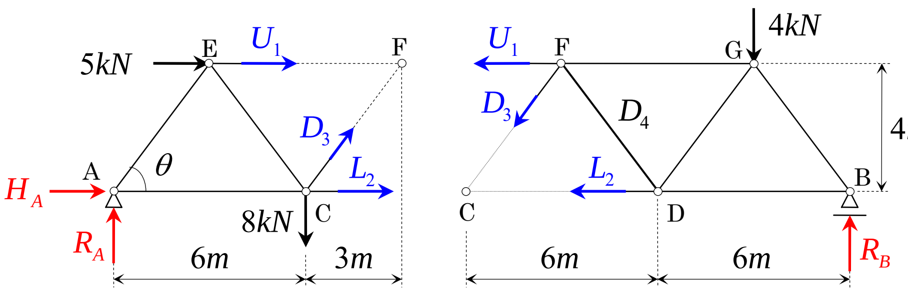
鉛直方向の力の釣合から、　　$R_A + R_B = 8 + 4 = 12$

$A$ 点回りのモーメントの釣合から、

$$R_B \times 18m = 8kN \times 6m + 4kN \times 15m + 5kN \times 4m$$
$$= 48 + 60 + 20 = 128$$

$$\therefore R_B = \frac{128}{18} = \frac{64}{9}\ (kN) \qquad \text{よって、} R_A = \frac{44}{9}\ (kN)$$

次に、下図に示すように $t$−$t$ で切断して、左自由体と右自由体それぞれについて考えると、




$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$
$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

［左自由体について］　　　　　　　　［右自由体について］

水平方向の力の釣合から、

$$H_A + 5 + U_1 + \frac{3}{5}D_3 + L_2 = 0 \qquad U_1 + L_2 + \frac{3}{5}D_3 = 0$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5}D_3 + R_A = 8 \qquad \frac{4}{5}D_3 + 4 = R_B$$

$$\therefore \frac{4}{5}D_3 = 8 - \frac{44}{9} = \frac{28}{9} \qquad \therefore \frac{4}{5}D_3 = \frac{64}{9} - 4 = \frac{28}{9}$$

$$\therefore D_3 = \frac{28}{9} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{9}\ (kN)$$

$F$ 点回りのモーメントの釣合から、

$$4L_2 + 4H_A + 8kN \times 3m = R_A \times 9m \qquad 4L_2 + 4kN \times 6m = R_B \times 9m$$

$$\therefore 4L_2 - 20 + 24 = 44 \qquad \therefore 4L_2 + 24 = 64$$

$$\therefore 4L_2 = 40$$

$$\therefore L_2 = 10\ (kN)$$

$C$ 点回りのモーメントの釣合から、

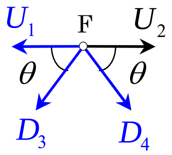
$$4U_1 + 5kN \times 4m + R_A \times 6m = 0 \qquad 4U_1 + R_B \times 12m = 4kN \times 9m$$

$$\therefore 4U_1 + 20 + \frac{44}{9} \cdot 6 = 0 \qquad \therefore 4U_1 + \frac{64}{9} \cdot 12 = 36$$

$$\therefore 4U_1 = -\frac{88}{3} - 20 = -\frac{148}{3} \qquad \therefore 4U_1 = 36 - \frac{256}{3} = -\frac{148}{3}$$

$$\therefore U_1 = -\frac{148}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{37}{3}\,(kN)$$

さらに、$F$ 点での力の釣合を考えると、




水平方向の力の釣合から、 $U_1 + \frac{3}{5}D_3 = U_2 + \frac{3}{5}D_4$

鉛直方向の力の釣合から、 $\frac{4}{5}D_3 + \frac{4}{5}D_4 = 0$

$$\therefore D_4 = -D_3 = -\frac{35}{9}\,(kN)$$

以上をまとめると、

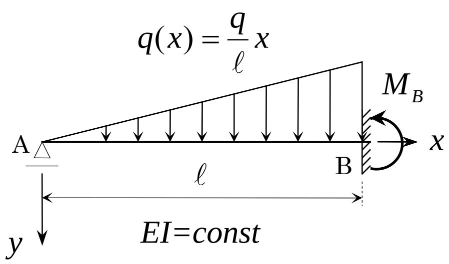
$\boxed{U_1 = -\frac{37}{3}\,(kN)}$, $\boxed{D_3 = \frac{35}{9}\,(kN)}$, $\boxed{D_4 = -\frac{35}{9}\,(kN)}$, $\boxed{L_2 = 10\,(kN)}$

【問題 BD4-B-2】下図に示すような $A$ 点が単純支持、$B$ 点が固定端の不静定ばりに等変分布荷重 $q(x)$ が作用するとき、以下の設問に答えよ。ただし、はりの曲げ剛性は、$EI$ で一定とする。

(1) はりのたわみ $y(x)$ とたわみ角 $\theta(x)$ の式を求めよ。

(2) $B$ 点の支点モーメント $M_B$ を求めよ。

(3) 最大のたわみ $y_{\max}$ とその発生位置 $x_{\max}$ を求めよ。




【解答】

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q(x)=\dfrac{q}{\ell}x$ を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$EIy''=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120}+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ を求める。

1) $x=0$ のとき、 $y=0$ より、 $C_4=0$

2) $x=0$ のとき、$y''=0$ より、 $C_2=0$

3) $x=\ell$ のとき、$y=0$ より、 $\dfrac{q}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^5}{120}+\dfrac{C_1}{6}\ell^3+C_3\ell=0 \quad \therefore\dfrac{q}{120}\ell^3+\dfrac{C_1}{6}\ell^2+C_3=0$ ………①

4) $x=\ell$ のとき、$y'=0$ より、 $\dfrac{q}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^4}{24}+\dfrac{C_1}{2}\ell^2+C_3=0 \quad \therefore\dfrac{q}{24}\ell^3+\dfrac{C_1}{2}\ell^2+C_3=0$ ………②

①−②より、$\left(\dfrac{1}{120}-\dfrac{1}{24}\right)\cdot q\ell^3+\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot C_1\ell^2=0 \quad \therefore -\dfrac{1}{30}q\ell-\dfrac{1}{3}C_1=0 \qquad \therefore C_1=-\dfrac{1}{10}q\ell$

これを、②に代入すると、$\dfrac{1}{24}q\ell^3-\dfrac{1}{20}q\ell^3+C_3=0 \quad \therefore C_3=\left(\dfrac{1}{20}-\dfrac{1}{24}\right)\cdot q\ell^3=\dfrac{6-5}{120}\cdot q\ell^3=\dfrac{1}{120}q\ell^3$

よって、

$$EIy'''=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{10}q\ell$$

$$EIy''=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6}-\frac{1}{10}q\ell x$$

$$EIy'=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24}-\frac{1}{20}q\ell x^2+\frac{1}{120}q\ell^3$$

$$EIy=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120}-\frac{1}{60}q\ell x^3+\frac{1}{120}q\ell^3x$$

したがって、はりのたわみ $y(x)$ とたわみ角 $\theta(x)$ の式は、次のようになる。

$$\boxed{\begin{aligned}\theta(x)&=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24EI}-\frac{1}{20}\cdot\frac{q\ell}{EI}x^2+\frac{1}{120}\cdot\frac{q\ell^3}{EI}=\frac{q\ell^3}{120EI}\left\{5\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-6\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2+1\right\}\\ y(x)&=\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120EI}-\frac{1}{60}\cdot\frac{q\ell}{EI}x^3+\frac{1}{120}\cdot\frac{q\ell^3}{EI}x\\ &=\frac{q\ell^4}{120EI}\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^5-2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}=\frac{q\ell^4}{120EI}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\cdot\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2+1\right\}\end{aligned}}$$

(2) $B$ 点の支点モーメント $M_B$ は、次のようになる。

$$M_B=-EIy''\big|_{x=\ell}=-\left(\frac{q}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6}-\frac{1}{10}q\ell x\right)\Bigg|_{x=\ell}=-\left(\frac{1}{6}q\ell^2-\frac{1}{10}q\ell^2\right)=-\frac{5-3}{30}q\ell^2=-\frac{1}{15}q\ell^2$$

$$\therefore\boxed{M_B=-\frac{1}{15}q\ell^2}$$

(3) (1)で得たたわみ角 $\theta(x)$ の式において、$X=\dfrac{x}{\ell}$ として、$\theta(x)=0$ を解くと、

$$5X^4-6X^2+1=0 \qquad \therefore (X-1)(X+1)(5X^2-1)=0$$

ここで、$0<X<1$ だから、$X=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

よって、$x_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ell$ のとき、たわみ $y(x)$ は、次のような最大たわみ $y_{\max}$ となる。

$$\begin{aligned}y_{\max}&=\frac{q\ell^4}{120EI}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^4-2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right\}=\frac{q\ell^4}{120EI}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left\{\frac{1}{25}-\frac{2}{5}+1\right\}\\ &=\frac{q\ell^4}{120EI}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1-10+25}{25}=\frac{q\ell^4}{120EI}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{16}{25}=\frac{16\sqrt{5}}{125}\cdot\frac{q\ell^4}{120EI}\end{aligned}$$

したがって、$x_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ell$ のとき、

$$\boxed{\begin{aligned}y_{\max}&=\frac{16\sqrt{5}}{125}\cdot\frac{q\ell^4}{120EI}=0.286216701\cdots\frac{q\ell^4}{120EI}\cong 0.2862\cdot\frac{q\ell^4}{120EI}\\ &=\frac{2\sqrt{5}}{125}\cdot\frac{q\ell^4}{15EI}=\frac{2\sqrt{5}}{1875}\cdot\frac{q\ell^4}{EI}=0.002385139\cdots\frac{q\ell^4}{EI}\cong 0.002385\cdot\frac{q\ell^4}{EI}\end{aligned}}$$