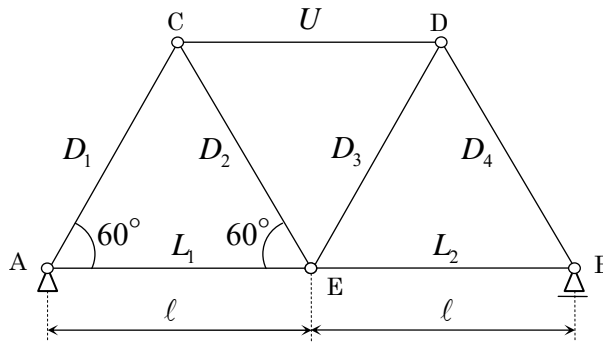
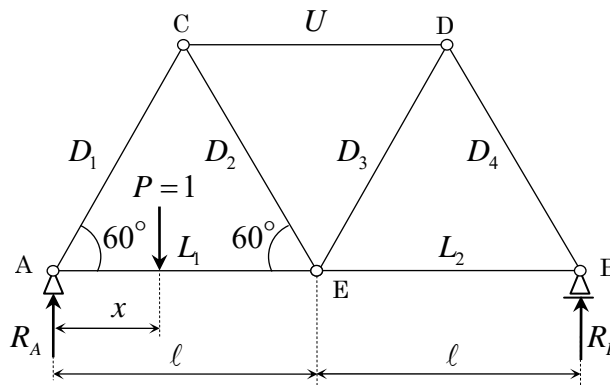


【問題 IL-T-1】 下図に示すトラスの部材力すべてについて、下弦載荷の場合の影響線を求めよ。



【解答】



まず、上図のように A 点から x の位置に単位集中荷重 $P=1$ が作用するときの支点反力の影響線を求める。

$$B \text{ 点回りのモーメントの釣合より、 } R_A \times 2l = P \times (2l - x)$$

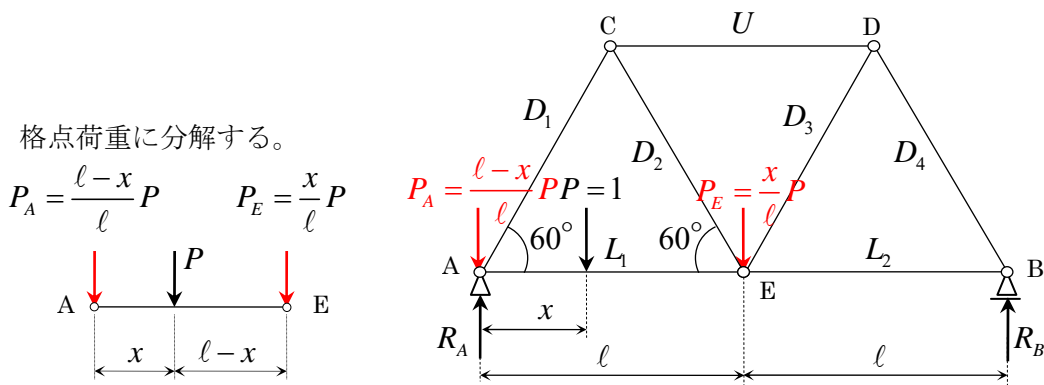
$$A \text{ 点回りのモーメントの釣合より、 } R_B \times 2l = P \times x$$

$$\therefore R_A = 1 - \frac{x}{2l}, \quad R_B = \frac{x}{2l}$$

次に、単位集中荷重 $P=1$ が作用する位置 x によって、 $0 \leq x \leq l$ と $l \leq x \leq 2l$ の 2 つに区分する。

(1) $0 \leq x \leq l$ のとき

単位集中荷重 $P=1$ を A 点と E 点の格点荷重に分解すると、下図のようになる。



この状態で、節点法により、すべての部材力を求めると、次のようになる。

① A 点について

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、 } D_1 \sin 60^\circ + R_A = P_A$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} D_1 = \frac{l-x}{l} \left(1 - \frac{x}{2l} \right) = -\frac{x}{l} + \frac{x}{2l} = -\frac{x}{2l} \quad \therefore D_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x}{2l} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x}{l} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{l}$$

$$\text{水平方向の力の釣合から、} D_1 \cos 60^\circ + L_1 = 0 \quad \therefore L_1 = -\frac{1}{2} D_1 = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{l} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{x}{l}$$

②B点について

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} D_4 \sin 60^\circ + R_B = 0 \quad \therefore D_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{x}{2l} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{l}$$

$$\text{水平方向の力の釣合から、} D_4 \cos 60^\circ + L_2 = 0 \quad \therefore L_2 = -\frac{1}{2} D_4 = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{l} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{x}{l}$$

③C点について

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} D_1 \sin 60^\circ + D_2 \sin 60^\circ = 0 \quad \therefore D_2 = -D_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{l}$$

$$\text{水平方向の力の釣合から、} U + D_2 \cos 60^\circ = D_1 \cos 60^\circ$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} (D_1 - D_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{l} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{l}$$

④D点について

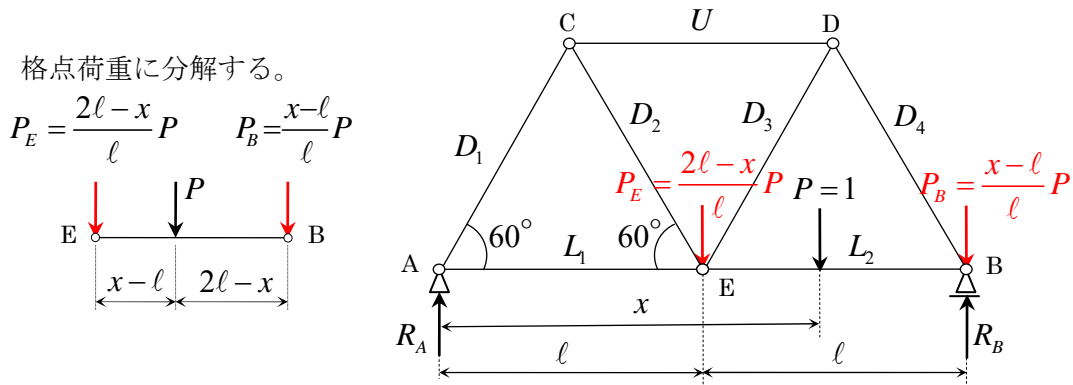
$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} D_3 \sin 60^\circ + D_4 \sin 60^\circ = 0 \quad \therefore D_3 = -D_4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{l}$$

$$\text{水平方向の力の釣合から、} U + D_3 \cos 60^\circ = D_4 \cos 60^\circ$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} (D_4 - D_3) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{l} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x}{l} \quad (\text{check O.K.})$$

(2) $l \leq x \leq 2l$ のとき

単位集中荷重 $P=1$ を E 点と B 点の格点荷重に分解すると、下図のようになる。



この状態で、節点法により、すべての部材力を求めると、次のようになる。

①A点について

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} D_1 \sin 60^\circ + R_A = 0 \quad \therefore D_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{x}{2l} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{x}{l} - 2 \right)$$

$$\text{水平方向の力の釣合から、} D_1 \cos 60^\circ + L_1 = 0$$

$$\therefore L_1 = -\frac{1}{2} D_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{x}{l} - 2 \right) = -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left(\frac{x}{l} - 2 \right)$$

②B点について

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} D_4 \sin 60^\circ + R_B = P_B \quad \therefore D_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{x-l}{l} - \frac{x}{2l} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{x}{l} - 2 \right)$$

$$\text{水平方向の力の釣合から、} D_4 \cos 60^\circ + L_2 = 0$$

$$\therefore L_2 = -\frac{1}{2}D_4 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{x}{\ell} - 2\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left(\frac{x}{\ell} - 2\right)$$

③C点について

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} D_1 \sin 60^\circ + D_2 \sin 60^\circ = 0$$

$$\therefore D_2 = -D_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{x}{\ell} - 2\right)$$

$$\text{水平方向の力の釣合から、} U + D_2 \cos 60^\circ = D_1 \cos 60^\circ$$

$$\therefore U = \frac{1}{2}(D_1 - D_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{x}{\ell} - 2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{x}{\ell} - 2\right)$$

④D点について

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} D_3 \sin 60^\circ + D_4 \sin 60^\circ = 0$$

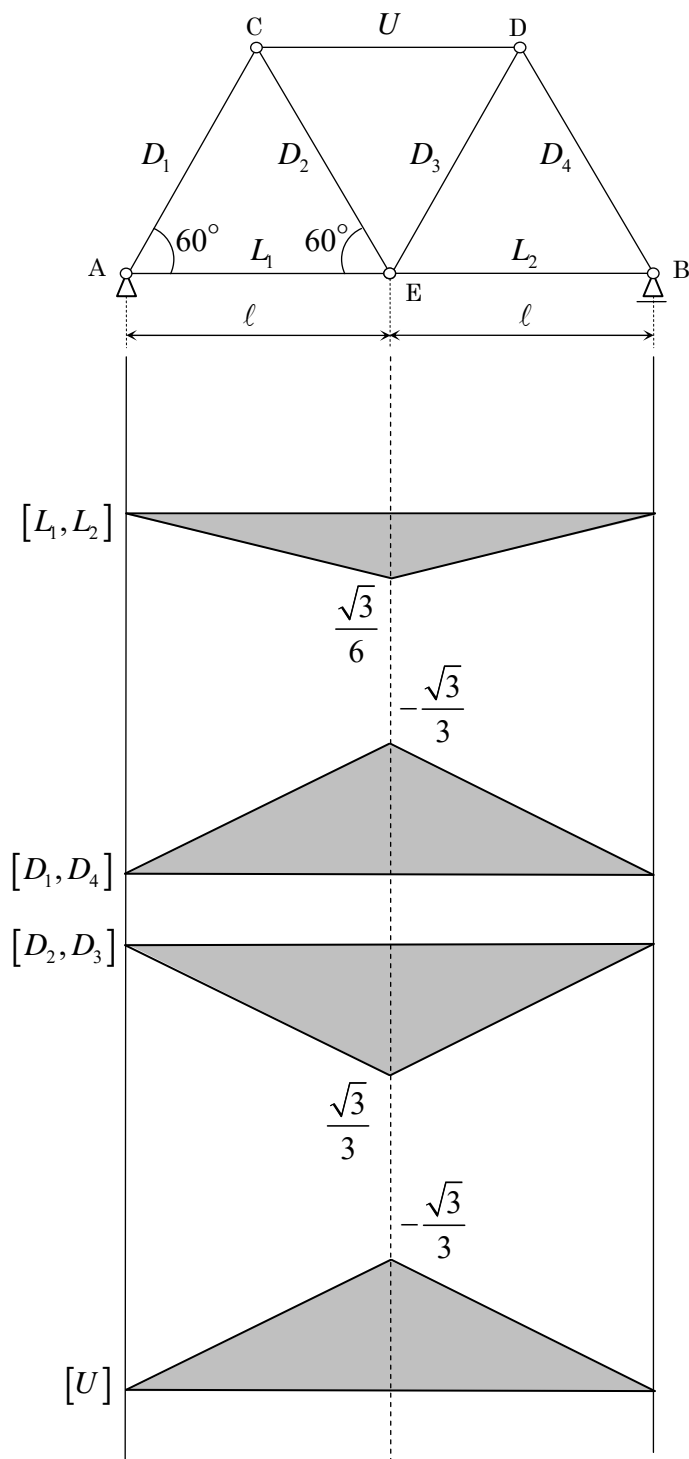
$$\therefore D_3 = -D_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{x}{\ell} - 2\right)$$

$$\text{水平方向の力の釣合から、} U + D_3 \cos 60^\circ = D_4 \cos 60^\circ$$

$$\therefore U = \frac{1}{2}(D_4 - D_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{x}{\ell} - 2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{x}{\ell} - 2\right)$$

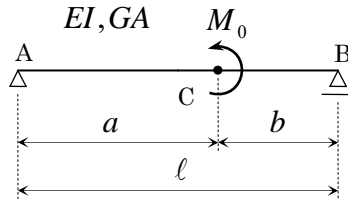
(check O.K.)

以上より、すべての部材力の影響線は、下図のようになる。



【問題 SE-B-2】 下図に示す集中モーメント M_0 が作用する単純ばりのひずみエネルギー U を求めよ。

ただし、はりの曲げ剛性は EI ，せん断弾性係数は G ，断面積は A とする。



【解答】

支点反力を R_A ， R_B とすると、

$$R_A + R_B = 0$$

$$R_A \cdot l = M_0$$

$$\therefore R_A = \frac{M_0}{l} \quad R_B = -\frac{M_0}{l}$$

これより、断面力図は、右図のようになる。

したがって、ひずみエネルギー U は、次のようになる。

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{M^2}{EI} + \kappa \frac{Q^2}{GA} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{1}{EI} \cdot \frac{M_0^2}{l^2} x^2 + \frac{\kappa}{GA} \cdot \frac{M_0^2}{l^2} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{1}{EI} \cdot \frac{M_0^2}{l^2} x'^2 + \frac{\kappa}{GA} \cdot \frac{M_0^2}{l^2} \right) dx'$$

$$U = \frac{M_0^2}{2EI l^2} \int_0^a x^2 dx + \frac{\kappa M_0^2}{2GA l^2} a$$

$$+ \frac{M_0^2}{2EI l^2} \int_0^b x'^2 dx' + \frac{\kappa M_0^2}{2GA l^2} b$$

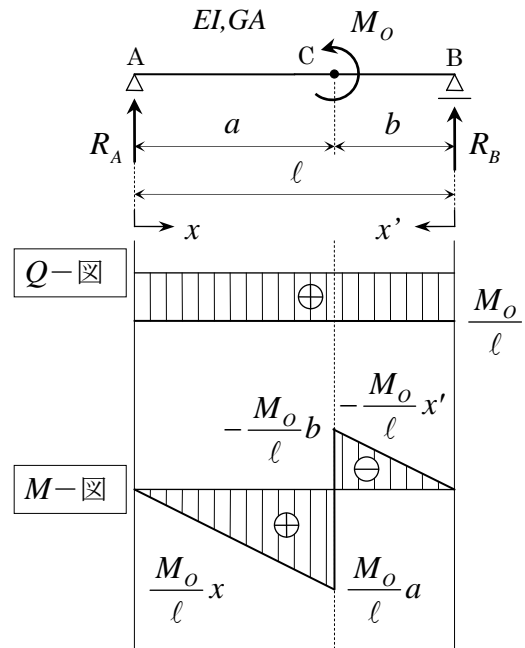
$$= \frac{M_0^2}{2EI l^2} \left(\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} \right) + \frac{\kappa M_0^2}{2GA l^2} (a+b) = \frac{M_0^2 (a^3 + b^3)}{6EI l^2} + \frac{\kappa M_0^2}{2GA l}$$

$$= \frac{M_0^2}{6EI l^2} (a+b) (a^2 - ab + b^2) + \frac{\kappa M_0^2}{2GA l^2} (a+b)$$

$$= \frac{M_0^2}{6EI l} (a^2 - ab + b^2) + \frac{\kappa M_0^2}{2GA l}$$

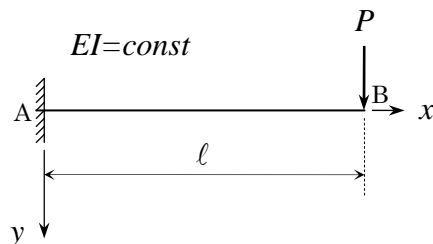
$$= \frac{M_0^2}{6EI l} \{ (a+b)^2 - 3ab \} + \frac{\kappa M_0^2}{2GA l}$$

$$= \frac{M_0^2 l}{6EI} - \frac{M_0^2}{2EI} \cdot \frac{ab}{l} + \frac{\kappa M_0^2}{2GA l}$$



$$\therefore U = \frac{M_0^2}{6EI l} (a^2 - ab + b^2) + \frac{\kappa M_0^2}{2GA l} = \frac{M_0^2 l}{6EI} - \frac{M_0^2}{2EI} \cdot \frac{ab}{l} + \frac{\kappa M_0^2}{2GA l}$$

【問題】 下図に示す片持ばりの先端 B 点に集中荷重 P が作用するとき、片持ばりのひずみエネルギー U を求め、さらに、 $\frac{\partial U}{\partial P}$ を求めよ。ただし、はりの曲げ剛性は、 EI で一定であり、せん断力は、無視するものとする。



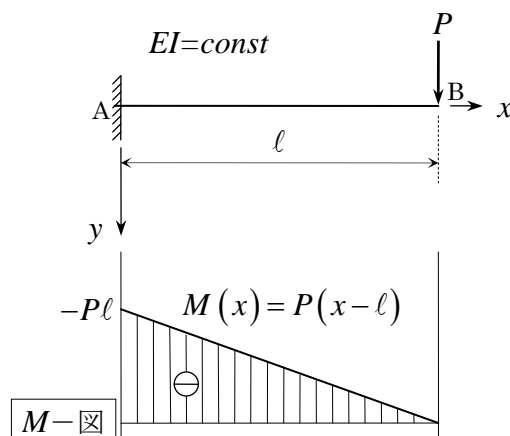
【解答】

問題の片持ばりの曲げモーメント図を図示すると、右図のようになる。

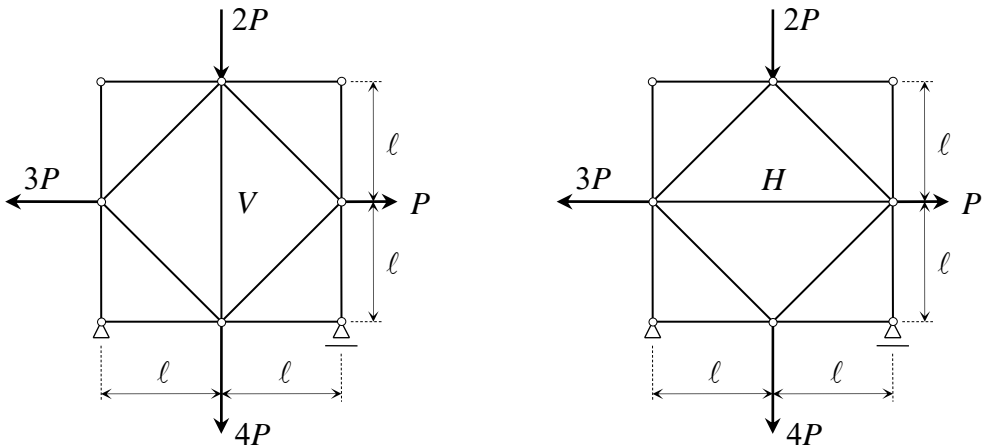
したがって、片持ばりのひずみエネルギー U は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l P^2 (x-l)^2 dx \\
 &= \frac{P^2}{2EI} \int_0^l (x-l)^2 dx = \frac{P^2}{2EI} \left[\frac{(x-l)^3}{3} \right]_0^l \\
 &= \frac{P^2}{2EI} \left\{ - \left(-\frac{\ell^3}{3} \right) \right\} = \frac{P^2 \ell^3}{6EI}
 \end{aligned}$$

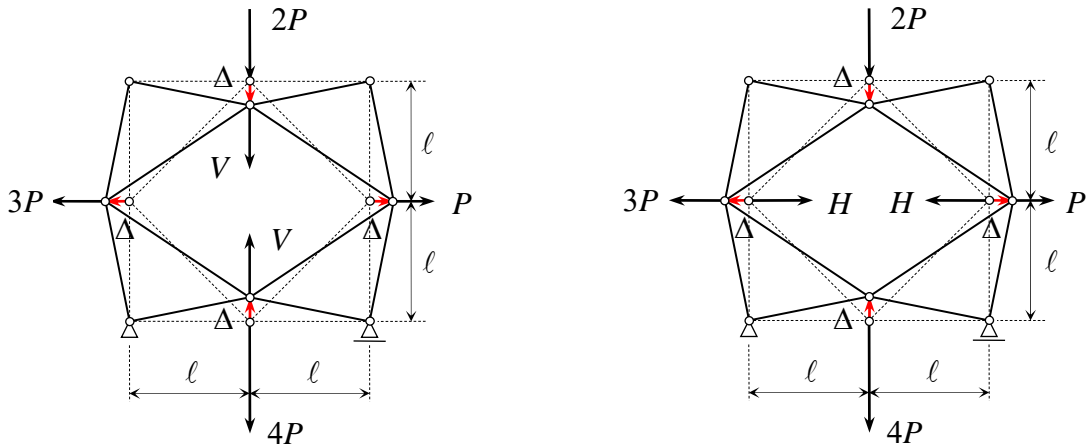
また、 $\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{P^2 \ell^3}{6EI} \right) = \frac{P \ell^3}{3EI}$ となり、 B 点のたわみとなる。(カステリアーノの第2定理)



【問題 UD-T-3】 下図のトラスの鉛直材 V 、水平材 H の部材力を “仮想変位の原理” を用いて求めよ。



【解答】



変位の境界条件を満足する単位の仮想変位 Δ による変位性状は、上図のようになるから、
(左上図について)

$$P \times (\Delta) + 2P \times (\Delta) + 3P \times (\Delta) + 4P \times (-\Delta) + V \times (\Delta) + V \times (\Delta) = 0$$

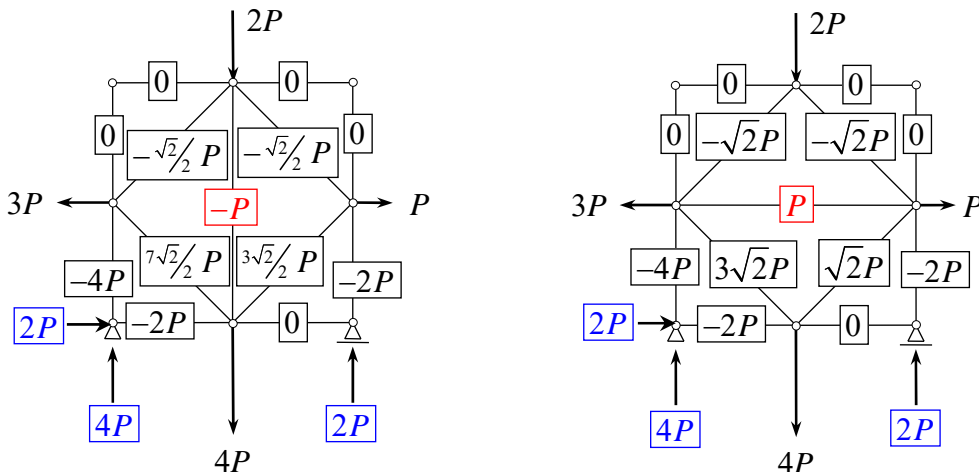
$$\therefore (P + 2P + 3P - 4P + V + V) \times \Delta = 0 \qquad \therefore 2P + 2V = 0 \qquad \therefore \boxed{V = -P}$$

(右上図について)

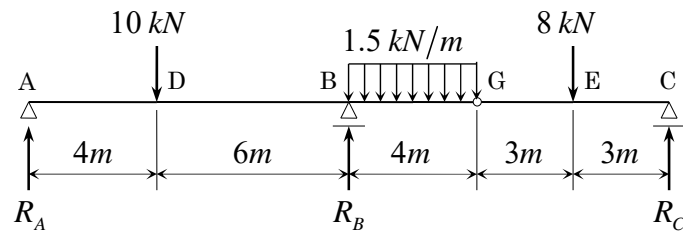
$$P \times (\Delta) + 2P \times (\Delta) + 3P \times (\Delta) + 4P \times (-\Delta) + H \times (-\Delta) + H \times (-\Delta) = 0$$

$$\therefore (P + 2P + 3P - 4P - H - H) \times \Delta = 0 \qquad \therefore 2P - 2H = 0 \qquad \therefore \boxed{H = P}$$

ちなみに、“節点法” によりすべての部材力を求めると、下図のようになる。

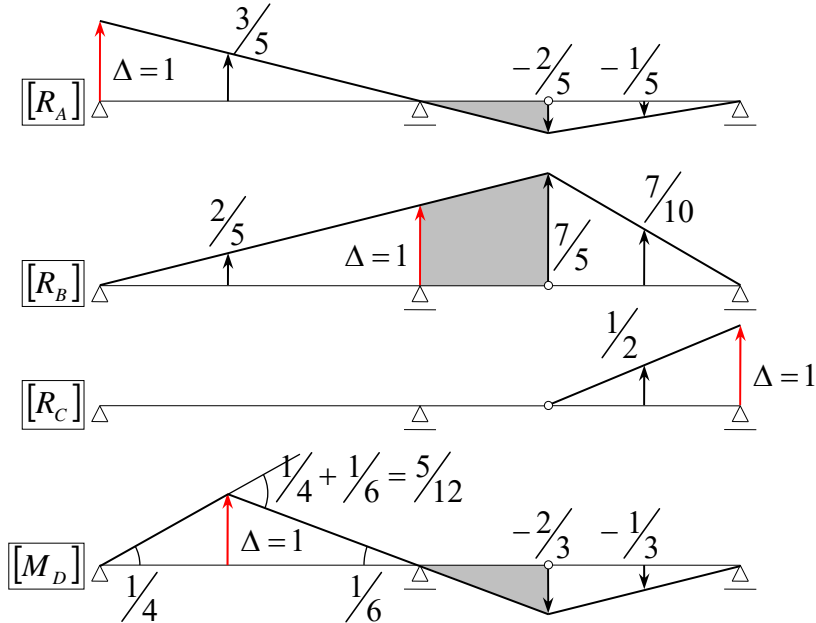


【問題 UD-G-3】 下図に示すゲルバーばりの支点反力 R_A , R_B , R_C と D 点の曲げモーメント M_D を「**仮想変位の原理**」を用いて求めよ。



【解答】

境界条件を満足し、単位の仮想変位 $\Delta = 1$ に対応する変位の性状は下図のようになる。



これを用いて、支点反力 R_A , R_B , R_C および曲げモーメント M_D を求める。

(1) 支点反力 R_A

$$R_A \times 1 + 10 \text{ kN} \times \left(-\frac{3}{5}\right) + 1.5 \text{ kN/m} \times \left[\frac{1}{2} \times \left\{-\left(-\frac{2}{5}\right)\right\} \times 4 \text{ m}\right] + 8 \text{ kN} \times \left\{-\left(-\frac{1}{5}\right)\right\} = 0$$

$$\therefore R_A - 6 \text{ kN} + 1.2 \text{ kN} + 1.6 \text{ kN} = 0 \quad \therefore \boxed{R_A = 6 - 1.2 - 1.6 = 3.2 \text{ kN}}$$

(2) 支点反力 R_B

$$R_B \times 1 + 10 \text{ kN} \times \left(-\frac{2}{5}\right) + 1.5 \text{ kN/m} \times \left[\frac{1}{2} \times \left\{(-1) + \left(-\frac{7}{5}\right)\right\} \times 4 \text{ m}\right] + 8 \text{ kN} \times \left(-\frac{7}{10}\right) = 0$$

$$\therefore R_B - 4 \text{ kN} - 7.2 \text{ kN} - 5.6 \text{ kN} = 0 \quad \therefore \boxed{R_B = 4 + 7.2 + 5.6 = 16.8 \text{ kN}}$$

(3) 支点反力 R_C

$$R_C \times 1 + 8 \text{ kN} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \therefore \boxed{R_C = 4 \text{ kN}}$$

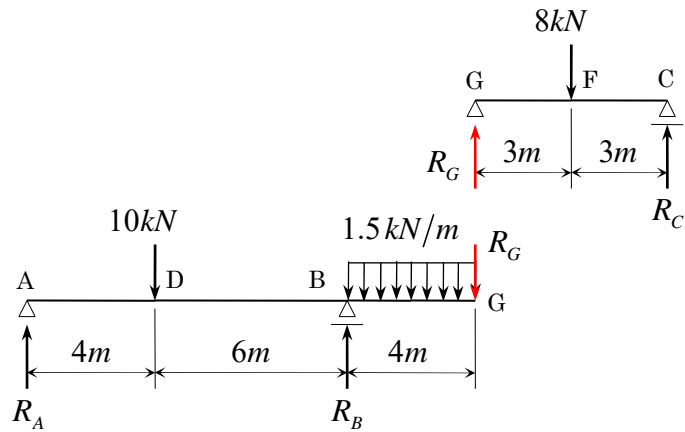
(4) 曲げモーメント M_D

$$M_D \times \frac{5}{12} + 10 \text{ kN} \times (-1 \text{ m}) + 1.5 \text{ kN/m} \times \left[\frac{1}{2} \times \left\{-\left(-\frac{2}{3} \text{ m}\right)\right\} \times 4 \text{ m}\right] + 8 \text{ kN} \times \left\{-\left(-\frac{1}{3} \text{ m}\right)\right\} = 0$$

$$\therefore \frac{5}{12} M_D - 10 \text{ kN} \cdot \text{m} + 2 \text{ kN} \cdot \text{m} + \frac{8}{3} \text{ kN} \cdot \text{m} = 0$$

$$\therefore \frac{5}{12} M_D = 10 - 2 - \frac{8}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \therefore \boxed{M_D = \frac{16}{3} \cdot \frac{12}{5} = \frac{64}{5} = 12.8 \text{ kN} \cdot \text{m}}$$

[Check]



問題のゲルバーばりを分解すると、上図のようになる。

これを用いて、支点反力 R_A , R_B , R_C および曲げモーメント M_D を求める。

$$R_C = R_G = 4kN$$

$$10R_B = 10kN \times 4m + 1.5kN/m \times 4m \times \left(10m + \frac{1}{2} \times 4m\right) + R_G \times 14m$$

$$\therefore 10R_B = 40 + 72 + 56 = 168kN \cdot m$$

$$\therefore R_B = 16.8kN$$

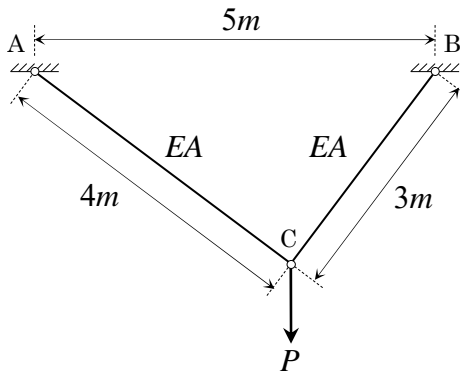
$$R_A + R_B = 10 + 1.5 \times 4 + R_G = 16 + 4 = 20$$

$$\therefore R_A = 20 - 16.8 = 3.2kN$$

$$M_D = R_A \times 4 = 3.2 \times 4 = 12.8$$

$$\therefore M_D = 12.8kN \cdot m$$

【問題 UL-T-1】 下図に示すトラスの載荷点 C の鉛直変位 v_C と水平変位 u_C を求めよ。ただし、各部材の引張剛性 EA は一定とする。



【解答】

右図のように、 C 点に次の3つがそれぞれ作用するときの部材力 N_{AC} 、 N_{BC} を求めると、次のようになる。

1) 集中荷重 P

水平方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5} N_{AC} = \frac{3}{5} N_{BC} \quad \therefore N_{BC} = \frac{4}{3} N_{AC} \quad \dots\dots\dots ①$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$\frac{3}{5} N_{AC} + \frac{4}{5} N_{BC} = P \quad \dots\dots\dots ②$$

①を②に代入すると、

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} \right) \cdot N_{AC} = \frac{9+16}{15} N_{AC} = \frac{25}{15} N_{AC} = \frac{5}{3} N_{AC} = P$$

$$\therefore N_{AC} = \frac{3}{5} P, \quad N_{BC} = \frac{4}{5} P$$

2) 単位の鉛直方向集中荷重 $\bar{P} = 1$

上記 1) と同様にして、 $\bar{N}_{AC} = \frac{3}{5}$ 、 $\bar{N}_{BC} = \frac{4}{5}$

3) 単位の水平方向集中荷重 $\bar{P} = 1$

水平方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5} \bar{N}_{AC} = \frac{2}{5} \bar{N}_{BC} + \bar{P} \quad \dots\dots\dots ①'$$

鉛直方向の力の釣合から、

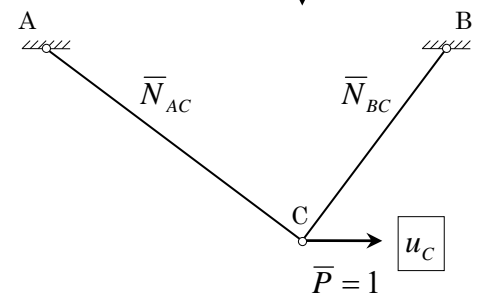
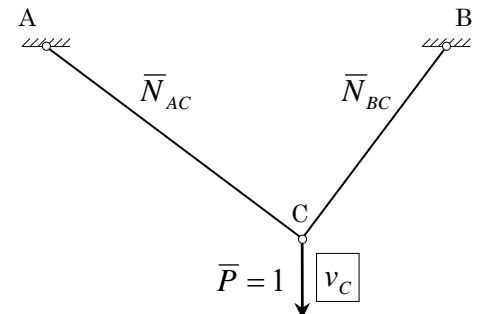
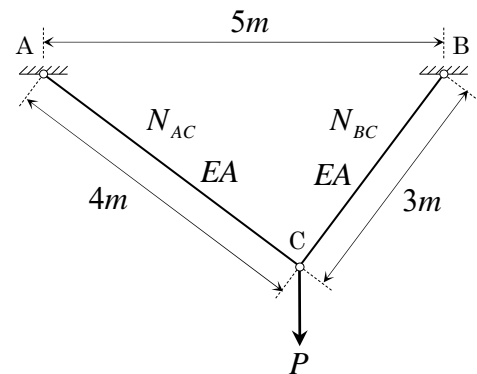
$$\frac{3}{5} \bar{N}_{AC} + \frac{4}{5} \bar{N}_{BC} = 0$$

$$\therefore \bar{N}_{BC} = -\frac{3}{4} \bar{N}_{AC} \quad \dots\dots\dots ②'$$

②'を①'に代入すると、

$$\left\{ \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) \right\} \cdot \bar{N}_{AC} = \frac{16+9}{20} \bar{N}_{AC} = \frac{25}{20} \bar{N}_{AC} = \frac{5}{4} \bar{N}_{AC} = \bar{P} = 1$$

$$\therefore \bar{N}_{AC} = \frac{4}{5}, \quad \bar{N}_{BC} = -\frac{3}{5}$$



以上より、「単位荷重法」を用いて、点 C の鉛直変位 v_C と水平変位 u_C を求めると、次のようになる。

$$1 \times v_C = \int_0^{\ell} \frac{N\bar{N}}{EA} dx = \frac{1}{EA} \left\{ \frac{3}{5} P \cdot \frac{3}{5} \times 4m + \frac{4}{5} P \cdot \frac{4}{5} \times 3m \right\} = \frac{P}{EA} \left(\frac{36}{25} + \frac{48}{25} \right) = \frac{84}{25} \cdot \frac{P}{EA}$$

$$\therefore v_C = \frac{84}{25} \cdot \frac{P}{EA} \quad (m)$$

$$1 \times u_C = \int_0^{\ell} \frac{N\bar{N}}{EA} dx = \frac{1}{EA} \left\{ \frac{3}{5} P \cdot \frac{4}{5} \times 4m + \frac{4}{5} P \cdot \left(-\frac{3}{5} \right) \times 3m \right\} = \frac{P}{EA} \left(\frac{48}{25} - \frac{26}{25} \right) = \frac{12}{25} \cdot \frac{P}{EA}$$

$$\therefore u_C = \frac{12}{25} \cdot \frac{P}{EA} \quad (m)$$

※単位の水平方向集中荷重 $\bar{P} = 1$ を左方向に与えると、「負」になる。

すなわち、与えた単位荷重方向に変位した場合は「正」、逆方向の場合は「負」になる。

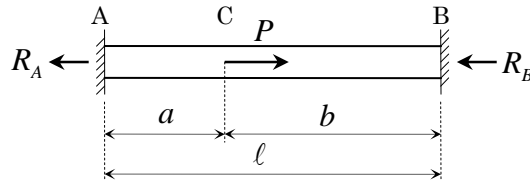
【問題 CA1-1】 下図のような長さ l ，ヤング係数 E の真直な棒の両端 A ， B を固定し、点 C に軸方向外力 P を作用させるとき、固定端に生じる反力 R_A ， R_B を次の2通りの方法で求めよ。ただし、棒の断面積 A は一定とする。

①部分 AC ， BC の伸びをそれぞれ Δ_1 ， Δ_2 として、

力の釣合条件、フックの法則、変位の適合条件 ($\Delta_1 + \Delta_2 = 0$)

から求める方法。

②点 C の右向きの変位を Δ とし、棒に蓄えられるひずみエネルギー U と「カステリアーノの第1定理」より求める方法。



【解答①】

力の釣合条件より、 $R_A + R_B - P = 0$ ①

また、部分 AC ， BC の軸方向力をそれぞれ N_1 ， N_2 とすると、

$$N_1 = R_A \quad \text{.....②}$$

$$N_2 = -R_B \quad \text{.....③}$$

次に、部分 AC ， BC の伸びをそれぞれ Δ_1 ， Δ_2 とすると、フックの法則と②，③式より、

$$N_1 = EA \frac{\Delta_1}{a} \quad \therefore \Delta_1 = \frac{N_1}{EA} a = \frac{R_A}{EA} a \quad \text{.....④}$$

$$N_2 = EA \frac{\Delta_2}{b} \quad \therefore \Delta_2 = \frac{N_2}{EA} b = -\frac{R_B}{EA} b \quad \text{.....⑤}$$

さらに、変位の適合条件を考えると、両端は固定されて棒の長さは不変だから、

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 0 \quad \text{.....⑥}$$

よって、⑥式に④，⑤式を代入して、

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \frac{1}{EA} (R_A \cdot a - R_B \cdot b) = 0 \quad \therefore R_A \cdot a - R_B \cdot b = 0 \quad \therefore R_B = \frac{a}{b} R_A$$

これを①式に代入すると、

$$R_A + \frac{a}{b} R_A - P = \frac{a+b}{b} R_A - P = \frac{\ell}{b} R_A - P = 0 \quad \therefore R_A = \frac{b}{\ell} P, \quad R_B = \frac{a}{\ell} P$$

【解答②】

点 C の右向きの変位を Δ とすれば、棒に蓄えられるひずみエネルギー U は、

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{N^2}{EA} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{EA} \ell = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{EA} \cdot \left(EA \frac{\Delta}{\ell} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{EA}{\ell} \Delta^2$$

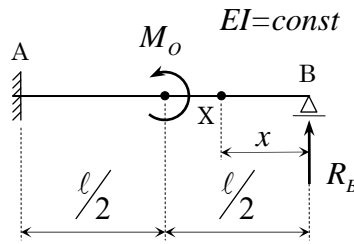
と表されるから、

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{EA}{a} \Delta^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{EA}{b} \Delta^2 = \frac{(a+b)EA}{2ab} \Delta^2 = \frac{EA\ell}{2ab} \Delta^2$$

「カステリアーノの第1定理」より、 $\frac{\partial U}{\partial \Delta} = P$ すなわち、 $\frac{\partial U}{\partial \Delta} = \frac{EA\ell}{ab} \Delta = P \quad \therefore \Delta = \frac{ab}{EA\ell} P$

したがって、 $R_A = EA \frac{\Delta}{a} = \frac{b}{\ell} P, \quad R_B = EA \frac{\Delta}{b} = \frac{a}{\ell} P$

【問題 LW-B-3】 下図に示すような曲げ剛性 EI が一定で、集中モーメント M_o が作用する 1 次不静定ばりの B 点の支点反力 R_B を “最小仕事の原理、” を用いて求めよ。なお、せん断力の影響は無視する。

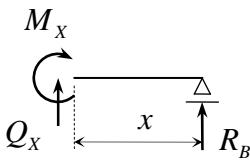


【解答】

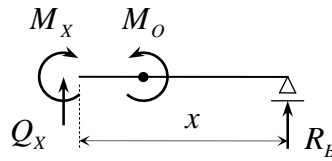
不静定力を R_B とすると、点 X(支点 B の左側で距離 x の点)の曲げモーメント M_x は、次のようになる。

$$0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \text{ のとき、}$$

$$\frac{\ell}{2} < x \leq \ell \text{ のとき、}$$



$$M_x = R_B x$$



$$M_x = R_B x + M_o$$

このとき、はりに蓄えられるひずみエネルギー U は、次のようになる。

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \frac{M_x^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left\{ \int_0^{\ell/2} (R_B x)^2 dx + \int_{\ell/2}^{\ell} (R_B x + M_o)^2 dx \right\} \\ &= \frac{1}{2EI} \left\{ R_B^2 \int_0^{\ell/2} x^2 dx + R_B^2 \int_{\ell/2}^{\ell} x^2 dx + 2R_B M_o \int_{\ell/2}^{\ell} x dx + M_o^2 \int_{\ell/2}^{\ell} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2EI} \left\{ R_B^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\ell/2} + 2R_B M_o \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\ell/2}^{\ell} + M_o^2 \left[x \right]_{\ell/2}^{\ell} \right\} = \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{1}{3} R_B^2 \ell^3 + R_B M_o \left(\ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \right) + \frac{\ell}{2} M_o^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{\ell^3}{3} R_B^2 + \frac{3}{4} \ell^2 M_o R_B + \frac{\ell}{2} M_o^2 \right\} \end{aligned}$$

ここで、 U を R_B で偏微分して、“最小仕事の原理、” $\frac{\partial U}{\partial R_B} = 0$ より R_B を求めると、次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{1}{2EI} \left\{ \frac{2}{3} \ell^3 R_B + \frac{3}{4} \ell^2 M_o \right\} = 0 \quad \therefore \frac{2}{3} \ell^3 R_B + \frac{3}{4} \ell^2 M_o = 0$$

$$\therefore R_B = -\frac{3}{4} \ell^2 M_o \cdot \frac{3}{2\ell^3} = -\frac{9}{8} \cdot \frac{M_o}{\ell} \quad \text{すなわち、} \boxed{R_B = -\frac{9}{8} \cdot \frac{M_o}{\ell}}$$

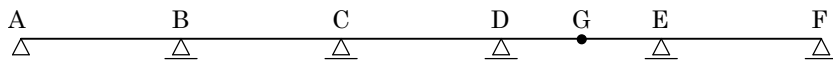
《別解》

はりに蓄えられるひずみエネルギー U を計算する際に、 R_B での偏微分を先に行うと、次のようになる。

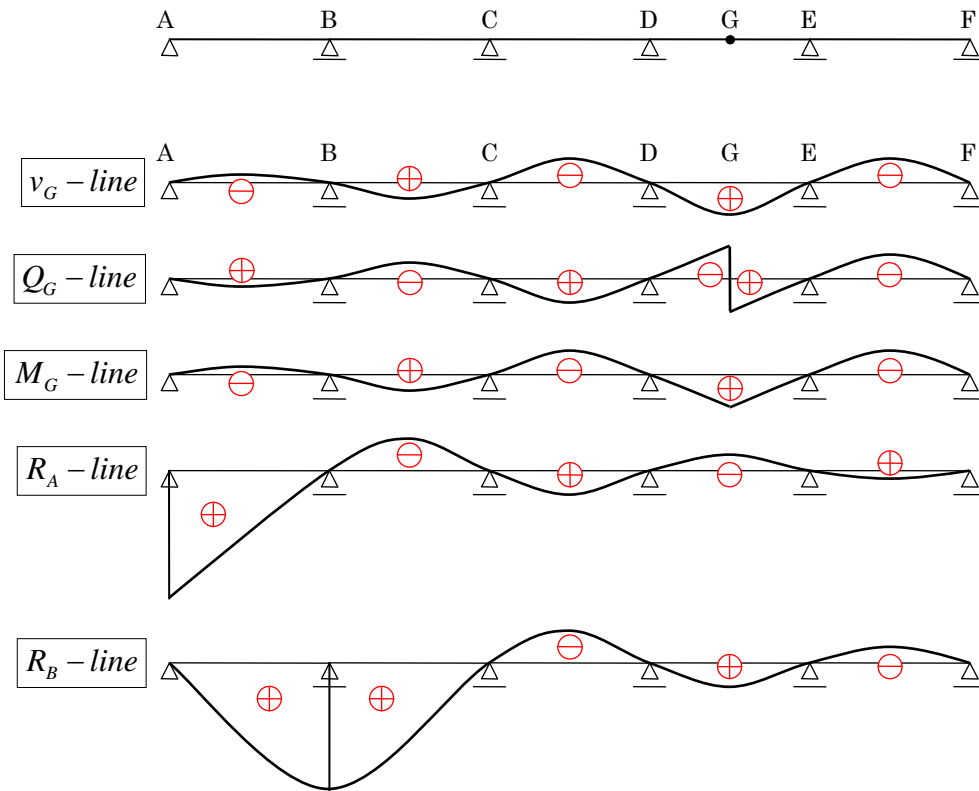
$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial R_B} &= \frac{1}{2EI} \left\{ 2R_B \int_0^{\ell/2} x^2 dx + 2 \int_{\ell/2}^{\ell} x (R_B x + M_o) dx \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ R_B \int_0^{\ell/2} x^2 dx + R_B \int_{\ell/2}^{\ell} x^2 dx + M_o \int_{\ell/2}^{\ell} x dx \right\} \\ &= \frac{1}{EI} \left\{ R_B \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\ell/2} + M_o \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\ell/2}^{\ell} \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ R_B \cdot \frac{\ell^3}{3} + M_o \left(\frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell^2}{8} \right) \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{\ell^3}{3} R_B + \frac{3}{8} \ell^2 M_o \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{R_B = -\frac{3}{8} \ell^2 M_o \cdot \frac{3}{\ell^3} = -\frac{9}{8} \cdot \frac{M_o}{\ell}}$$

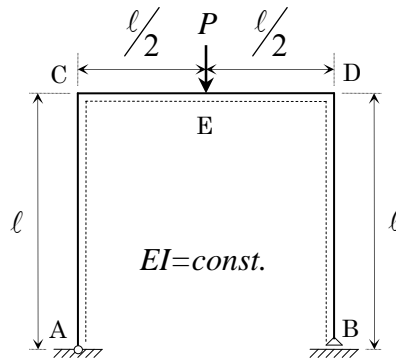
【問題 MB-3】 “ミュラー・ブレスラウ(Müller-Breslau)の定理”を用いて、
 下図に示す不静定ばりの G 点のたわみ v_G ，せん断力 Q_G ，曲げモーメント M_G と支点反力 R_A ， R_B の
 影響線の概略を図示せよ。ただし、図中には、正負の符号を必ず明記すること。



【解答】

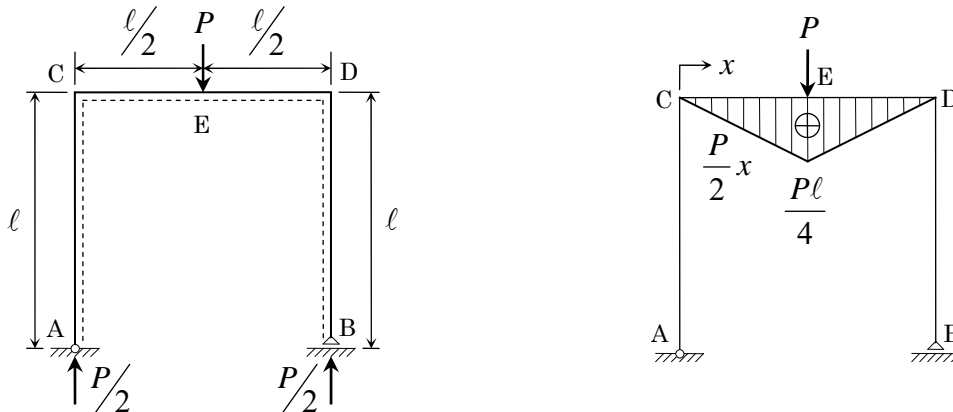


【問題 UL-R-4】 下図に示す静定ラーメンの B 点の水平右方向の変位 Δ_B を “単位荷重法” を用いて求めよ。ただし、曲げ剛性 EI は一定とし、軸方向力・せん断力の影響は無視する。また、曲げモーメントは、点線側が “引張” となる曲げモーメントを “正” とする。

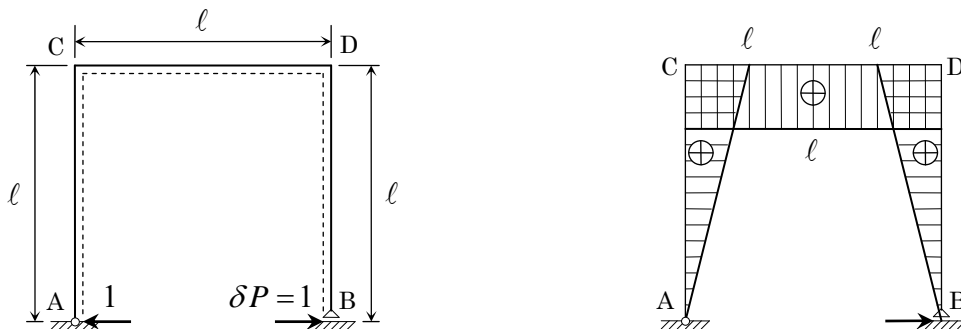


【解答】

実系の曲げモーメント図 (M -図) を求めると、下左図より、下右図のようになる。



次に、下左図のような仮想系の曲げモーメント図 (\bar{M} -図) を求めると、下右図のようになる。

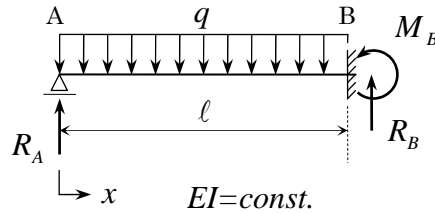


これに、 “単位荷重法” を適用すれば、次のようになる。

$$1 \times \Delta_B = \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(\frac{P}{2} x \right) \cdot \ell dx = \frac{2}{EI} \cdot \frac{P\ell}{2} \int_0^{\frac{\ell}{2}} x dx = \frac{P\ell}{EI} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\ell}{2}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

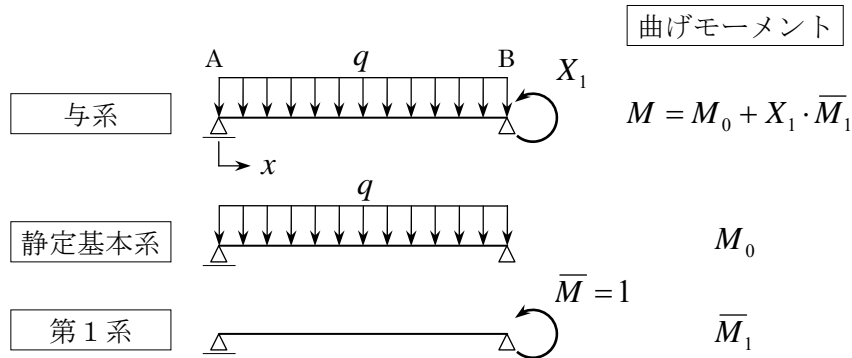
$$\therefore \Delta_B = \frac{1}{8} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

【問題 SM-2】 “応力法 (余力法)” を用いて、下図に示すような 1 次不静定片持ばりの B 点の支点曲げモーメント M_B を求めよ。ただし、曲げ剛性 EI は一定とし、せん断力の影響は無視する。

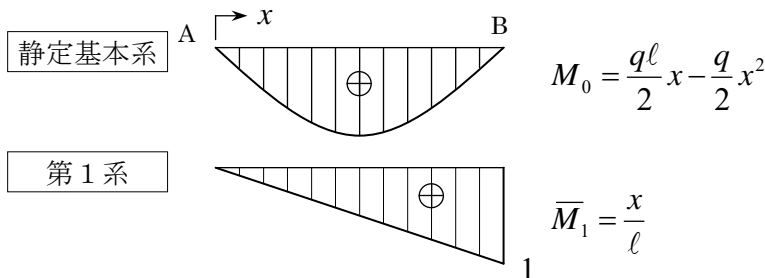


【解答】

支点曲げモーメント M_B を “不静定力” とし、その与系・静定基本系・第 1 系を下図のように考える。



静定基本系と第 1 系の曲げモーメント図を図示する下図のようになる。



与系と第 1 系に対して “単位荷重法” を適用して、B 点のたわみ角 θ_B を求めると、次のようになる。

$$1 \times \theta_B = \int_0^l \frac{M \bar{M}_1}{EI} dx = \int_0^l \frac{(M_0 + X_1 \cdot \bar{M}_1) \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \int_0^l \frac{M_0 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx + X_1 \cdot \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx$$

ところが、B 点は固定端であるから、たわみ角 $\theta_B = 0$ となるので、B 点の支点曲げモーメント M_B 、即ち、 X_1 は次式から求まる。

$$M_B = X_1 = \frac{- \int_0^l \frac{M_0 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx}{\int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx}$$

この式の (分子)、(分母) を計算すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{M_0 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx &= \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{q\ell}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \right) \cdot \left(\frac{x}{\ell} \right) dx = \frac{q}{2EI} \int_0^l \left(x^2 - \frac{x^3}{\ell} \right) dx = \frac{q}{2EI} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4\ell} \right]_0^\ell \\ &= \frac{q\ell^3}{2EI} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{q\ell^3}{24EI} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{1}{EI\ell^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} = \frac{1}{EI\ell^2} \cdot \frac{\ell^3}{3} = \frac{\ell}{3EI}$$

$$\therefore X_1 = \frac{-\int_0^{\ell} \frac{M_0 \cdot \overline{M}_1}{EI} dx}{\int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dx} = \frac{-\frac{q\ell^3}{24EI}}{\frac{\ell}{3EI}} = -\frac{1}{8}q\ell^2 \quad \therefore \boxed{M_B = -\frac{1}{8}q\ell^2}$$

[補足]

問題の 1 次不静定片持ばりの支点反力は、結局次のようになる。

鉛直方向の力の釣合から， $R_A + R_B = q\ell$ (1)

B 点回りのモーメントの釣合から， $M_B + q\ell \cdot \frac{\ell}{2} = R_A \cdot \ell$ (2)

上記の(2)式に対して， $M_B = -\frac{1}{8}q\ell^2$ を代入すると，

$$R_A \cdot \ell = -\frac{1}{8}q\ell^2 + \frac{1}{2}q\ell^2 = \frac{3}{8}q\ell^2 \quad \therefore \boxed{R_A = \frac{3}{8}q\ell} \quad \text{また, } \boxed{R_B = \frac{5}{8}q\ell}$$

【問題 SM-5】 下図に示す曲げ剛性が EI で一定の不静定ばりについて、次の設問に答えよ。

- (1) 支点反力 R_B を不静定力と考えて、添付した **“変形の公式”** を用いて、これを求めよ。
- (2) 支点反力 R_A 、 R_C を求めよ。
- (3) 断面力図（せん断力図、曲げモーメント図）を図示せよ。

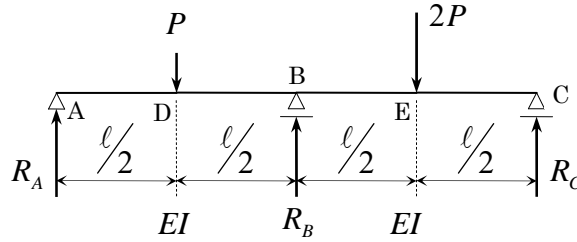


表-8.1(a) 各種はりのたわみおよびたわみ角

	荷重状態	たわみ曲線	特定点のたわみ
単純 ばり ①		$y_l = \frac{Pa^2b^2}{6EI} \left(2\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2b} \right)$ $y_r = \frac{Pa^2b^2}{6EI} \left(2\frac{x'}{b} + \frac{x'}{a} - \frac{x'^3}{ab^2} \right)$	$y_c = \frac{Pa^2b^2}{3EI}$
単純 ばり ②		$y_l = \frac{Pl^3}{16EI} \left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{l^3} \right) \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$	$y_{\max} = y_c = \frac{Pl^3}{48EI}$

【解答】

- (1) 問題の不静定ばりにおいて、支点 B を外したものを静定基本系と考え、まず、**“変形の公式”** を利用して、 B 点の変位 v_B を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 v_B &= \frac{P \left(\frac{l}{2} \right)^2 \left(\frac{3}{2}l \right)^2}{6EI(2l)} \left(2 \frac{\frac{l}{2}}{\frac{3}{2}l} + \frac{l}{\frac{l}{2}} - \frac{l^3}{\left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{3}{2}l \right)^2} \right) + \frac{2P \left(\frac{3}{2}l \right)^2 \left(\frac{l}{2} \right)^2}{6EI(2l)} \left(2 \frac{\frac{l}{2}}{\frac{3}{2}l} + \frac{l}{\frac{l}{2}} - \frac{l^3}{\left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{3}{2}l \right)^2} \right) \\
 &= \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{3^2}{2^5} \left(\frac{4}{3} + 2 - \frac{8}{9} \right) + \frac{2Pl^3}{6EI} \cdot \frac{3^2}{2^5} \left(\frac{4}{3} + 2 - \frac{8}{9} \right) = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{12+18-8}{9} + \frac{2Pl^3}{6EI} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{12+18-8}{9} \\
 &= \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{22}{32} + \frac{2Pl^3}{6EI} \cdot \frac{22}{32} = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{11}{16} + \frac{2Pl^3}{6EI} \cdot \frac{11}{16} = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \left(\frac{11}{16} + \frac{22}{16} \right) = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{33}{16}
 \end{aligned}$$

次に、静定基本系の B 点に外力 X を作用させたとき、上記の B 点の変位 v_B と等しくなるような外力 X の大きさを求めれば、 B 点の支点反力 R_B が得られる。

そこで、**“変形の公式”** を利用して、 B 点の変位 v'_B を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 v'_B &= \frac{X(2l)^3}{48EI} = \frac{8Xl^3}{48EI} = \frac{Xl^3}{6EI} \\
 v_B &= v'_B \text{ であるから、} \quad \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{33}{16} = \frac{Xl^3}{6EI} \quad \therefore X = \frac{6EI}{l^3} \cdot \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{33}{16} = \frac{33}{16}P = R_B
 \end{aligned}$$

よって、 $R_B = \frac{33}{16}P$

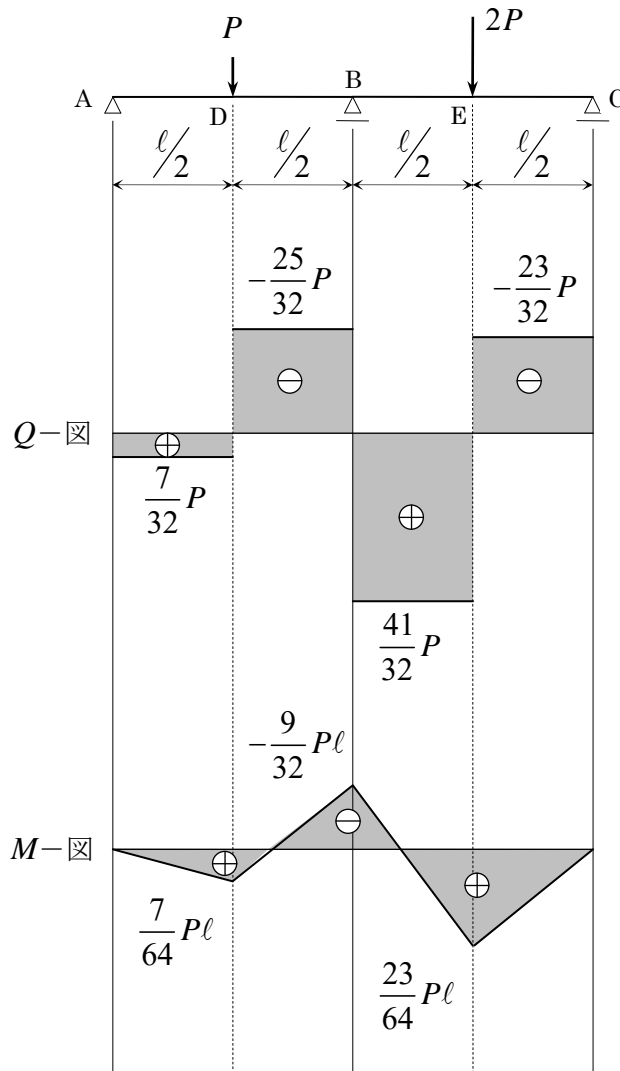
(2) 支点反力 R_A , R_C を求めると、次のようになる。

$$R_A = \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}(2P) - \frac{1}{2}R_B = \frac{5}{4}P - \frac{33}{32}P = \frac{40-33}{32}P = \frac{7}{32}P \quad \therefore R_A = \frac{7}{32}P$$

$$R_C = \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}(2P) - \frac{1}{2}R_B = \frac{7}{4}P - \frac{33}{32}P = \frac{56-33}{32}P = \frac{23}{32}P \quad \therefore R_C = \frac{23}{32}P$$

以上まとめると、支点反力は、 $R_A = \frac{7}{32}P$, $R_B = \frac{33}{16}P$, $R_C = \frac{23}{32}P$ となる。

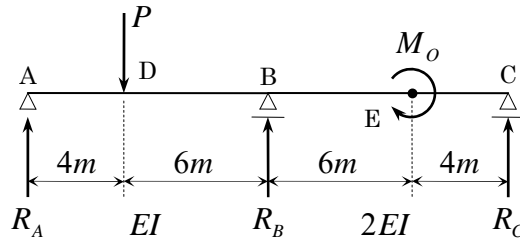
(3) 断面力図（せん断力図，曲げモーメント図）を図示すると、以下のようになる。



【問題 3M-1】 下図に示す 1 次不静定ばりについて、次の設問に答えよ。

なお、A~B, B~C 間の曲げ剛性は、それぞれ EI , $2EI$ とする。また、支点沈下はないものとする。

- (1) “3 連モーメントの定理”を用いて、B 点の支点曲げモーメント M_B を求めよ。
- (2) 支点反力 R_A , R_B , R_C を求めよ。
- (3) 曲げモーメント図 (M -図) とせん断力図 (Q -図) を図示せよ。



【解答】

(1) A, B, C 点の支点曲げモーメントをそれぞれ M_A, M_B, M_C として、“3 連モーメントの定理”の式を適用すると、支点沈下はないので、部材回転角： $R_n = R_{n+1} = 0$ だから、次のようになる。

$$\frac{10m}{I} M_A + 2 \cdot \left(\frac{10m}{I} + \frac{10m}{2I} \right) \cdot M_B + \frac{10m}{2I} M_C = -6 \cdot \left(\frac{\bar{A}_0}{I} + \frac{\bar{B}_0}{2I} \right)$$

荷重項については、表を参照すると、

$$\bar{A}_0 = \frac{P\ell^2}{6} \cdot \left(\frac{a}{\ell} - \frac{a^3}{\ell^3} \right) = \frac{P \cdot 10^2}{6} \cdot \left(\frac{4}{10} - \frac{4^3}{10^3} \right) = \frac{P}{6} \cdot \left(40 - \frac{4^3}{10} \right) = \frac{P}{6} \cdot \frac{400 - 64}{10} = \frac{P}{6} \cdot \frac{336}{10} = \frac{56}{10} P = \frac{28}{5} P$$

$$\bar{B}_0 = -M \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \left(1 - 3 \frac{b^2}{\ell^2} \right) = -M_o \cdot \frac{10}{6} \cdot \left(1 - 3 \frac{4^2}{10^2} \right) = -M_o \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{100 - 48}{100} = -M_o \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{52}{100} = -\frac{13}{15} M_o$$

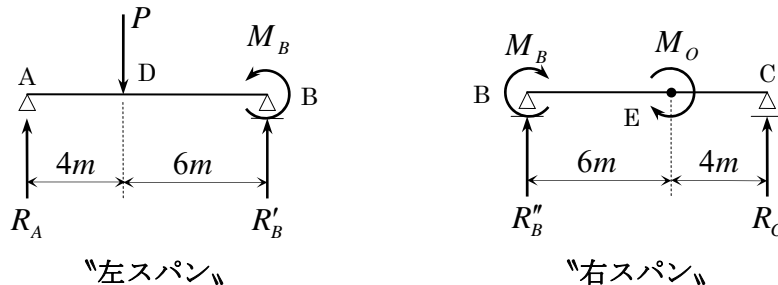
であり、また、A, C 点の支点曲げモーメントは、 $M_A = M_C = 0$ であるから、

$$2 \cdot \left(\frac{10}{I} + \frac{10}{2I} \right) \cdot M_B = -6 \cdot \left(\frac{28P}{5I} - \frac{13M_o}{30I} \right) \quad \therefore 2 \cdot \left(10 + \frac{10}{2} \right) \cdot M_B = -6 \cdot \left(\frac{28}{5} P - \frac{13}{30} M_o \right)$$

$$\therefore 15M_B = -\frac{84}{5} P + \frac{13}{10} M_o \quad \therefore M_B = -\frac{84}{75} P + \frac{13}{150} M_o = -\frac{28}{25} P + \frac{13}{150} M_o$$

よって、
$$M_B = -\frac{28}{25} P + \frac{13}{150} M_o$$

(2) 1 次不静定ばりを下図に示すように“左スパン”と“右スパン”に分解して考える。



まず、“左スパン”について解く。

鉛直方向の力の釣合から、
$$R_A + R'_B = P$$

B 点回りのモーメントの釣合から、
$$R_A \times 10m = P \times 6m + M_B$$

$$\therefore 10R_A = 6P + \left(-\frac{28}{25} P + \frac{13}{150} M_o \right) = \frac{150 - 28}{25} P + \frac{13}{150} M_o = \frac{122}{25} P + \frac{13}{150} M_o$$

$$\therefore R_A = \frac{61}{125} P + \frac{13}{1500} M_o$$

$$\text{よって、 } R'_B = P - R_A = P - \left(\frac{61}{125}P + \frac{13}{1500}M_o \right) = \frac{64}{125}P - \frac{13}{1500}M_o$$

次に、「右スパン」について解く。

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} \quad R''_B + R_C = 0$$

$$B \text{ 点回りのモーメントの釣合から、} \quad R_C \times 10m = M_B + M_o$$

$$\therefore 10R_C = \left(-\frac{28}{25}P + \frac{13}{150}M_o \right) + M_o = -\frac{28}{25}P + \frac{163}{150}M_o \quad \therefore R_C = -\frac{14}{125}P + \frac{163}{1500}M_o$$

$$\text{よって、 } R''_B = -R_C = \frac{14}{125}P - \frac{163}{1500}M_o$$

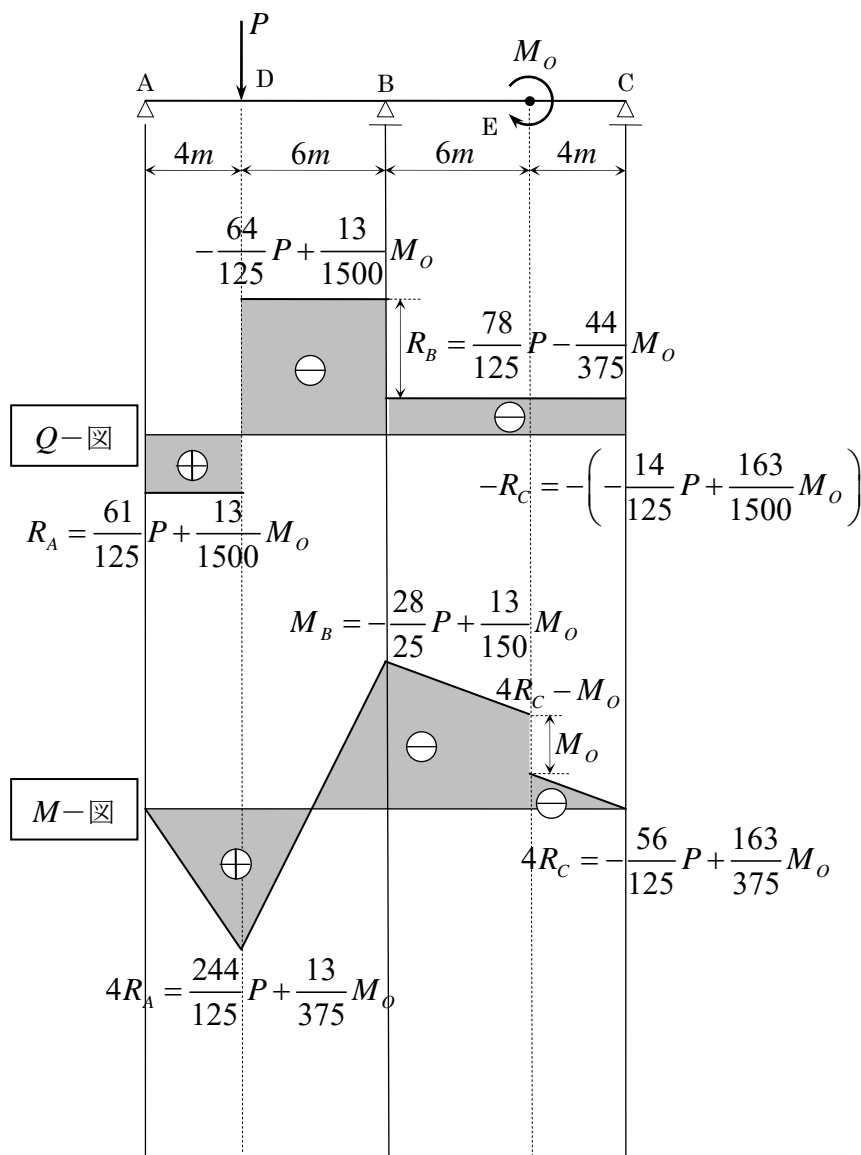
したがって、

$$\begin{aligned} R_B &= R'_B + R''_B = \left(\frac{64}{125}P - \frac{13}{1500}M_o \right) + \left(\frac{14}{125}P - \frac{163}{1500}M_o \right) \\ &= \frac{64+14}{125}P - \frac{13+163}{1500}M_o = \frac{78}{125}P - \frac{176}{1500}M_o = \frac{78}{125}P - \frac{44}{375}M_o \end{aligned}$$

以上をまとめると、

$$\boxed{R_A = \frac{61}{125}P + \frac{13}{1500}M_o}, \quad \boxed{R_B = \frac{78}{125}P - \frac{44}{375}M_o}, \quad \boxed{R_C = -\frac{14}{125}P + \frac{163}{1500}M_o}$$

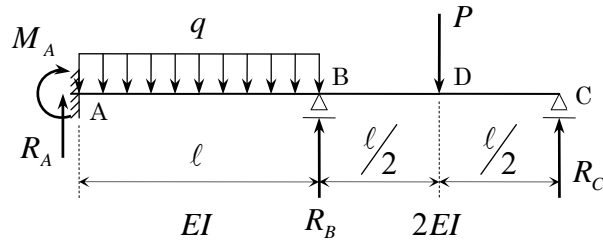
(3) 曲げモーメント図 (M -図) とせん断力図 (Q -図) を図示すると、下図のようになる。



【問題 3M-5】 下図に示す 2 次不静定ばりについて、次の設問に答えよ。

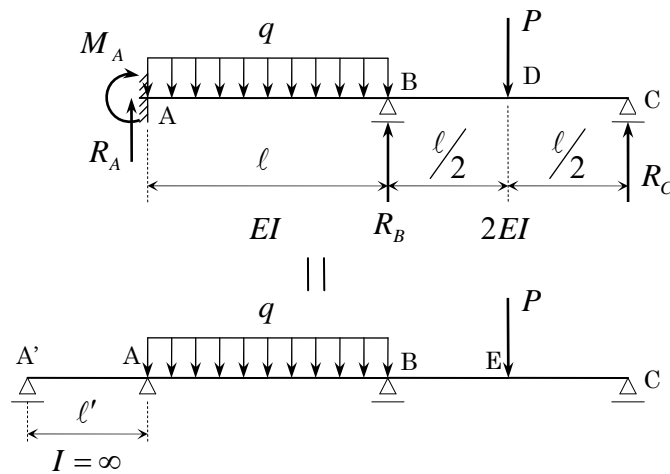
なお、A～B、B～C 間の曲げ剛性は、それぞれ EI 、 $2EI$ とする。また、支点沈下はないものとする。

- (1) “3 連モーメントの定理”を用いて、A 点と B 点の支点曲げモーメント M_A 、 M_B を求めよ。
- (2) 支点反力 R_A 、 R_B 、 R_C を求めよ。
- (3) 曲げモーメント図 (M -図) とせん断力図 (Q -図) を図示せよ。



【解答】

(1) 問題はりの固定端部は、下図のように、長さ l' 、断面 2 次モーメント $I = \infty$ のはりが付加されたと考えることができる。



このように考えて、A'～B 間と A～C 間に “3 連モーメントの定理” を適用すると、次のようになる。A'～B 間について、

$$\frac{l'}{\infty} M'_A + 2 \cdot \left(\frac{l'}{\infty} + \frac{l}{I} \right) M_A + \frac{l}{I} M_B = -6 \cdot \left(\frac{q l^3}{24 I} \right) = -\frac{l}{I} \cdot \frac{q l^2}{4}$$

$$\therefore 2M_A + M_B = -\frac{1}{4} q l^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

A～C 間について、

$$\frac{l}{I} M_A + 2 \cdot \left(\frac{l}{I} + \frac{l}{2I} \right) M_B + \frac{l}{2I} M_C = -6 \cdot \left(\frac{q l^3}{24 I} + \frac{P l^2}{16 I} \right) = -\frac{l}{I} \left(\frac{1}{4} q l^2 + \frac{3}{16} P l \right)$$

ここで、 $M_C = 0$ だから、

$$\therefore M_A + 3M_B = -\frac{1}{4} q l^2 - \frac{3}{16} P l \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①×3-②より、

$$5M_A = -\frac{3}{4} q l^2 + \frac{1}{4} q l^2 + \frac{3}{16} P l = -\frac{1}{2} q l^2 + \frac{3}{16} P l \quad \therefore M_A = -\frac{1}{10} q l^2 + \frac{3}{80} P l$$

①-②×2より、

$$-5M_B = -\frac{1}{4}ql^2 + \frac{1}{2}ql^2 + \frac{3}{8}Pl = \frac{1}{4}ql^2 + \frac{3}{8}Pl \quad \therefore M_B = -\frac{1}{20}ql^2 - \frac{3}{40}Pl$$

(2) 問題のほりを下図のように図-Aと図-Bの2つに分解して考える。

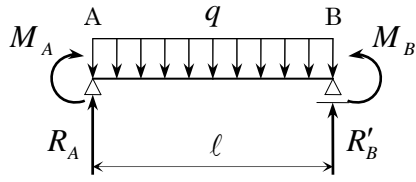


図-A

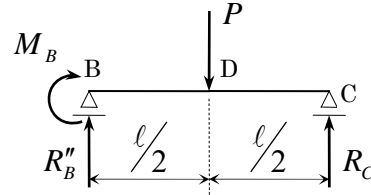


図-B

図-Aについて解くと、

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} \quad R_A + R'_B = ql$$

$$B \text{ 点回りのモーメントの釣合から、} \quad M_A + R_A \cdot l = M_B + ql \cdot \frac{l}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore R_A l &= \frac{1}{2}ql^2 - \left(-\frac{1}{10}ql^2 + \frac{3}{80}Pl\right) + \left(-\frac{1}{20}ql^2 - \frac{3}{40}Pl\right) \\ &= \frac{10-1+2}{20}ql^2 - \frac{6+3}{80}Pl = \frac{11}{20}ql^2 - \frac{9}{80}Pl \end{aligned}$$

$$\therefore R_A = \frac{11}{20}ql - \frac{9}{80}P \quad \text{また、} \quad R'_B = ql - R_A = ql - \frac{11}{20}ql + \frac{9}{80}P = \frac{9}{20}ql + \frac{9}{80}P$$

図-Bについて解くと、

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、} \quad R''_B + R_C = P$$

$$B \text{ 点回りのモーメントの釣合から、} \quad R_C \cdot l = M_B + P \cdot \frac{l}{2}$$

$$\therefore R_C l = \left(-\frac{1}{20}ql^2 - \frac{3}{40}Pl\right) + \frac{1}{2}Pl = -\frac{1}{20}ql^2 + \frac{17}{40}Pl$$

$$\therefore R_C = -\frac{1}{20}ql + \frac{17}{40}P \quad \text{また、} \quad R''_B = P - R_C = P + \frac{1}{20}ql - \frac{17}{40}P = \frac{1}{20}ql + \frac{23}{40}P$$

したがって、

$$R_B = R'_B + R''_B = \frac{9}{20}ql + \frac{9}{80}P + \frac{1}{20}ql + \frac{23}{40}P = \frac{1}{2}ql + \frac{55}{80}P = \frac{1}{2}ql + \frac{11}{16}P$$

以上をまとめると、

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{11}{20}ql - \frac{9}{80}P \\ R_B &= \frac{1}{2}ql + \frac{11}{16}P \\ R_C &= -\frac{1}{20}ql + \frac{17}{40}P \end{aligned}$$

【Check】

$$\begin{aligned} R_A + R_B + R_C &= \left(\frac{11}{20}ql - \frac{9}{80}P\right) + \left(\frac{1}{2}ql + \frac{11}{16}P\right) + \left(-\frac{1}{20}ql + \frac{17}{40}P\right) \\ &= \frac{11+10-1}{20}ql + \frac{-9+55+34}{80}P = \frac{20}{20}ql + \frac{80}{80}P = ql + P \quad \text{Check O.K.} \end{aligned}$$

(3) 曲げモーメント図 (M -図) とせん断力図 (Q -図) を図示すると、下図のようになる。

