構造力学演習Ⅱ（2017-№.１）　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2017/09/05

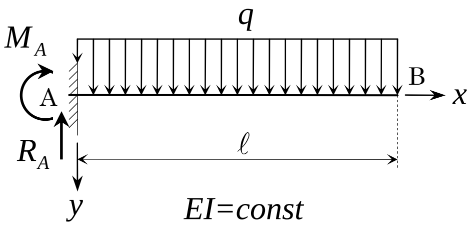
【問題 BD4-CL-1】下図に示す曲げ剛性 EI が一定で、A 点固定の“片持ばり”について、次の設問に答えよ。

(1) 支点反力 M_A， R_A を求めよ。

(2) せん断力 $Q(x)$、曲げモーメント $M(x)$ の式を求め、次に、断面力図、すなわち、せん断力図（Q－図）、曲げモーメント図（M－図）を図示せよ。

(3) はりの変形の基本式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$ を用いて、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ を求めよ。

(4) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を用いて、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ を求めよ。

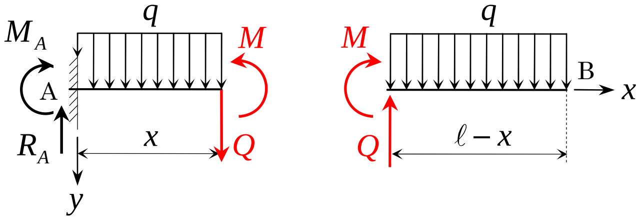


【解答】

(1) 鉛直方向の力の釣合より、$\boxed{R_A=q\ell}$

A 点回りのモーメントの釣合より、$M_A+q\ell\times\dfrac{\ell}{2}=0$　　　$\therefore\boxed{M_A=-\dfrac{1}{2}q\ell^2}$

(2) A 点から距離 x の点ではりを切断すると、下図のようになる。



左自由体について、釣合を考えると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合より、$Q+q\cdot x=R_A$　　　$\therefore Q(x)=q\cdot\ell-q\cdot x=q\cdot(\ell-x)$

切断点回りのモーメントの釣合より、

$$M+q\cdot x\cdot\frac{x}{2}=M_A+R_A\cdot x\ \therefore M(x)=-q\cdot\frac{x^2}{2}+q\ell\cdot x-\frac{1}{2}q\ell^2=-\frac{q}{2}(\ell-x)^2$$

右自由体について、釣合を考えると、次のようになる。

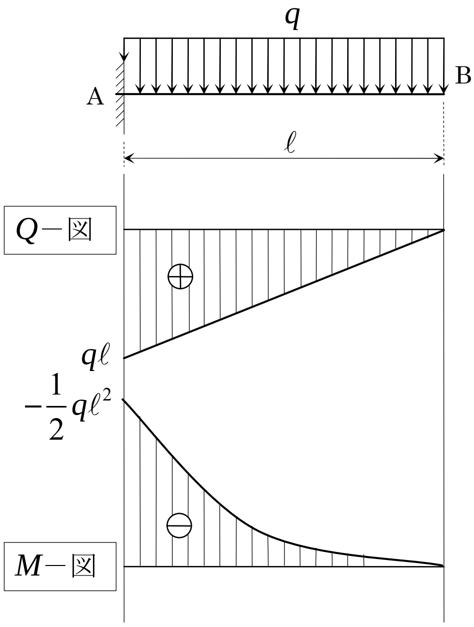
鉛直方向の力の釣合より、$Q=q\cdot(\ell-x)$　　　$\therefore Q(x)=q\cdot(\ell-x)$

切断点回りのモーメントの釣合より、$M+q\cdot(\ell-x)\cdot\dfrac{\ell-x}{2}=0$　　　$\therefore M(x)=-\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2$

よって、せん断力 $Q(x)$、曲げモーメント $M(x)$ の式は、次のようになる。

$\boxed{Q(x)=q\cdot(\ell-x)}$, $\boxed{M(x)=-\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2}$

次に、断面力図、即ち、せん断力図（Q－図）、曲げモーメント図（M－図）を図示すると、下図のようになる。



(3) はりの変形の基本式$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$を変形すると、$EI\dfrac{d^2y}{dx^2}=-M$ となり、これに(2)の曲げモーメント$M(x)$の式を代入すると、$EI\dfrac{d^2y}{dx^2}=q\cdot\dfrac{x^2}{2}-q\ell\cdot x+\dfrac{1}{2}q\ell^2=\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2$ となる。

《解法Ⅰ》

$EIy''=q\cdot\dfrac{x^2}{2}-q\ell\cdot x+\dfrac{1}{2}q\ell^2$ を用いて、逐次積分すると、

$$EIy'=q\cdot\frac{x^3}{6}-q\ell\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{q\ell^2}{2}x+C_1 \qquad EIy=q\cdot\frac{x^4}{24}-q\ell\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{q\ell^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1, C_2を求める。

①$x=0$で、たわみがゼロ、即ち、$y=0$より、　$C_2=0$

②$x=0$で、たわみ角がゼロ、即ち、$y'=0$より、　$C_1=0$

よって、たわみ角$\theta(x)$とたわみの式$y(x)$は、次のようになる。

$$EIy'=q\cdot\frac{x^3}{6}-q\ell\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{q\ell^2}{2}x \qquad EIy=q\cdot\frac{x^4}{24}-q\ell\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{q\ell^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$\boxed{\therefore\left\{\begin{aligned}\theta(x)=y'(x)&=\frac{q}{6EI}x^3-\frac{q}{2EI}\ell x^2+\frac{q}{2EI}\ell^2x=\frac{q\ell^3}{6EI}\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^3-3\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2+3\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}\\ y(x)&=\frac{q}{24EI}x^4-\frac{q}{6EI}\ell x^3+\frac{q}{4EI}\ell^2x^2=\frac{q\ell^4}{24EI}\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-4\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+6\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}\end{aligned}\right.}$$

《解法Ⅱ》

$EIy''=\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2$ を用いて、逐次積分すると、

$$EIy'=\frac{q}{2}\cdot\left\{-\frac{(\ell-x)^3}{3}\right\}+C_1 \qquad EIy=\frac{q}{2}\cdot\left\{\frac{(\ell-x)^4}{12}\right\}+C_1x+C_2$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1, C_2を求める。

①$x=0$で、たわみがゼロ、即ち、$y=0$より、　$\dfrac{q}{2}\cdot\dfrac{\ell^4}{12}+C_2=0\quad\therefore C_2=-\dfrac{q\ell^4}{24}$

②$x=0$で、たわみ角がゼロ、即ち、$y'=0$より、　$-\dfrac{q}{2}\cdot\dfrac{\ell^3}{3}+C_1=0 \quad \therefore C_1=\dfrac{q\ell^3}{6}$

よって、たわみ角$\theta(x)$とたわみの式$y(x)$は、次のようになる。

$$EIy'=-\frac{q(\ell-x)^3}{6}+\frac{q\ell^3}{6}=\frac{q}{6}\cdot\left\{\ell^3-(\ell-x)^3\right\}=\frac{q\ell^3}{6}\cdot\left\{1-\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^3\right\}$$

$$EIy=\frac{q}{2}\cdot\left\{\frac{(\ell-x)^4}{12}\right\}+\frac{q\ell^3}{6}x-\frac{q\ell^4}{24}=\frac{q\ell^4}{24}\cdot\left\{\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^4+4\left(\frac{x}{\ell}\right)-1\right\}$$

$$\therefore\boxed{\begin{cases}\theta(x)=y'(x)=\dfrac{q\ell^3}{6EI}\left\{1-\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)^3\right\}\\[2ex] y(x)=\dfrac{q\ell^4}{24EI}\left\{\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)^4+4\left(\dfrac{x}{\ell}\right)-1\right\}\end{cases}}$$

(4) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式$EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=qx+C_1$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1，C_2，C_3，C_4を求める。

①$x=0$で、たわみ角がゼロ、即ち、$y'=0$より、　$C_3=0$

②$x=0$で、たわみがゼロ、即ち、$y=0$より、　$C_4=0$

③$x=\ell$で、せん断力がゼロ、即ち、$y'''=0$より、　$q\ell+C_1=0 \quad \therefore C_1=-q\ell$

④$x=\ell$で、曲げモーメントがゼロ、即ち、$y''=0$より、$\dfrac{q}{2}\ell^2-q\ell^2+C_2=0 \quad \therefore C_2=\dfrac{q}{2}\ell^2$

よって、たわみ角$\theta(x)$とたわみの式$y(x)$は、次のようになる。

$$EIy'''=qx-q\ell$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2-q\ell x+\frac{q}{2}\ell^2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3-\frac{q}{2}\ell x^2+\frac{q}{2}\ell^2x$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4-\frac{q}{6}\ell x^3+\frac{q}{4}\ell^2x^2$$

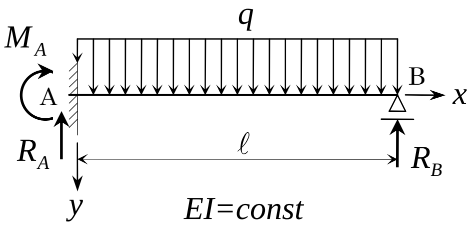
$$\therefore\boxed{\begin{cases}\theta(x)=y'(x)=\dfrac{q}{6EI}x^3-\dfrac{q}{2EI}\ell x^2+\dfrac{q}{2EI}\ell^2x\\[1ex] \qquad=\dfrac{q\ell^3}{6EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3-3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2+3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right\}\\[2ex] y(x)=\dfrac{q}{24EI}x^4-\dfrac{q}{6EI}\ell x^3+\dfrac{q}{4EI}\ell^2x^2\\[1ex] \qquad=\dfrac{q\ell^4}{24EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^4-4\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3+6\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right\}\end{cases}}$$

【問題 BD4-B-1A】下図に示す曲げ剛性 EI が一定で、“A 点固定、B 点単純支持のはり”について、次の設問に答えよ。

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を用いて、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ を求めよ。

(2) 支点反力 M_A，R_A，R_B を求めよ。

(3) せん断力 $Q(x)$、曲げモーメント $M(x)$ の式を求め、次に、断面力図、すなわち、せん断力図（Q－図）、曲げモーメント図（M－図）を図示せよ。



【解答】

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=qx+C_1$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1，C_2，C_3，C_4 を求める。

(a) $x=0$ のとき、$y'=0$ より、　$C_3=0$

(b) $x=0$ のとき、$y=0$ より、　$C_4=0$

(c) $x=\ell$ のとき、$y''=0$ より、　$\dfrac{q}{2}\ell^2+C_1\ell+C_2=0$　………①

(d) $x=\ell$ のとき、$y=0$ より、　$\dfrac{q}{24}\ell^4+\dfrac{C_1}{6}\ell^3+\dfrac{C_2}{2}\ell^2=0$　………②

①を変形すると、　$C_1\ell+C_2=-\dfrac{q}{2}\ell^2$　………①'

②を変形すると、　$C_1\ell+3C_2=-\dfrac{q}{4}\ell^2$　………②'

①'−②'より、　$-2C_2=-\dfrac{q}{4}\ell^2$　　$\therefore C_2=\dfrac{1}{8}q\ell^2$

これを①'に代入すると、　$C_1\ell=-\dfrac{q}{2}\ell^2-\dfrac{1}{8}q\ell^2=-\dfrac{5}{8}q\ell^2$　　$\therefore C_1=-\dfrac{5}{8}q\ell$

よって、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ は、次のようになる。

$$EIy''' = qx - \frac{5}{8}q\ell$$

$$EIy'' = \frac{q}{2}x^2 - \frac{5}{8}q\ell x + \frac{1}{8}q\ell^2$$

$$EIy' = \frac{q}{6}x^3 - \frac{5}{16}q\ell x^2 + \frac{1}{8}q\ell^2 x$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 - \frac{5}{48}q\ell x^3 + \frac{1}{16}q\ell^2 x^2$$

$$\boxed{\therefore \begin{cases} \theta(x) = y'(x) = \dfrac{q}{6EI}x^3 - \dfrac{5}{16EI}q\ell x^2 + \dfrac{1}{8EI}q\ell^2 x \\ \qquad = \dfrac{q\ell^3}{48EI}\left\{8\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 - 15\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2 + 6\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right\} \\ y(x) = \dfrac{q}{24EI}x^4 - \dfrac{5}{48EI}q\ell x^3 + \dfrac{1}{16EI}q\ell^2 x^2 \\ \qquad = \dfrac{q\ell^4}{48EI}\left\{2\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^4 - 5\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 + 3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right\} \end{cases}}$$

(2) 次に、支点反力 M_A, R_A, R_B を求めると、以下のようになる。

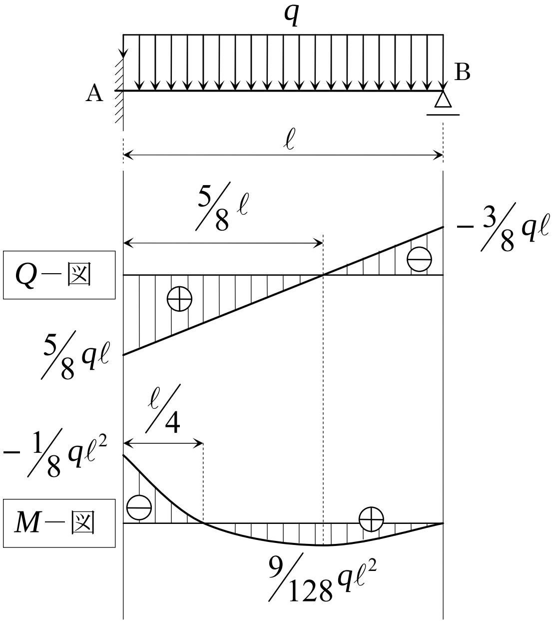
$M_A = -EIy''$ より、 $\quad M_A = -EIy''\big|_{x=0} = -\dfrac{1}{8}q\ell^2$

$Q = -EIy'''$ より、 $\quad R_A = Q_A = -EIy'''\big|_{x=0} = \dfrac{5}{8}q\ell$

また、 $\quad -R_B = Q_B = -EIy'''\big|_{x=\ell} = -q\ell + \dfrac{5}{8}q\ell = -\dfrac{3}{8}q\ell$

以上より、 $\boxed{M_A = -\dfrac{1}{8}q\ell^2}$ $\boxed{R_A = \dfrac{5}{8}q\ell}$ $\boxed{R_B = \dfrac{3}{8}q\ell}$

(3) さらに、せん断力図（Q－図）、曲げモーメント図（M－図）を図示すると、下図のようになる。



曲げモーメントの最大値を求めると、

$$M_{\max} = -EIy''\big|_{x=\frac{5}{8}\ell}$$

$$= -\frac{q}{2}\cdot\frac{25}{64}\ell^2 + \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\ell - \frac{1}{8}q\ell^2$$

$$= \left(-\frac{25}{128} + \frac{25}{64} - \frac{1}{8}\right)\cdot q\ell^2$$

$$= \frac{-25+50-16}{128}q\ell^2$$

$$= \frac{9}{128}q\ell^2$$

$M = -EIy'' = -\dfrac{q}{2}x^2 + \dfrac{5}{8}q\ell x - \dfrac{1}{8}q\ell^2 = 0$ を解くと、

$$-4x^2 + 5\ell x - \ell^2 = 0$$

$$\therefore 4x^2 - 5\ell x + \ell^2 = 0$$

$$\therefore (4x-\ell)(x-\ell) = 0$$

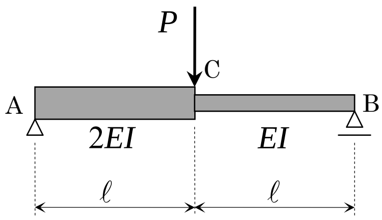
$$\therefore x = \frac{\ell}{4},\quad x = \ell$$

【問題 EL-HSB-2】下図に示すような“変断面単純ばり”の C 点に集中荷重 P が作用するとき、以下の設問に答えよ。ただし、A～C 間の曲げ剛性は $2EI$，C～B 間の曲げ剛性は EI とする。

(1) A 点のたわみ角 θ_A と B 点のたわみ角 θ_B を求めよ。

(2) C 点のたわみ角 θ_C とたわみ y_C を求めよ。

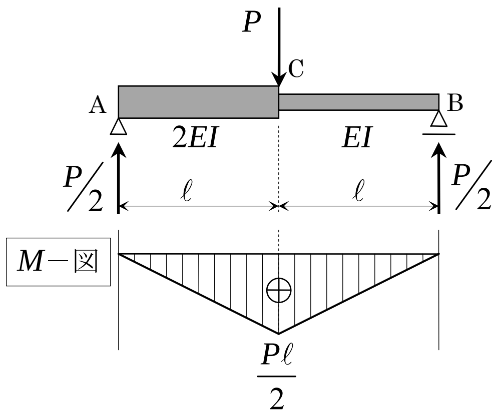
(3) 最大のたわみ $y_{\max}$ とその発生位置 X （B 点からの距離）を求めよ。



【解答】

まず、曲げモーメント図（M－図）を描くと、右上図のようになる。

次に、境界条件を考慮して、〝共役ばり〟を作成し、これに〝弾性荷重〟を作用させると、右下図のようになる。



(1) 右下図について、$\alpha = \dfrac{P\ell}{4EI}$ とおいて、支点反力 $\tilde{R}_A$，$\tilde{R}_B$ を求めると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合から、

$$\tilde{R}_A + \tilde{R}_B = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\ell + \frac{1}{2}\cdot 2\alpha\cdot\ell = \left(\frac{1}{2}+1\right)\alpha\ell = \frac{3}{2}\alpha\ell$$

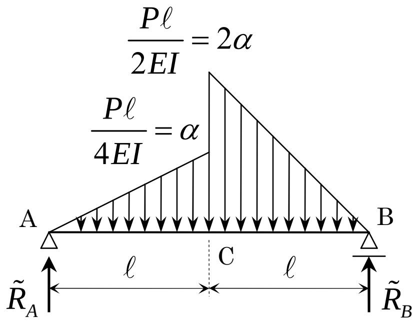
B 点回りのモーメントの釣合から、

$$\tilde{R}_A\cdot 2\ell = \frac{1}{2}\alpha\ell\cdot\left(\ell+\frac{\ell}{3}\right) + \alpha\ell\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{1}{2}\alpha\ell\cdot\frac{4}{3}\ell + \frac{2}{3}\alpha\ell^2$$

$$= \frac{2}{3}\alpha\ell^2 + \frac{2}{3}\alpha\ell^2 = \frac{4}{3}\alpha\ell^2$$

$$\therefore \tilde{R}_A = \frac{2}{3}\alpha\ell$$

また、$\tilde{R}_B = \left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}\right)\alpha\ell = \dfrac{9-4}{6}\alpha\ell = \dfrac{5}{6}\alpha\ell$



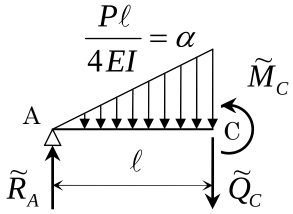
したがって、A 点のたわみ角 θ_A と B 点のたわみ角 θ_B は、次のようになる。

$$\boxed{\theta_A = \tilde{Q}_A = \tilde{R}_A = \frac{2}{3}\cdot\frac{P\ell^2}{4EI} = \frac{1}{6}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}} \qquad \boxed{\theta_B = \tilde{Q}_B = -\tilde{R}_B = -\frac{5}{6}\cdot\frac{P\ell^2}{4EI} = -\frac{5}{24}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}}$$

(2) C 点のたわみ角 θ_C とたわみ y_C は、右図について解いて、

$$\tilde{Q}_C + \frac{1}{2}\alpha\ell = \tilde{R}_A \qquad \therefore \tilde{Q}_C = \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\alpha\ell = \frac{1}{6}\alpha\ell$$

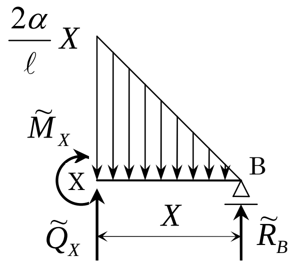
$$\tilde{M}_C + \frac{1}{2}\alpha\ell\cdot\frac{\ell}{3} = \tilde{R}_A\cdot\ell \qquad \therefore \tilde{M}_C = \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)\alpha\ell^2 = \frac{1}{2}\alpha\ell^2$$



したがって、C 点のたわみ角 θ_C とたわみ y_C は、次のようになる。

$$\boxed{\theta_C = \tilde{Q}_C = \frac{1}{6}\cdot\frac{P\ell^2}{4EI} = \frac{1}{24}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}} \qquad \boxed{y_C = \tilde{M}_C = \frac{1}{2}\cdot\frac{P\ell^3}{4EI} = \frac{1}{8}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

(3) 最大のたわみ $y_{\max}$ とその発生位置 X （B 点からの距離）については、右図で考える。最大のたわみ $y_{\max}$ が発生するのは、せん断力 $\widetilde{Q}_X = 0$ となるときであるから、最大のたわみの発生位置 X は、次のようになる。



$$\widetilde{Q}_X + \widetilde{R}_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\alpha}{\ell}X\cdot X \qquad \therefore \widetilde{Q}_X + \frac{5}{6}\alpha\ell = \frac{\alpha}{\ell}X^2$$

ここで、$\widetilde{Q}_X = 0$ であるから、$\dfrac{\alpha}{\ell}X^2 = \dfrac{5}{6}\alpha\ell$

$$\therefore X^2 = \frac{\ell}{\alpha}\cdot\frac{5}{6}\alpha\ell = \frac{5}{6}\ell^2$$ すなわち、$X > 0$ より、$X = \dfrac{\sqrt{30}}{6}\ell$

このとき、たわみ、すなわち、曲げモーメントは、次のようになる。

$$\widetilde{M}_X + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\alpha}{\ell}\cdot\frac{\sqrt{30}}{6}\ell\cdot\frac{\sqrt{30}}{6}\ell\cdot\frac{X}{3} = \widetilde{R}_B X \qquad \therefore \widetilde{M}_X + \frac{5}{6}\alpha\ell\cdot\frac{X}{3} = \frac{5}{6}\alpha\ell\cdot X$$

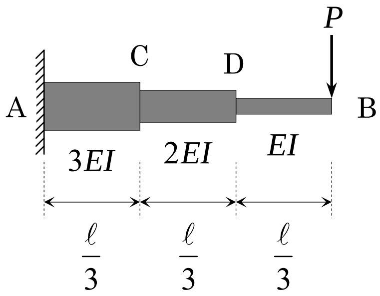
$$\therefore \widetilde{M}_X = \frac{5}{6}\alpha\ell\cdot\frac{2}{3}X = \frac{5}{6}\alpha\ell\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{30}}{6}\ell = \frac{5\sqrt{30}}{54}\alpha\ell^2$$

よって、最大のたわみ $y_{\max}$ は、$y_{\max} = \widetilde{M}_X = \dfrac{5\sqrt{30}}{54}\alpha\ell^2 = \dfrac{5\sqrt{30}}{54}\cdot\dfrac{P\ell^3}{4EI} = \dfrac{5\sqrt{30}}{216}\cdot\dfrac{P\ell^3}{EI}$

したがって、最大のたわみ $y_{\max}$ とその発生位置 X （B 点からの距離）は、次のようになる。

$X = \dfrac{\sqrt{30}}{6}\ell$ のとき、$\boxed{y_{\max} = \dfrac{5\sqrt{30}}{54}\alpha\ell^2 = \dfrac{5\sqrt{30}}{216}\cdot\dfrac{P\ell^3}{EI}}$

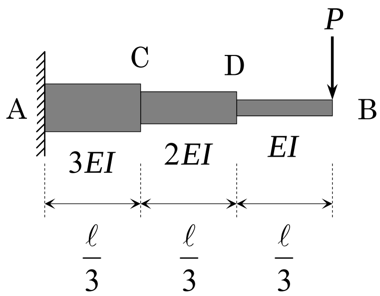
【問題 EL-HCL-2】〝弾性荷重法〟により、下図に示すような“変断面片持ばり AB”の自由端 B のたわみ v_B を求めよ。なお、“変断面片持ばり AB”の曲げ剛性は、A〜C 間，C〜D 間，D〜B 間でそれぞれ $3EI$，$2EI$ ，EI である。

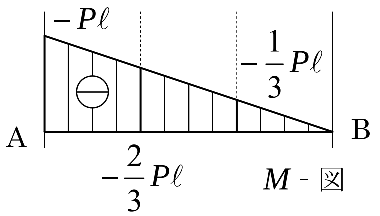


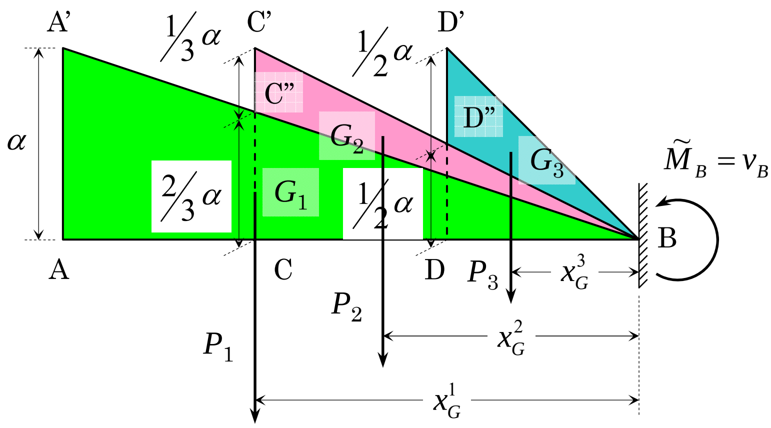
【解答】

まず、変断面片持ばりの曲げモーメント図は、下左図のようになる。

次に、〝モールの定理〟より、〝共役ばり〟に〝弾性荷重〟を載荷したものは下右図のようになり、これについて支点曲げモーメント $\widetilde{M}_B = v_B$ を求めればよいことになる。なお、ここに $-\dfrac{P\ell}{3EI} = \alpha$ とする。







ここで、

$$P_1 = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad x_G^1 = \frac{2}{3}\ell$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{1}{9}\alpha\ell \qquad x_G^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{4}{9}\ell$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\ell}{3} = \frac{1}{12}\alpha\ell \qquad x_G^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\ell = \frac{2}{9}\ell$$

であるから、モーメントの釣合から、次のようになる。

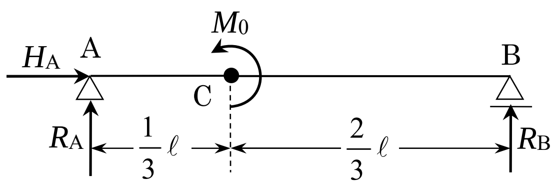
$$\widetilde{M}_B + P_1\cdot x_G^1 + P_2\cdot x_G^2 + P_3\cdot x_G^2 = 0$$

$$\therefore -\widetilde{M}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell\cdot\frac{2}{3}\ell + \frac{1}{9}\alpha\ell\cdot\frac{4}{9}\ell + \frac{1}{12}\alpha\ell\cdot\frac{2}{9}\ell = \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{81}+\frac{1}{54}\right)\cdot\alpha\ell^2 = \frac{54+8+3}{162}\alpha\ell^2 = \frac{65}{162}\alpha\ell^2$$

$$\therefore v_B = \widetilde{M}_B = -\frac{65}{162}\alpha\ell = -\frac{65}{162}\cdot\left(-\frac{P\ell}{3EI}\right)\cdot\ell^2 = \frac{65}{486}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

よって、$\boxed{v_B = \dfrac{65}{486}\cdot\dfrac{P\ell^3}{EI}}$

【問題 1】下図に示すような単純ばり AB の C 点に集中曲げモーメント M_0 が作用するとき、
断面力図（せん断力 Q 図，曲げモーメント M 図）を図示せよ。



【解答】

支点反力 H_A， R_A， R_B を、次の３つの剛体の釣合条件より求める。

水平方向の力の釣合から、　$H_A = 0$

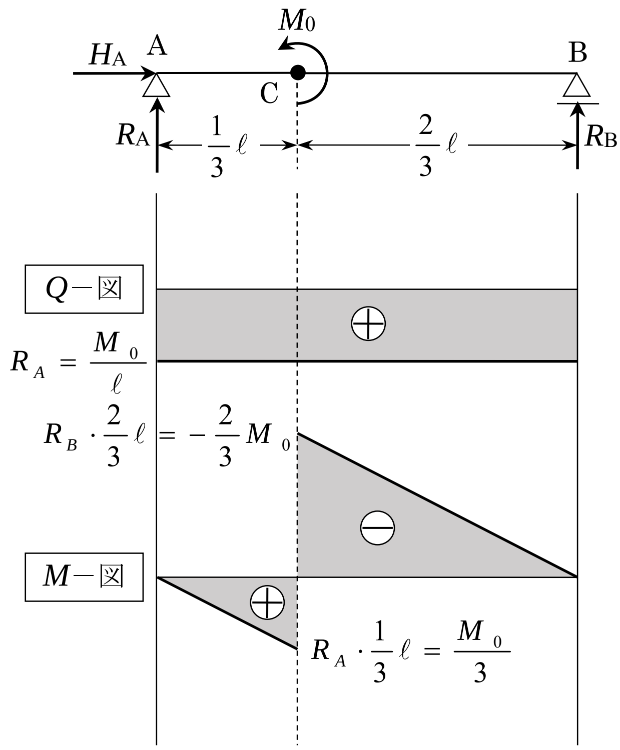
鉛直方向の力の釣合から、　$R_A + R_B = 0$

A 点回りのモーメントの釣合から、　$M_0 + R_B \cdot \ell = 0$

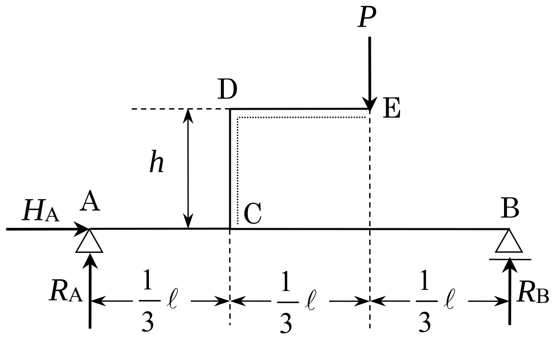
または、B 点回りのモーメントの釣合から、　$M_0 = R_A \cdot \ell$

これらから、支点反力は、 $H_A = 0$， $R_A = \dfrac{M_0}{\ell}$， $R_B = -\dfrac{M_0}{\ell}$ となる。

断面力図、即ち、せん断力図（Q－図），曲げモーメント図（M－図）を描くと、以下のようになる。



【問題 2】下図に示すようなラーメン CDE が付加された単純ばり AB の E 点に集中荷重 P が作用するとき、断面力図（軸力 N 図，せん断力 Q 図，曲げモーメント M 図）を図示せよ。



【解答】

支点反力 H_A，R_A，R_B を、次の 3 つの剛体の釣合条件より求める。

水平方向の力の釣合から、　　$H_A = 0$

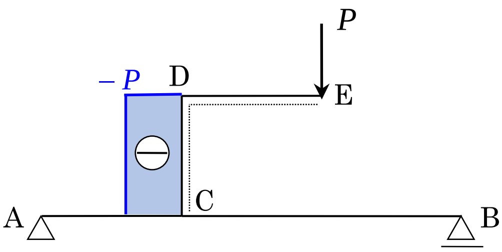
鉛直方向の力の釣合から、　　$R_A + R_B = P$

A 点回りのモーメントの釣合から、　　$P \cdot \dfrac{2}{3}\ell = R_B \cdot \ell$

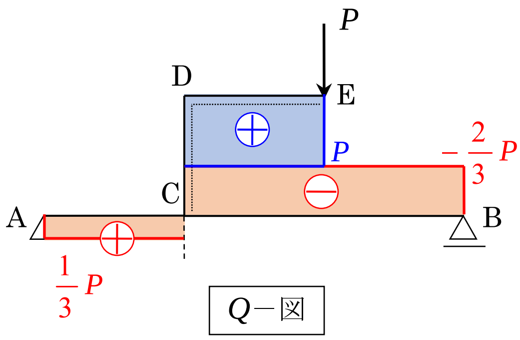
または、B 点回りのモーメントの釣合から、　　$P \cdot \dfrac{1}{3}\ell = R_A \cdot \ell$

これらから、支点反力は、$H_A = 0$，$R_A = \dfrac{1}{3}P$，$R_B = \dfrac{2}{3}P$ となる。

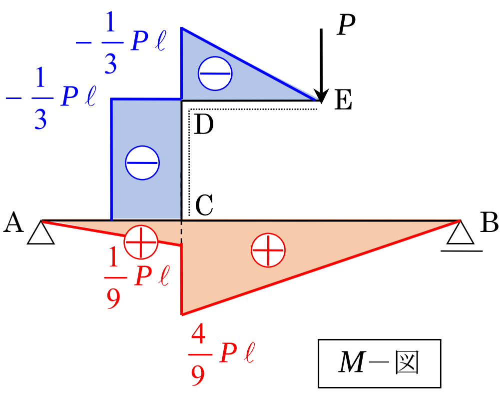
断面力図、即ち、軸力図（N－図），せん断力図（Q－図），曲げモーメント図（M－図）を描くと、以下のようになる。



N－図

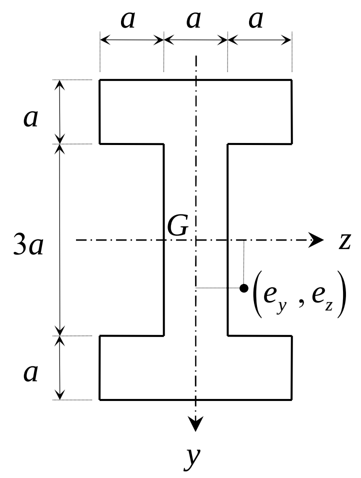


Q－図



M－図

【問題 CM-CS-1a】下図に示す“Ｉ型断面”の〝断面の核〟を求め、図示せよ。



【解答】
図に示すように、重心 G を通る y, z 軸は主軸となるから、y, z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_z は、次のようになる。

$$I_y = \frac{3a\cdot a^3}{12} + \frac{a\cdot(3a)^3}{12}\times 2 = \left(\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\right)\cdot a^4 = \frac{19}{4}a^4$$

$$I_z = \frac{a\cdot(3a)^3}{12} + 2\cdot 3a\cdot a\cdot\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{3a\cdot a^3}{12}\times 2$$

$$= \frac{9}{4}a^4 + 6\cdot 4a^4 + \frac{1}{2}a^4 = \left(\frac{9}{4}+24+\frac{1}{2}\right)\cdot a^4 = \frac{9+96+2}{4}a^4 = \frac{107}{4}a^4$$

《別解》

$$I_z = \frac{3a\cdot(5a)^3}{12} - \frac{2a\cdot(3a)^3}{12} = \frac{125}{4}a^4 - \frac{9}{2}a^4 = \frac{125-18}{4}a^4 = \frac{107}{4}a^4$$

また、断面積 A は、$A = 3a^2\times 2 + 3a^2 = 9a^2$ だから、y, z 軸に関する回転半径をそれぞれ r_y, r_z とすると、

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{19}{4}a^4}{9a^2} = \frac{19}{36}a^2 \qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{107}{4}a^4}{9a^2} = \frac{107}{36}a^2$$

ここで、載荷荷重の偏心位置を $(e_y\ ,e_z)$ とすると、中立軸は、$1+\dfrac{e_y}{r_z^2}y+\dfrac{e_z}{r_y^2}z=0$ と表され、中立軸が y, z 軸と交わる点すなわち切片 n_y, n_z は、次のようになる。

$$n_y = -\frac{r_z^2}{e_y},\quad n_z = -\frac{r_y^2}{e_z} \qquad \text{逆に、}\qquad e_y = -\frac{r_z^2}{n_y},\quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z}$$

よって、〝断面の核〟の端の位置を決めるためには、中立軸が次の２通り（４通り）の限界位置にある場合について、載荷荷重の偏心位置を $(e_y\ ,e_z)$ を求めればよい。

(1)中立軸が $y=\pm\dfrac{5}{2}a$ となるとき、切片は、$n_y=\pm\dfrac{5}{2}a$, $n_z=\pm\infty$ となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{107}{36}a^2}{\pm\frac{5}{2}a} = \mp\frac{107}{36}\cdot\frac{2}{5} = \mp\frac{107}{90}a$$

$$\therefore \left(e_y\ ,\, e_z\right) = \left(\mp\frac{107}{90}a\ ,\, 0\right)$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{19}{36}a^2}{\pm\infty} = 0$$

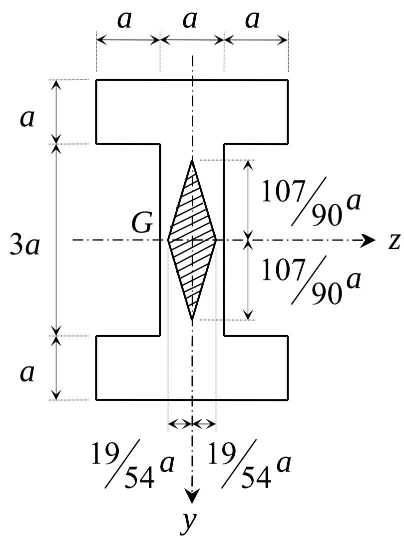
⑵中立軸が $z = \pm\frac{3}{2}a$ となるとき、切片は、$n_y = \pm\infty$，$n_z = \pm\frac{3}{2}a$ となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{107}{36}a^2}{\pm\infty} = 0$$

$$\therefore \left(e_y\ ,\, e_z\right) = \left(0\ ,\, \mp\frac{19}{54}a\right)$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{19}{36}a^2}{\pm\frac{3}{2}a} = \mp\frac{19}{36}\cdot\frac{2}{3}a = \mp\frac{19}{54}a$$

以上をまとめて、〝断面の核〟を斜線で図示すると下図のようになる。

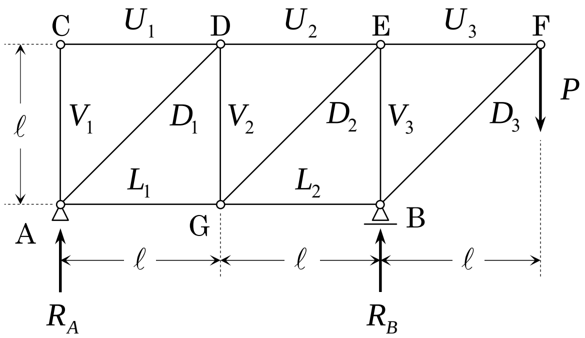


構造力学演習Ⅱ（2017-№.４）　2017/10/03

【問題 CM-BT-6】下図に示す曲げ剛性 EI が一定の静定トラスについて、以下の設問に答えよ。

(1) 部材力 U_1， U_2， U_3， L_1， L_2， V_1， V_2， V_3， D_1， D_2， D_3 を求めよ。

(2) 荷重 P を漸次増加させるとき、最初に座屈が発生する部材はどの部材か。また、そのときの荷重 P の大きさ P_E を求めよ。



【解答】

(1) まず、支点反力 R_A， R_B を求めると、次のようになる。

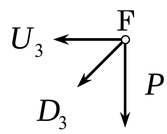
鉛直方向の力の釣合から、　$R_A + R_B = P$

B 点回りのモーメントの釣合から、　$R_A \cdot 2\ell + P\ell = 0$　　$\therefore\ R_A = -\dfrac{1}{2}P$

A 点回りのモーメントの釣合から、　$R_B \cdot 2\ell = P \cdot 3\ell$　　$\therefore\ R_B = \dfrac{3}{2}P$

各部材力は、〝節点法〟を用いて、鉛直方向と水平方向の力の釣合から、以下のように求める。

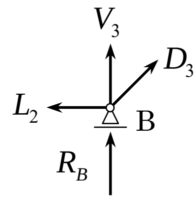
1) F 点について、



（鉛直） $D_3 \sin 45° + P = \dfrac{D_3}{\sqrt{2}} + P = 0$　　$\therefore D_3 = -\sqrt{2}P$

（水平） $U_3 + D_3 \cos 45° = U_3 + \dfrac{D_3}{\sqrt{2}} = 0$　　$\therefore U_3 = -\dfrac{D_3}{\sqrt{2}} = P$

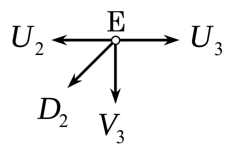
2) B 点について、



（鉛直） $V_3 + D_3 \sin 45° + R_B = V_3 + \dfrac{D_3}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{2}P = 0$　　$\therefore V_3 = P - \dfrac{3}{2}P = -\dfrac{P}{2}$

（水平） $L_2 = D_3 \cos 45° = \dfrac{D_3}{\sqrt{2}} = -P$

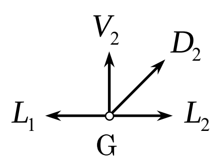
3) E 点について、



（鉛直） $V_3 + D_2 \sin 45° = V_3 + \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = 0$　　$\therefore D_2 = -\sqrt{2}V_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}P$

（水平） $U_2 + D_2 \cos 45° = U_2 + \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = U_3$　　$\therefore U_2 = U_3 - \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = P - \dfrac{P}{2} = \dfrac{P}{2}$

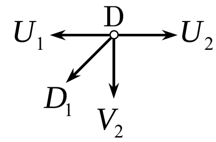
4) G 点について、



（鉛直） $V_2 + D_2 \sin 45° = V_2 + \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = 0$　　$\therefore V_2 = -\dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{P}{2}$

（水平） $L_1 = L_2 + D_2 \cos 45° = -P + \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = -P + \dfrac{P}{2} = -\dfrac{P}{2}$

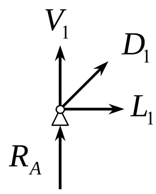
5) D 点について、



（鉛直） $V_2 + D_1 \sin 45° = V_2 + \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} = 0 \qquad \therefore D_1 = -\sqrt{2}V_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}P$

（水平） $U_1 + D_1 \cos 45° = U_1 + \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} = U_2 \qquad \therefore U_1 = U_2 - \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} = \dfrac{P}{2} - \dfrac{P}{2} = 0$

6) A 点について、



（鉛直） $V_1 + D_1 \sin 45° + R_A = V_1 + \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} - \dfrac{P}{2} = 0 \ \therefore V_1 = -\dfrac{D_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{P}{2} = -\dfrac{P}{2} + \dfrac{P}{2} = 0$

（水平） $L_1 + D_1 \cos 45° = L_1 + \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{P}{2} + \dfrac{P}{2} = 0$ 　（Check）

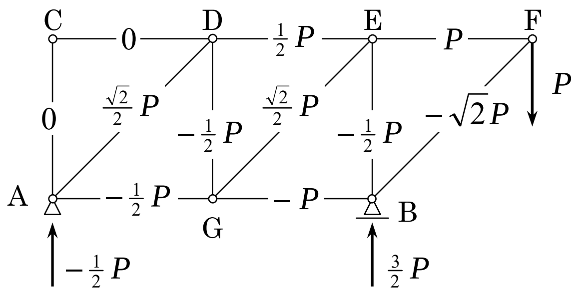
以上をまとめると、

$\boxed{U_1 = 0}$ 　 $\boxed{U_2 = \dfrac{P}{2}}$ 　 $\boxed{U_3 = P}$

$\boxed{L_1 = -\dfrac{P}{2}}$ 　 $\boxed{L_2 = -P}$

$\boxed{V_1 = 0}$ 　 $\boxed{V_2 = -\dfrac{P}{2}}$ 　 $\boxed{V_3 = -\dfrac{P}{2}}$

$\boxed{D_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}P}$ 　 $\boxed{D_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}P}$ 　 $\boxed{D_3 = -\sqrt{2}P}$



となり、これを図示すると右図のようになる。

(2)荷重 P を漸次増加させるとき、最初に座屈が発生する部材は、部材長が同じ場合は最大の圧縮力が作用する部材である。また、部材の支持条件は、すべて両端回転支持である。

(1)で求めた部材力から、部材長が ℓ の場合は L_2，部材長が $\sqrt{2}\ell$ の場合は D_3 が候補として挙げられる。それぞれについて、座屈発生時の荷重 P_E を求めると、次のようになる。

L_2 の場合は、 $P_E = \dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2}$

D_3 の場合は、 $\sqrt{2}P_E = \dfrac{\pi^2 EI}{\left(\sqrt{2}\ell\right)^2} = \dfrac{\pi^2 EI}{2\ell^2} \qquad \therefore \ P_E = \dfrac{\pi^2 EI}{2\sqrt{2}\ell^2}$

したがって、D_3 の場合の方が、L_2 の場合より座屈荷重が小さくなることがわかる。

よって、最初に座屈が発生する部材は、$\boxed{D_3}$ すなわち $\boxed{\text{部材 BF}}$ であり、そのときの荷重 P の大きさ P_E は、$\boxed{P_E = \dfrac{\pi^2 EI}{2\sqrt{2}\ell^2}\ P_E = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2}}$ である。

【問題】下図-1 に示す曲げ剛性が EI の〝一端固定・他端単純支持ばり〟について、その支点反力 R_A， R_B と支点曲げモーメント M_A および断面力図を以下の手順で求めよ。

(1) 図-2 に示すように〝片持ばり〟の中央に集中荷重 P が作用するとき、〝弾性荷重法〟を用いて、B 点のたわみ y_B^1 を求めよ。

(2) 図-3 に示すように〝片持ばり〟の先端に集中荷重 X が作用するとき、〝弾性荷重法〟を用いて、B 点のたわみ y_B^2 を求めよ。

(3) (1)と(2)の結果を利用して、図-1 に示す〝一端固定・他端単純支持ばり〟の中央に集中荷重 P が作用するとき、支点反力 R_A， R_B と支点曲げモーメント M_A を求めよ。

(4) 図-1 のせん断力図（Q－図），曲げモーメント図（M－図）を図示せよ。

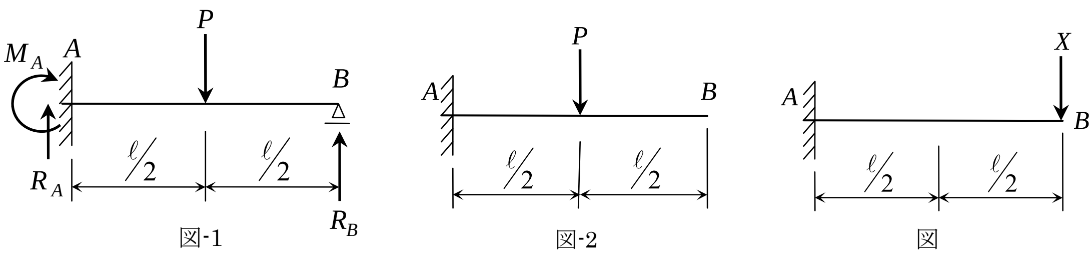
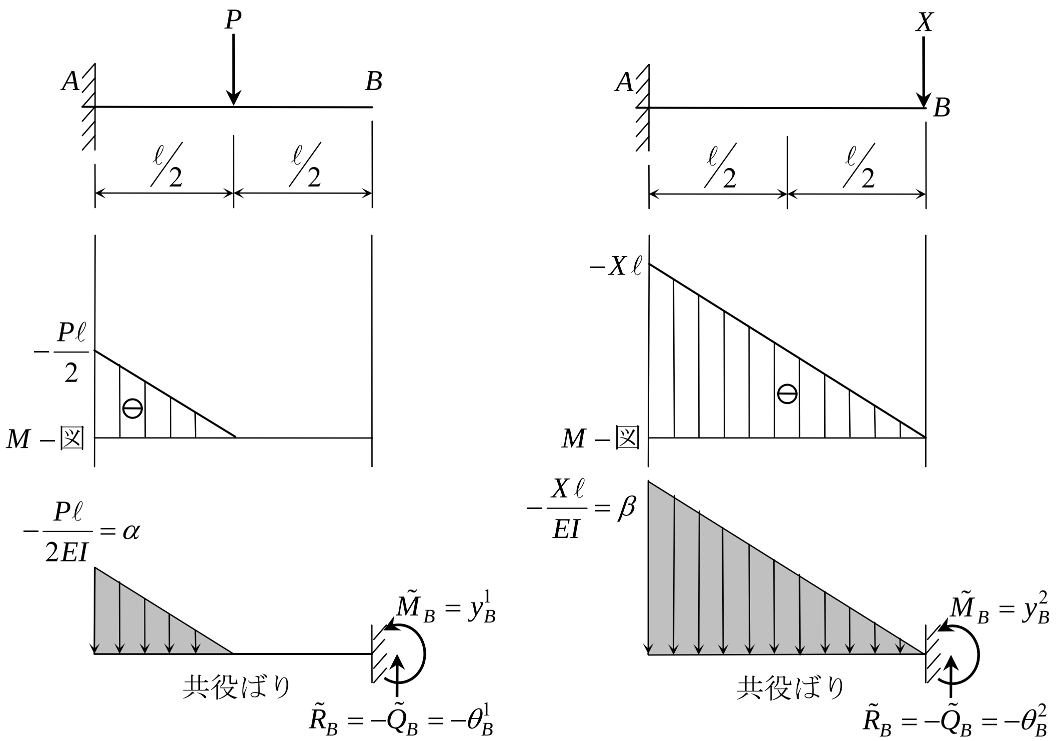


図-1　　図-2　　図

【解答】

図-2 と図-3 に示すような〝片持ばり〟の曲げモーメント図（M－図）と弾性荷重を載荷した〝共役ばり〟は、下図のようになる。剛体の釣合条件から、B 点の支点曲げモーメント $\tilde{M}_B$ を求めると、次のようになる。



(1) B 点周りの力のモーメントの釣合から、$\tilde{M}_B+\dfrac{1}{4}\alpha\ell\times\left(\dfrac{\ell}{2}+\dfrac{\ell}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\right)=0$

$$\therefore \tilde{M}_B=-\frac{5}{24}\alpha\ell^2 \qquad \therefore y_B^1=\tilde{M}_B=-\frac{5}{24}\alpha\ell^2=\frac{5}{48}\cdot\frac{P\ell^3}{EI} \qquad \therefore \boxed{y_B^1=\frac{5}{48}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

(2) B 点周りの力のモーメントの釣合から、$\tilde{M}_B+\frac{1}{2}\beta\ell\times\frac{2}{3}\ell=0$

$$\therefore \tilde{M}_B=-\frac{1}{3}\beta\ell^2 \qquad \therefore y_B^2=\tilde{M}_B=-\frac{1}{3}\beta\ell^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{X\ell^3}{EI} \qquad \therefore \boxed{y_B^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{X\ell^3}{EI}}$$

(3) B 点ではたわみがゼロだから、$y_B^1+y_B^2=0$ となる X を求める。

$\frac{5}{48}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}+\frac{1}{3}\cdot\frac{X\ell^3}{EI}=0$ だから、$X=-\frac{5}{48}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{EI}{\ell^3}=-\frac{5}{16}P \qquad \therefore R_B=-X=\frac{5}{16}P$

支点反力 R_A と支点曲げモーメント M_A は、剛体の釣合条件から、

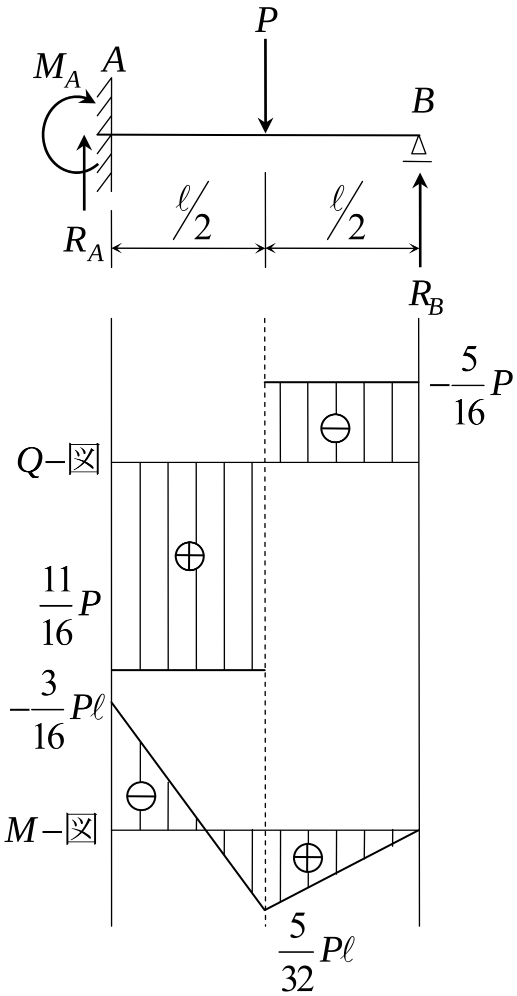
鉛直方向の力の釣合から、$R_A+R_B=P \qquad \therefore R_A=P-R_B=P-\frac{5}{16}P=\frac{11}{16}P$

A 点周りの力のモーメントの釣合から、$M_A+P\times\frac{\ell}{2}=R_B\times\ell$

$$\therefore M_A=\frac{5}{16}P\ell-\frac{1}{2}P\ell=-\frac{3}{16}P\ell$$

したがって、$\boxed{R_A=\frac{11}{16}P}$, $\boxed{R_B=\frac{5}{16}P}$, $\boxed{M_A=-\frac{3}{16}P\ell}$

(4) 図-1 のせん断力図（Q－図），曲げモーメント図（M－図）を図示すると、下図のようになる。



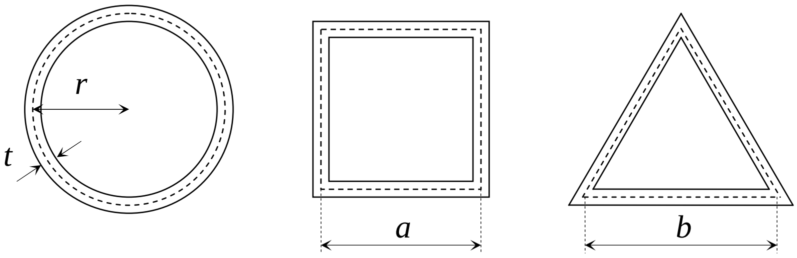
構造力学演習Ⅱ（2017-№６）　　2017/10/17

【問題 PT-3a】下図に示す３種の薄肉中空断面は、薄肉中央線の周長 S，板厚 t およびせん断弾性係数 G が相等しい。このとき、薄肉中央線の半径を r，板厚を t とする中空円筒断面を基準として、３者のねじり剛性の比 GJ_C ： GJ_S ： GJ_T を求めよ。

1）中空円筒断面： GJ_C

2）中空正方形断面： GJ_S

3）中空正三角形断面： GJ_T



【問１】

板厚 t，薄肉中央線の長さ（周長）S，せん断弾性係数 G が相等しい中空正八角形断面，中空長方形断面（薄肉中央線の長辺と短辺の長さの比が 5：3），中空三角形断面（薄肉中央線の三辺の長さの比が 5 : 4 : 3）の 3 つの薄肉中空断面において、それぞれのねじり剛性を GJ_H，GJ_S，GJ_T とするとき、3 者のねじり剛性の比 GJ_H ： GJ_S ： GJ_T はいくらか。

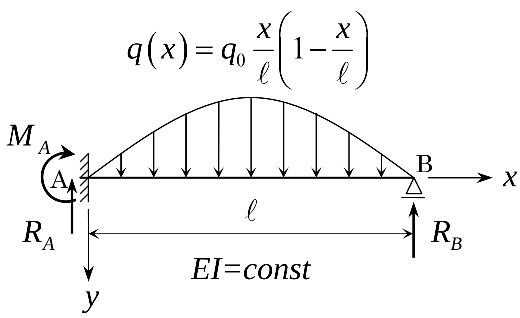
【問２】右図に示すような一端固定･他端単純支持ばりに分布荷重 $q(x)=q_0\dfrac{x}{\ell}\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)$ が作用するとき、

(1) たわみ：$y\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

(2) たわみ角：$\theta\left(\dfrac{x}{\ell}\right)=y'\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

(3) 曲げモーメント：$M\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

(4) せん断力：$Q\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$



の式を求めよ。また、

(5) 支点反力 R_A，R_B と支点曲げモーメント M_A を求めよ。

ただし、はりの曲げ剛性は、EI で一定とする。

【問題 PT-3a の解答】

ねじり剛性GJは、次の式で表される。

$$GJ = \frac{4F^2}{\oint \frac{1}{t} dS} G$$

F：薄肉中央線に囲まれた面積

$\oint dS$：薄肉中央線に沿う周回積分

周長が等しいことから、$S = 2\pi r = 4a = 3b$　　$\therefore a = \frac{1}{2}\pi r,\quad b = \frac{2}{3}\pi r$

よって、

$$J_C = \frac{4\cdot\left(\pi r^2\right)^2}{\frac{2\pi r}{t}} = \frac{4\pi^2 r^4 t}{2\pi r} = 2\pi r^3 t$$

$$J_S = \frac{4\cdot\left(a^2\right)^2}{\frac{2\pi r}{t}} = \frac{4\cdot\left(\frac{1}{4}\pi^2 r^2\right)^2 t}{2\pi r} = \frac{4\cdot\pi^4 r^4 t}{2\pi r\cdot 4\cdot 4} = \frac{\pi^3}{8} r^3 t$$

$$J_T = \frac{4\cdot\left(\frac{1}{2} b \frac{\sqrt{3}}{2} b\right)^2}{\frac{2\pi r}{t}} = \frac{4\cdot\frac{3}{16} b^4 t}{2\pi r} = \frac{3b^4 t}{8\pi r} = \frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\pi^4 r^4 t}{8\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\pi r} = \frac{2\pi^3}{27} r^3 t$$

したがって、$\boxed{GJ_C : GJ_S : GJ_T = 2\pi : \frac{1}{8}\pi^3 : \frac{2}{27}\pi^3 = 1 : \frac{\pi^2}{16} : \frac{\pi^2}{27} \cong 1 : 0.617 : 0.366}$

【問１の解答】

薄肉中空断面のねじり剛性GJは、$GJ=\dfrac{4F^2}{\oint\dfrac{ds}{t}}G\cdots$①と表される。

ここに、F：薄肉中央線に囲まれた面積，$\oint ds$：薄肉中央線に沿う周回積分である。

問題では、板厚t，薄肉中央線の長さ（周長）S，せん断弾性係数Gが相等しいので、全ての薄肉中空断面で①式の分母は一定となり、３者のねじり剛性の比GJ_H ： GJ_S ： GJ_Tは、薄肉中央線に囲まれた面積Fの二乗の比となる。

そこで、中空正八角形断面の薄肉中央線が半径rの円に内接すると考え、中空正八角形断面，中空長方形断面，中空三角形断面の薄肉中央線に囲まれた面積Fをrで表す。

中空正八角形断面の一辺の長さは、$2r\sin 22.5°$で表され、半角の公式より

$\sin^2 22.5°=\dfrac{1-\cos 45°}{2}=\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$だから、$2r\sin 22.5°=2r\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$となり、

周長$S=8r\sqrt{2-\sqrt{2}}$となる。

３者のFの二乗を計算すると、次のようになる。

$$F_H^2=\left\{\frac{1}{2}\cdot 2r\sin 22.5°\cdot r\cos 22.5°\times 8\right\}^2=\left\{4r^2\sin 45°\right\}^2=\left(4r^2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(2\sqrt{2}r^2\right)^2=8r^4$$

$$F_S^2=\left(\frac{5}{16}8r\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{16}8r\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2=\left\{\frac{15}{4}r^2\left(2-\sqrt{2}\right)\right\}^2=\frac{225}{16}r^4\left(2-\sqrt{2}\right)^2$$

$$F_T^2=\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{12}8r\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{12}8r\sqrt{2-\sqrt{2}}\right\}^2=\left\{\frac{8}{3}r^2\left(2-\sqrt{2}\right)\right\}^2=\frac{64}{9}r^4\left(2-\sqrt{2}\right)^2$$

（∵三辺の長さの比が５：４：３の三角形は、直角三角形）

したがって、

$$GJ_H : GJ_S : GJ_T=F_H^2 : F_S^2 : F_T^2=8r^4 : \frac{225}{16}r^4\left(2-\sqrt{2}\right)^2 : \frac{64}{9}r^4\left(2-\sqrt{2}\right)^2$$

$$\therefore\ \boxed{\begin{aligned}GJ_H:GJ_S:GJ_T&=8:\frac{225}{16}\left(2-\sqrt{2}\right)^2:\frac{64}{9}\left(2-\sqrt{2}\right)^2=1:\frac{225}{128}\left(2-\sqrt{2}\right)^2:\frac{8}{9}\left(2-\sqrt{2}\right)^2\\&=8:\frac{225}{8}\left(3-2\sqrt{2}\right):\frac{128}{9}\left(3-2\sqrt{2}\right)=1:\frac{225}{64}\left(3-2\sqrt{2}\right):\frac{16}{9}\left(3-2\sqrt{2}\right)\\&=1:\left(\frac{15}{8}\right)^2\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right):\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)\cong 1:0.603:0.305\\&=\left(3+2\sqrt{2}\right):\left(\frac{15}{8}\right)^2:\left(\frac{4}{3}\right)^2\end{aligned}}$$

【問２の解答】

(1)(2)はりのたわみと荷重の関係を表す４階の微分方程式$EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q(x)=q_0\dfrac{x}{\ell}\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)=\dfrac{q_0}{\ell}x-\dfrac{q_0}{\ell^2}x^2$を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^3}{3}+C_1$$

$$EIy''=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^5}{60}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^6}{360}+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1，C_2，C_3，C_4を求める。

1) $x=0$のとき、$y'=0$より、　$C_3=0$

2) $x=0$のとき、$y=0$より、　$C_4=0$

3) $x=\ell$のとき、$y''=0$より、　$\dfrac{q_0}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^3}{6}-\dfrac{q_0}{\ell^2}\dfrac{\ell^4}{12}+C_1\ell+C_2=0$

$$\therefore C_1\ell+C_2=q_0\ell^2\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}q_0\ell^2 \quad \cdots\cdots\cdots①$$

4) $x=\ell$のとき、$y=0$より、　$\dfrac{q_0}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^5}{120}-\dfrac{q_0}{\ell^2}\cdot\dfrac{\ell^6}{360}+C_1\dfrac{\ell^3}{6}+C_2\dfrac{\ell^2}{2}=0$

$$\therefore C_1\frac{\ell^3}{6}+C_2\frac{\ell^2}{2}=q_0\ell^4\left(\frac{1}{360}-\frac{1}{120}\right)=-\frac{2}{360}q_0\ell^4=-\frac{1}{180}q_0\ell^4$$

$$\therefore C_1\ell+3C_2=-\frac{1}{30}q_0\ell^2 \quad \cdots\cdots\cdots②$$

②−①より、$2C_2=\left(-\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{12}\right)q_0\ell^2=\dfrac{-2+5}{60}q_0\ell^2=\dfrac{3}{60}q_0\ell^2=\dfrac{1}{20}q_0\ell^2$　　$\therefore C_2=\dfrac{1}{40}q_0\ell^2$

これを①に代入して、$C_1\ell=-\dfrac{1}{12}q_0\ell^2-\dfrac{1}{40}q_0\ell^2=-\dfrac{10+3}{120}q_0\ell^2=-\dfrac{13}{120}q_0\ell^2$　　$\therefore C_1=-\dfrac{13}{120}q_0\ell$

よって、

$$EIy'''=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{13}{120}q_0\ell$$

$$EIy''=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^4}{12}-\frac{13}{120}q_0\ell x+\frac{1}{40}q_0\ell^2$$

$$EIy'=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^5}{60}-\frac{13}{120}q_0\ell\frac{x^2}{2}+\frac{1}{40}q_0\ell^2x$$

$$EIy=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^6}{360}-\frac{13}{120}q_0\ell\frac{x^3}{6}+\frac{1}{40}q_0\ell^2\frac{x^2}{2}$$

したがって、はりのたわみ$y\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$とたわみ角$\theta\left(\dfrac{x}{\ell}\right)=y'\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$の式は、次のようになる。

$$EIy'=q_0\ell^3\left\{\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-\frac{1}{60}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5-\frac{13}{240}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2+\frac{1}{40}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}$$

$$EIy=q_0\ell^4\left\{\frac{1}{120}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5-\frac{1}{360}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^6-\frac{13}{720}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\frac{1}{80}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\theta\left(\frac{x}{\ell}\right)=y'\left(\frac{x}{\ell}\right)&=\frac{q_0\ell^3}{EI}\left\{\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-\frac{1}{60}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5-\frac{13}{240}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2+\frac{1}{40}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}\\&=\frac{1}{240}\cdot\frac{q_0\ell^3}{EI}\left\{10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-4\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5-13\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2+6\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}y\left(\frac{x}{\ell}\right)&=\frac{q_0\ell^4}{EI}\left\{\frac{1}{120}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5-\frac{1}{360}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^6-\frac{13}{720}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+\frac{1}{80}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}\\&=\frac{1}{720}\cdot\frac{q_0\ell^4}{EI}\left\{6\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5-2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^6-13\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3+9\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}\end{aligned}}$$

(3)(4)(5)上記(1)(2)より、せん断力 $Q=-EIy'''$，曲げモーメント $M=-EIy''$ は、次の式で表される。

$$\boxed{\begin{aligned}Q\left(\frac{x}{\ell}\right)&=-EIy'''=-q_0\ell\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3-\frac{13}{120}\right\}\\M\left(\frac{x}{\ell}\right)&=-EIy''=-q_0\ell^2\left\{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3-\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-\frac{13}{120}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)+\frac{1}{40}\right\}\end{aligned}}$$

したがって、A 点，B 点それぞれの支点反力 R_A， R_B と支点曲げモーメント M_A は、次のようになる。

$$R_A=Q_A=\left[-EIy'''\right]_{x=0}=-\left[EIy'''\right]_{x=0}=-\left(-\frac{13}{120}q_0\ell\right)=\frac{13}{120}q_0\ell$$

$$R_B=-Q_B=-\left[-EIy'''\right]_{x=\ell}=\left[EIy'''\right]_{x=\ell}=q_0\ell\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{13}{120}\right)=\frac{60-40-13}{120}q_0\ell=\frac{7}{120}q_0\ell$$

$$M_A=\left[-EIy''\right]_{x=0}=-\left[EIy''\right]_{x=0}=-\frac{1}{40}q_0\ell^2$$

$$\therefore\quad\boxed{R_A=\frac{13}{120}q_0\ell},\quad\boxed{R_B=\frac{7}{120}q_0\ell},\quad\boxed{M_A=-\frac{1}{40}q_0\ell^2}$$