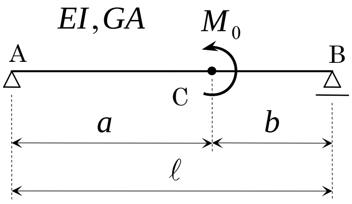
構造力学演習Ⅱ（2017-№８）

2017/11/07

【問題 SE-B-2】下図に示す集中モーメント M_0 が作用する単純ばりのひずみエネルギー U を求めよ。
　ただし、はりの曲げ剛性は EI，せん断弾性係数は G，断面積は A とする。



【解答】

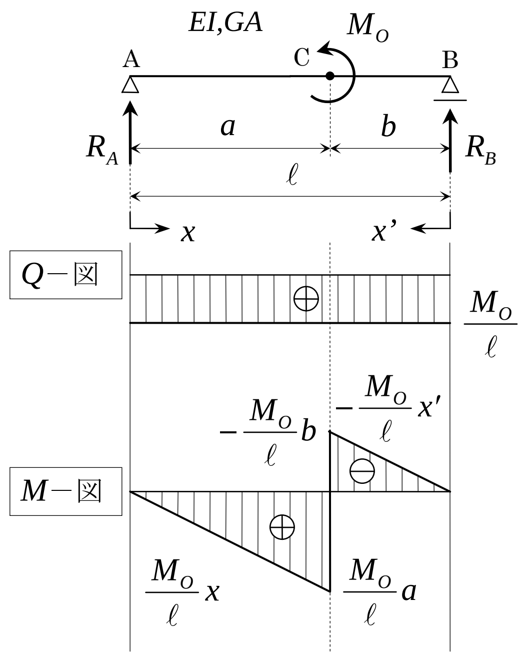
支点反力を R_A，R_B とすると、

$$R_A + R_B = 0$$

$$R_A \cdot \ell = M_O$$

$$\therefore R_A = \frac{M_O}{\ell} \quad R_B = -\frac{M_O}{\ell}$$

これより、断面力図は、右図のようになる。



したがって、ひずみエネルギー U は、次のようになる。

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{M^2}{EI} + \kappa\frac{Q^2}{GA}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{a}\left(\frac{1}{EI}\cdot\frac{M_O^2}{\ell^2}x^2 + \frac{\kappa}{GA}\cdot\frac{M_O^2}{\ell^2}\right)dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{b}\left(\frac{1}{EI}\cdot\frac{M_O^2}{\ell^2}x'^2 + \frac{\kappa}{GA}\cdot\frac{M_O^2}{\ell^2}\right)dx'$$

$$U = \frac{M_O{}^2}{2EI\ell^2}\int_0^a x^2dx + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell^2}a$$

$$+ \frac{M_O{}^2}{2EI\ell^2}\int_0^b x'^2dx' + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell^2}b$$

$$= \frac{M_O{}^2}{2EI\ell^2}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}\right) + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell^2}(a+b) = \frac{M_O{}^2\left(a^3+b^3\right)}{6EI\ell^2} + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell}$$

$$= \frac{M_O{}^2}{6EI\ell^2}(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell^2}(a+b)$$

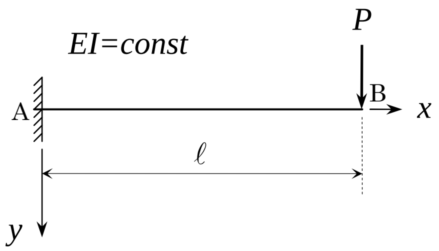
$$= \frac{M_O{}^2}{6EI\ell}\left(a^2-ab+b^2\right) + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell}$$

$$= \frac{M_O{}^2}{6EI\ell}\left\{(a+b)^2 - 3ab\right\} + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell}$$

$$= \frac{M_O{}^2\ell}{6EI} - \frac{M_O{}^2}{2EI}\cdot\frac{ab}{\ell} + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell}$$

$$\therefore \boxed{U = \frac{M_O^2}{6EI\ell}\left(a^2-ab+b^2\right) + \frac{\kappa M_O^2}{2GA\ell} = \frac{M_O^2\ell}{6EI} - \frac{M_O^2}{2EI}\cdot\frac{ab}{\ell} + \frac{\kappa M_O^2}{2GA\ell}}$$

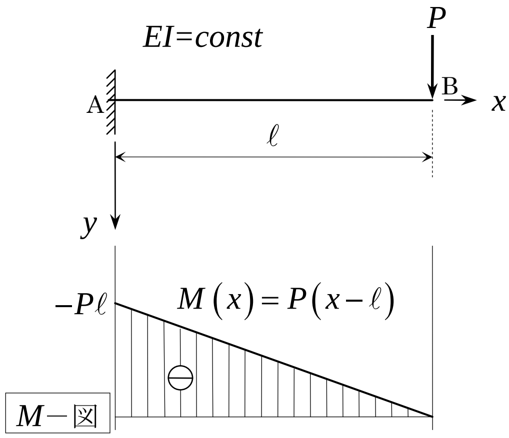
【問題】下図に示す片持ばりの先端 B 点に集中荷重 P が作用するとき、片持ばりのひずみエネルギー U を求め、さらに、$\dfrac{\partial U}{\partial P}$ を求めよ。ただし、はりの曲げ剛性は、EI で一定であり、せん断力は、無視するものとする。



【解答】

問題の片持ばりの曲げモーメント図を図示すると、右図のようになる。

したがって、片持ばりのひずみエネルギー U は、次のようになる。



$$U=\frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{M^2}{EI}dx=\frac{1}{2EI}\int_0^\ell P^2\left(x-\ell\right)^2 dx$$

$$=\frac{P^2}{2EI}\int_0^\ell \left(x-\ell\right)^2 dx=\frac{P^2}{2EI}\left[\frac{\left(x-\ell\right)^3}{3}\right]_0^\ell$$

$$=\frac{P^2}{2EI}\left\{-\left(-\frac{\ell^3}{3}\right)\right\}=\frac{P^2\ell^3}{6EI}$$

また、$\dfrac{\partial U}{\partial P}=\dfrac{\partial}{\partial P}\left(\dfrac{P^2\ell^3}{6EI}\right)=\dfrac{P\ell^3}{3EI}$ となり、B 点のたわみとなる。（カステリアーノの第２定理）