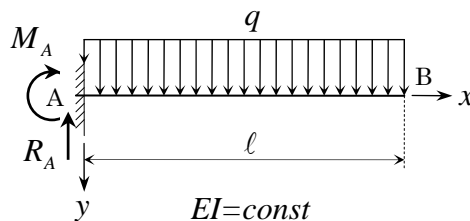


【問題 BD4-CL-1】 下図に示す曲げ剛性  $EI$  が一定で、A 点固定の“片持ばり”について、次の設問に答えよ。

- (1) 支点反力  $M_A$ ,  $R_A$  を求めよ。
- (2) せん断力  $Q(x)$ 、曲げモーメント  $M(x)$  の式を求め、次に、断面力図、すなわち、せん断力図 ( $Q$ -図)、曲げモーメント図 ( $M$ -図) を図示せよ。
- (3) はりの変形の基本式  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$  を用いて、たわみ角  $\theta(x)$  とたわみの式  $y(x)$  を求めよ。
- (4) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式  $EI \frac{d^4y}{dx^4} = q$  を用いて、たわみ角  $\theta(x)$  とたわみの式  $y(x)$  を求めよ。

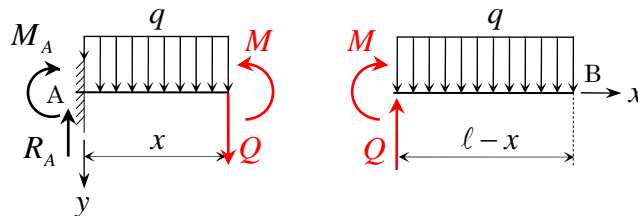


【解答】

- (1) 鉛直方向の力の釣合より、 $R_A = ql$

A 点回りのモーメントの釣合より、 $M_A + ql \times \frac{l}{2} = 0 \quad \therefore M_A = -\frac{1}{2}ql^2$

- (2) A 点から距離  $x$  の点ではりを切断すると、下図のようになる。



左自由体について、釣合を考えると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合より、 $Q + q \cdot x = R_A \quad \therefore Q(x) = q \cdot l - q \cdot x = q \cdot (l - x)$

切断点回りのモーメントの釣合より、

$$M + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = M_A + R_A \cdot x \quad \therefore M(x) = -q \cdot \frac{x^2}{2} + ql \cdot x - \frac{1}{2}ql^2 = -\frac{q}{2}(l-x)^2$$

右自由体について、釣合を考えると、次のようになる。

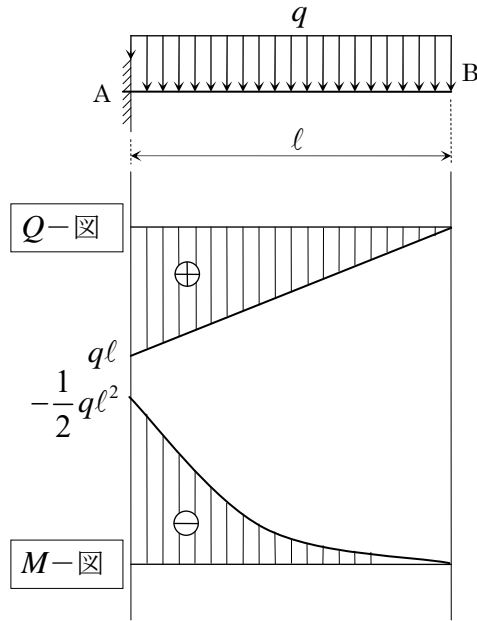
鉛直方向の力の釣合より、 $Q = q \cdot (l - x) \quad \therefore Q(x) = q \cdot (l - x)$

切断点回りのモーメントの釣合より、 $M + q \cdot (l - x) \cdot \frac{l - x}{2} = 0 \quad \therefore M(x) = -\frac{q}{2}(l - x)^2$

よって、せん断力  $Q(x)$ 、曲げモーメント  $M(x)$  の式は、次のようになる。

$$Q(x) = q \cdot (l - x), \quad M(x) = -\frac{q}{2}(l - x)^2$$

次に、断面力図、即ち、せん断力図 ( $Q$ -図)、曲げモーメント図 ( $M$ -図) を図示すると、下図のようになる。



(3) はりの変形の基本式  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$  を変形すると、 $EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M$  となり、これに(2)の曲げモーメント  $M(x)$  の式を代入すると、 $EI \frac{d^2y}{dx^2} = q \cdot \frac{x^2}{2} - ql \cdot x + \frac{1}{2} q l^2 = \frac{q}{2} (\ell - x)^2$  となる。

《解法 I》

$EIy'' = q \cdot \frac{x^2}{2} - ql \cdot x + \frac{1}{2} q l^2$  を用いて、逐次積分すると、

$$EIy' = q \cdot \frac{x^3}{6} - ql \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{ql^2}{2} x + C_1 \qquad EIy = q \cdot \frac{x^4}{24} - ql \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数  $C_1, C_2$  を求める。

- ①  $x = 0$  で、たわみがゼロ、即ち、 $y = 0$  より、 $C_2 = 0$
- ②  $x = 0$  で、たわみ角がゼロ、即ち、 $y' = 0$  より、 $C_1 = 0$

よって、たわみ角  $\theta(x)$  とたわみの式  $y(x)$  は、次のようになる。

$$EIy' = q \cdot \frac{x^3}{6} - ql \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{ql^2}{2} x \qquad EIy = q \cdot \frac{x^4}{24} - ql \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \begin{cases} \theta(x) = y'(x) = \frac{q}{6EI} x^3 - \frac{q}{2EI} l x^2 + \frac{q}{2EI} l^2 x = \frac{ql^3}{6EI} \left\{ \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right) \right\} \\ y(x) = \frac{q}{24EI} x^4 - \frac{q}{6EI} l x^3 + \frac{q}{4EI} l^2 x^2 = \frac{ql^4}{24EI} \left\{ \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right\} \end{cases}$$

《解法 II》

$EIy'' = \frac{q}{2} (\ell - x)^2$  を用いて、逐次積分すると、

$$EIy' = \frac{q}{2} \cdot \left\{ -\frac{(\ell - x)^3}{3} \right\} + C_1 \qquad EIy = \frac{q}{2} \cdot \left\{ \frac{(\ell - x)^4}{12} \right\} + C_1 x + C_2$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数  $C_1, C_2$  を求める。

- ①  $x = 0$  で、たわみがゼロ、即ち、 $y = 0$  より、 $\frac{q}{2} \cdot \frac{\ell^4}{12} + C_2 = 0 \quad \therefore C_2 = -\frac{q\ell^4}{24}$

②  $x=0$  で、たわみ角がゼロ、即ち、 $y'=0$  より、 $-\frac{q}{2} \cdot \frac{\ell^3}{3} + C_1 = 0 \quad \therefore C_1 = \frac{q\ell^3}{6}$

よって、たわみ角  $\theta(x)$  とたわみの式  $y(x)$  は、次のようになる。

$$EIy' = -\frac{q(\ell-x)^3}{6} + \frac{q\ell^3}{6} = \frac{q}{6} \cdot \left\{ \ell^3 - (\ell-x)^3 \right\} = \frac{q\ell^3}{6} \cdot \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right)^3 \right\}$$

$$EIy = \frac{q}{2} \cdot \left\{ \frac{(\ell-x)^4}{12} \right\} + \frac{q\ell^3}{6} x - \frac{q\ell^4}{24} = \frac{q\ell^4}{24} \cdot \left\{ \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right)^4 + 4 \left( \frac{x}{\ell} \right) - 1 \right\}$$

$$\therefore \begin{cases} \theta(x) = y'(x) = \frac{q\ell^3}{6EI} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right)^3 \right\} \\ y(x) = \frac{q\ell^4}{24EI} \left\{ \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right)^4 + 4 \left( \frac{x}{\ell} \right) - 1 \right\} \end{cases}$$

(4) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式  $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q$  を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy''' = qx + C_1$$

$$EIy'' = \frac{q}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

$$EIy' = \frac{q}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を求める。

①  $x=0$  で、たわみ角がゼロ、即ち、 $y'=0$  より、 $C_3 = 0$

②  $x=0$  で、たわみがゼロ、即ち、 $y=0$  より、 $C_4 = 0$

③  $x=l$  で、せん断力がゼロ、即ち、 $y'''=0$  より、 $ql + C_1 = 0 \quad \therefore C_1 = -ql$

④  $x=l$  で、曲げモーメントがゼロ、即ち、 $y''=0$  より、 $\frac{q}{2}\ell^2 - ql^2 + C_2 = 0 \quad \therefore C_2 = \frac{q}{2}\ell^2$

よって、たわみ角  $\theta(x)$  とたわみの式  $y(x)$  は、次のようになる。

$$EIy''' = qx - ql$$

$$EIy'' = \frac{q}{2}x^2 - qlx + \frac{q}{2}\ell^2$$

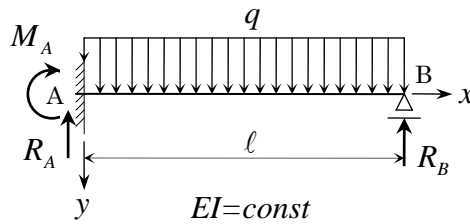
$$EIy' = \frac{q}{6}x^3 - \frac{q}{2}lx^2 + \frac{q}{2}\ell^2x$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 - \frac{q}{6}lx^3 + \frac{q}{4}\ell^2x^2$$

$$\therefore \begin{cases} \theta(x) = y'(x) = \frac{q}{6EI}x^3 - \frac{q}{2EI}lx^2 + \frac{q}{2EI}\ell^2x \\ \quad = \frac{q\ell^3}{6EI} \left\{ \left( \frac{x}{\ell} \right)^3 - 3 \cdot \left( \frac{x}{\ell} \right)^2 + 3 \cdot \left( \frac{x}{\ell} \right) \right\} \\ y(x) = \frac{q}{24EI}x^4 - \frac{q}{6EI}lx^3 + \frac{q}{4EI}\ell^2x^2 \\ \quad = \frac{q\ell^4}{24EI} \left\{ \left( \frac{x}{\ell} \right)^4 - 4 \cdot \left( \frac{x}{\ell} \right)^3 + 6 \cdot \left( \frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \end{cases}$$

【問題 BD4-B-1A】 下図に示す曲げ剛性  $EI$  が一定で、“A 点固定、B 点単純支持のはり” について、次の設問に答えよ。

- (1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式  $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q$  を用いて、たわみ角  $\theta(x)$  とたわみの式  $y(x)$  を求めよ。
- (2) 支点反力  $M_A$ ,  $R_A$ ,  $R_B$  を求めよ。
- (3) せん断力  $Q(x)$ 、曲げモーメント  $M(x)$  の式を求め、次に、断面力図、すなわち、せん断力図 ( $Q$ -図)、曲げモーメント図 ( $M$ -図) を図示せよ。



【解答】

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式  $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q$  を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy''' = qx + C_1$$

$$EIy'' = \frac{q}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

$$EIy' = \frac{q}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  を求める。

(a)  $x = 0$  のとき、 $y' = 0$  より、  $C_3 = 0$

(b)  $x = 0$  のとき、 $y = 0$  より、  $C_4 = 0$

(c)  $x = l$  のとき、 $y'' = 0$  より、  $\frac{q}{2}l^2 + C_1l + C_2 = 0$  .....①

(d)  $x = l$  のとき、 $y = 0$  より、  $\frac{q}{24}l^4 + \frac{C_1}{6}l^3 + \frac{C_2}{2}l^2 = 0$  .....②

①を変形すると、  $C_1l + C_2 = -\frac{q}{2}l^2$  .....①'

②を変形すると、  $C_1l + 3C_2 = -\frac{q}{4}l^2$  .....②'

①'-②'より、  $-2C_2 = -\frac{q}{4}l^2$   $\therefore C_2 = \frac{1}{8}ql^2$

これを①'に代入すると、  $C_1l = -\frac{q}{2}l^2 - \frac{1}{8}ql^2 = -\frac{5}{8}ql^2$   $\therefore C_1 = -\frac{5}{8}ql$

よって、たわみ角  $\theta(x)$  とたわみの式  $y(x)$  は、次のようになる。

$$EIy''' = qx - \frac{5}{8}ql$$

$$EIy'' = \frac{q}{2}x^2 - \frac{5}{8}qlx + \frac{1}{8}ql^2$$

$$EIy' = \frac{q}{6}x^3 - \frac{5}{16}qlx^2 + \frac{1}{8}ql^2x$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 - \frac{5}{48}qlx^3 + \frac{1}{16}ql^2x^2$$

$$\therefore \begin{cases} \theta(x) = y'(x) = \frac{q}{6EI}x^3 - \frac{5}{16EI}qlx^2 + \frac{1}{8EI}ql^2x \\ = \frac{ql^3}{48EI} \left\{ 8 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{x}{l}\right) \right\} \\ y(x) = \frac{q}{24EI}x^4 - \frac{5}{48EI}qlx^3 + \frac{1}{16EI}ql^2x^2 \\ = \frac{ql^4}{48EI} \left\{ 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 5 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right\} \end{cases}$$

(2) 次に、支点反力  $M_A$ ,  $R_A$ ,  $R_B$  を求めると、以下のようなになる。

$$M_A = -EIy'' \text{ より、} \quad M_A = -EIy''|_{x=0} = -\frac{1}{8}ql^2$$

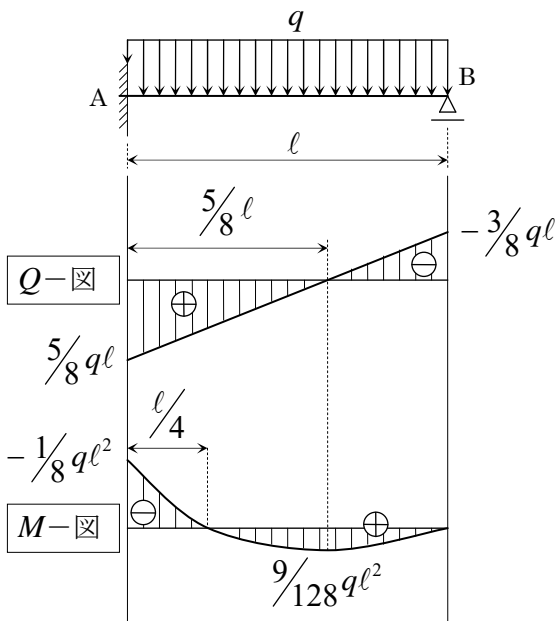
$$Q = -EIy''' \text{ より、} \quad R_A = Q_A = -EIy'''|_{x=0} = \frac{5}{8}ql$$

$$\text{また、} \quad -R_B = Q_B = -EIy'''|_{x=l} = -ql + \frac{5}{8}ql = -\frac{3}{8}ql$$

以上より、

$$\boxed{M_A = -\frac{1}{8}ql^2} \quad \boxed{R_A = \frac{5}{8}ql} \quad \boxed{R_B = \frac{3}{8}ql}$$

(3) さらに、せん断力図 ( $Q$ -図)、曲げモーメント図 ( $M$ -図) を図示すると、下図のようなになる。  
曲げモーメントの最大値を求めると、



$$\begin{aligned} M_{\max} &= -EIy''|_{x=\frac{5}{8}l} \\ &= -\frac{q}{2} \cdot \frac{25}{64}l^2 + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8}l - \frac{1}{8}ql^2 \\ &= \left( -\frac{25}{128} + \frac{25}{64} - \frac{1}{8} \right) \cdot ql^2 \\ &= \frac{-25 + 50 - 16}{128} ql^2 \\ &= \frac{9}{128} ql^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M = -EIy'' &= -\frac{q}{2}x^2 + \frac{5}{8}qlx - \frac{1}{8}ql^2 = 0 \text{ を解くと、} \\ -4x^2 + 5lx - l^2 &= 0 \\ \therefore 4x^2 - 5lx + l^2 &= 0 \\ \therefore (4x - l)(x - l) &= 0 \\ \therefore x = \frac{l}{4}, \quad x = l \end{aligned}$$