# 構造力学演習Ⅱ（2017-№.２）

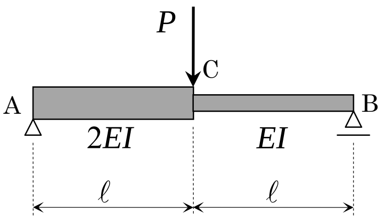
2017/09/12

【問題 EL-HSB-2】下図に示すような“変断面単純ばり”の $C$ 点に集中荷重 $P$ が作用するとき、以下の設問に答えよ。ただし、$A$～$C$ 間の曲げ剛性は $2EI$，$C$～$B$ 間の曲げ剛性は $EI$ とする。

⑴ $A$ 点のたわみ角 $\theta_A$ と $B$ 点のたわみ角 $\theta_B$ を求めよ。

⑵ $C$ 点のたわみ角 $\theta_C$ とたわみ $y_C$ を求めよ。

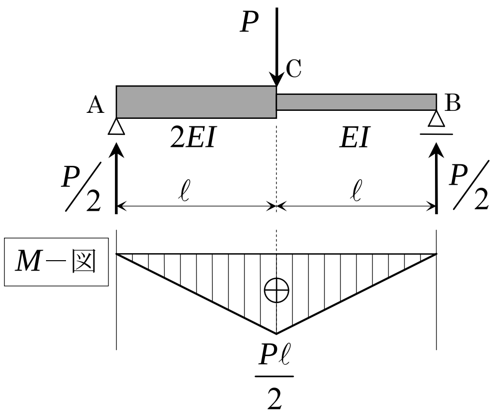
⑶ 最大のたわみ $y_{\max}$ とその発生位置 $X$ （$B$ 点からの距離）を求めよ。

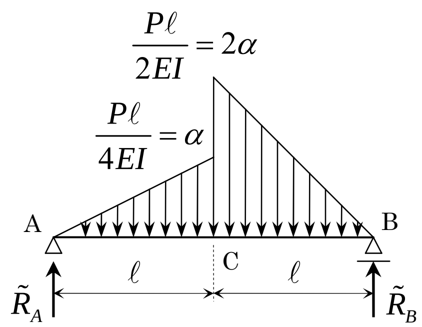



【解答】

まず、曲げモーメント図（$M$－図）を描くと、右上図のようになる。

次に、境界条件を考慮して、〝共役ばり〟を作成し、これに〝弾性荷重〟を作用させると、右下図のようになる。




⑴ 右下図について、$\alpha = \dfrac{P\ell}{4EI}$ とおいて、支点反力 $\tilde{R}_A$，$\tilde{R}_B$ を求めると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合から、

$$\tilde{R}_A + \tilde{R}_B = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\ell + \frac{1}{2}\cdot 2\alpha\cdot\ell = \left(\frac{1}{2}+1\right)\alpha\ell = \frac{3}{2}\alpha\ell$$

$B$ 点回りのモーメントの釣合から、

$$\tilde{R}_A\cdot 2\ell = \frac{1}{2}\alpha\ell\cdot\left(\ell+\frac{\ell}{3}\right) + \alpha\ell\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{1}{2}\alpha\ell\cdot\frac{4}{3}\ell + \frac{2}{3}\alpha\ell^2$$

$$= \frac{2}{3}\alpha\ell^2 + \frac{2}{3}\alpha\ell^2 = \frac{4}{3}\alpha\ell^2$$

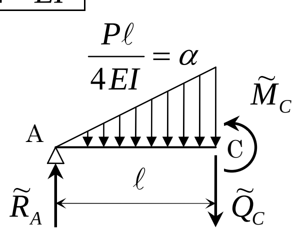
$$\therefore \tilde{R}_A = \frac{2}{3}\alpha\ell$$

また、$\tilde{R}_B = \left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}\right)\alpha\ell = \dfrac{9-4}{6}\alpha\ell = \dfrac{5}{6}\alpha\ell$

したがって、$A$ 点のたわみ角 $\theta_A$ と $B$ 点のたわみ角 $\theta_B$ は、次のようになる。

$$\boxed{\theta_A = \tilde{Q}_A = \tilde{R}_A = \frac{2}{3}\cdot\frac{P\ell^2}{4EI} = \frac{1}{6}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}} \qquad \boxed{\theta_B = \tilde{Q}_B = -\tilde{R}_B = -\frac{5}{6}\cdot\frac{P\ell^2}{4EI} = -\frac{5}{24}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}}$$

⑵ $C$ 点のたわみ角 $\theta_C$ とたわみ $y_C$ は、右図について解いて、



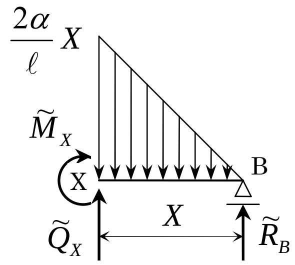

$$\tilde{Q}_C + \frac{1}{2}\alpha\ell = \tilde{R}_A \qquad \therefore \tilde{Q}_C = \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\alpha\ell = \frac{1}{6}\alpha\ell$$

$$\tilde{M}_C + \frac{1}{2}\alpha\ell\cdot\frac{\ell}{3} = \tilde{R}_A\cdot\ell \qquad \therefore \tilde{M}_C = \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)\alpha\ell^2 = \frac{1}{2}\alpha\ell^2$$

したがって、$C$ 点のたわみ角 $\theta_C$ とたわみ $y_C$ は、次のようになる。

$$\boxed{\theta_C = \tilde{Q}_C = \frac{1}{6}\cdot\frac{P\ell^2}{4EI} = \frac{1}{24}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}} \qquad \boxed{y_C = \tilde{M}_C = \frac{1}{2}\cdot\frac{P\ell^3}{4EI} = \frac{1}{8}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

(3) 最大のたわみ $y_{\max}$ とその発生位置 $X$ （$B$ 点からの距離）については、右図で考える。最大のたわみ $y_{\max}$ が発生するのは、せん断力 $\widetilde{Q}_X = 0$ となるときであるから、最大のたわみの発生位置 $X$ は、次のようになる。




$$\widetilde{Q}_X + \widetilde{R}_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\alpha}{\ell}X\cdot X \qquad \therefore \widetilde{Q}_X + \frac{5}{6}\alpha\ell = \frac{\alpha}{\ell}X^2$$

ここで、$\widetilde{Q}_X = 0$ であるから、$\dfrac{\alpha}{\ell}X^2 = \dfrac{5}{6}\alpha\ell$

$$\therefore X^2 = \frac{\ell}{\alpha}\cdot\frac{5}{6}\alpha\ell = \frac{5}{6}\ell^2$$ すなわち、$X > 0$ より、$X = \dfrac{\sqrt{30}}{6}\ell$

このとき、たわみ、すなわち、曲げモーメントは、次のようになる。

$$\widetilde{M}_X + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\alpha}{\ell}\cdot\frac{\sqrt{30}}{6}\ell\cdot\frac{\sqrt{30}}{6}\ell\cdot\frac{X}{3} = \widetilde{R}_B X \qquad \therefore \widetilde{M}_X + \frac{5}{6}\alpha\ell\cdot\frac{X}{3} = \frac{5}{6}\alpha\ell\cdot X$$

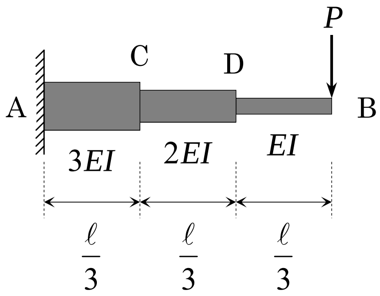
$$\therefore \widetilde{M}_X = \frac{5}{6}\alpha\ell\cdot\frac{2}{3}X = \frac{5}{6}\alpha\ell\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{30}}{6}\ell = \frac{5\sqrt{30}}{54}\alpha\ell^2$$

よって、最大のたわみ $y_{\max}$ は、$y_{\max} = \widetilde{M}_X = \dfrac{5\sqrt{30}}{54}\alpha\ell^2 = \dfrac{5\sqrt{30}}{54}\cdot\dfrac{P\ell^3}{4EI} = \dfrac{5\sqrt{30}}{216}\cdot\dfrac{P\ell^3}{EI}$

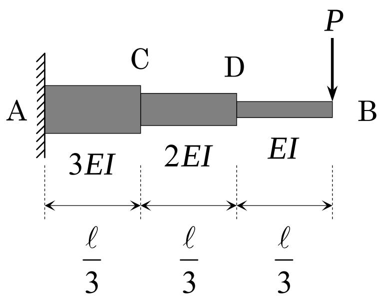
したがって、最大のたわみ $y_{\max}$ とその発生位置 $X$ （$B$ 点からの距離）は、次のようになる。

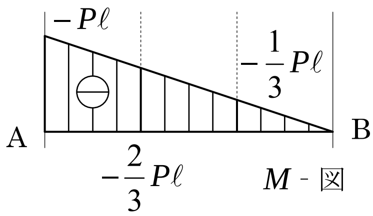
$X = \dfrac{\sqrt{30}}{6}\ell$ のとき、$\boxed{y_{\max} = \dfrac{5\sqrt{30}}{54}\alpha\ell^2 = \dfrac{5\sqrt{30}}{216}\cdot\dfrac{P\ell^3}{EI}}$

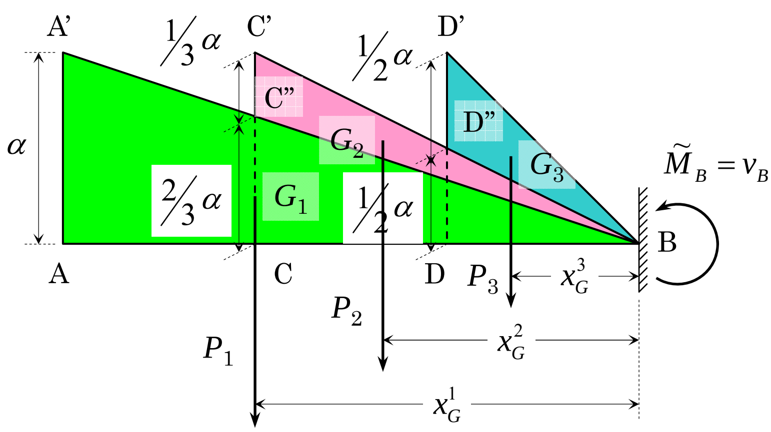
【問題 EL-HCL-2】〝弾性荷重法〟により、下図に示すような“変断面片持ばり $AB$”の自由端 $B$ のたわみ $v_B$ を求めよ。なお、“変断面片持ばり $AB$”の曲げ剛性は、$A$〜$C$ 間，$C$〜$D$ 間，$D$〜$B$ 間でそれぞれ $3EI$，$2EI$ ，$EI$ である。




【解答】
まず、変断面片持ばりの曲げモーメント図は、下左図のようになる。
次に、〝モールの定理〟より、〝共役ばり〟に〝弾性荷重〟を載荷したものは下右図のようになり、これについて支点曲げモーメント $\widetilde{M}_B = v_B$ を求めればよいことになる。なお、ここに $-\dfrac{P\ell}{3EI} = \alpha$ とする。




ここで、

$$P_1 = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad\qquad x_G^1 = \frac{2}{3}\ell$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{1}{9}\alpha\ell \qquad\qquad x_G^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{4}{9}\ell$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\ell}{3} = \frac{1}{12}\alpha\ell \qquad\qquad x_G^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\ell = \frac{2}{9}\ell$$

であるから、モーメントの釣合から、次のようになる。

$$\widetilde{M}_B + P_1\cdot x_G^1 + P_2\cdot x_G^2 + P_3\cdot x_G^2 = 0$$

$$\therefore -\widetilde{M}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell\cdot\frac{2}{3}\ell + \frac{1}{9}\alpha\ell\cdot\frac{4}{9}\ell + \frac{1}{12}\alpha\ell\cdot\frac{2}{9}\ell = \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{81}+\frac{1}{54}\right)\cdot\alpha\ell^2 = \frac{54+8+3}{162}\alpha\ell^2 = \frac{65}{162}\alpha\ell^2$$

$$\therefore v_B = \widetilde{M}_B = -\frac{65}{162}\alpha\ell = -\frac{65}{162}\cdot\left(-\frac{P\ell}{3EI}\right)\cdot\ell^2 = \frac{65}{486}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

よって、$\boxed{v_B = \dfrac{65}{486}\cdot\dfrac{P\ell^3}{EI}}$