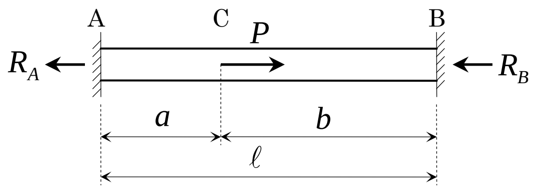
【問題 CA1-1】下図のような長さℓ，ヤング係数Eの真直な棒の両端A, Bを固定し、点Cに軸方向外力Pを作用させるとき、固定端に生じる反力R_A，R_Bを次の２通りの方法で求めよ。ただし、棒の断面積Aは一定とする。

①部分AC, BCの伸びをそれぞれΔ_1，Δ_2として、
力の釣合条件，フックの法則，変位の適合条件（$\Delta_1+\Delta_2=0$）
から求める方法。

②点Cの右向きの変位をΔとし、棒に蓄えられるひずみエネルギーUと〝カステリアーノの第１定理〟より求める方法。



【解答①】

力の釣合条件より、　$R_A+R_B-P=0$　…………①

また、部分AC, BCの軸方向力をそれぞれN_1，N_2とすると、

$N_1=R_A$　…………②

$N_2=-R_B$　…………③

次に、部分AC, BCの伸びをそれぞれΔ_1，Δ_2とすると、フックの法則と②，③式より、

$$N_1=EA\frac{\Delta_1}{a}\qquad \therefore \Delta_1=\frac{N_1}{EA}a=\frac{R_A}{EA}a\qquad \cdots\cdots\cdots\text{④}$$

$$N_2=EA\frac{\Delta_2}{b}\qquad \therefore \Delta_2=\frac{N_2}{EA}b=-\frac{R_B}{EA}b\qquad \cdots\cdots\cdots\text{⑤}$$

さらに、変位の適合条件を考えると、両端は固定されて棒の長さは不変だから、

$\Delta_1+\Delta_2=0$　…………⑥

よって、⑥式に④，⑤式を代入して、

$$\Delta_1+\Delta_2=\frac{1}{EA}\left(R_A\cdot a-R_B\cdot b\right)=0\qquad \therefore R_A\cdot a-R_B\cdot b=0\qquad \therefore R_B=\frac{a}{b}R_A$$

これを①式に代入すると、

$$R_A+\frac{a}{b}R_A-P=\frac{a+b}{b}R_A-P=\frac{\ell}{b}R_A-P=0\qquad \therefore \boxed{R_A=\frac{b}{\ell}P,\quad R_B=\frac{a}{\ell}P}$$

【解答②】

点Cの右向きの変位をΔとすれば、棒に蓄えられるひずみエネルギーUは、

$$U=\frac{1}{2}\int_0^\ell\frac{N^2}{EA}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{N^2}{EA}\ell=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell}{EA}\cdot\left(EA\frac{\Delta}{\ell}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{EA}{\ell}\Delta^2$$

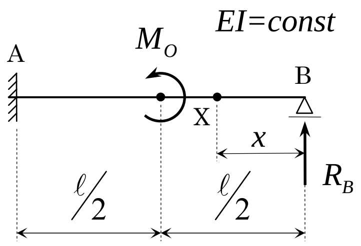
と表されるから、

$$U=\frac{1}{2}\cdot\frac{EA}{a}\Delta^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{EA}{b}\Delta^2=\frac{(a+b)EA}{2ab}\Delta^2=\frac{EA\ell}{2ab}\Delta^2$$

〝カステリアーノの第１定理〟より、$\dfrac{\partial U}{\partial\Delta}=P$ すなわち、$\dfrac{\partial U}{\partial\Delta}=\dfrac{EA\ell}{ab}\Delta=P$　　$\therefore \Delta=\dfrac{ab}{EA\ell}P$

したがって、$\boxed{R_A=EA\dfrac{\Delta}{a}=\dfrac{b}{\ell}P,\quad R_B=EA\dfrac{\Delta}{b}=\dfrac{a}{\ell}P}$

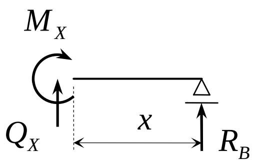
【問題 LW-B-3】下図に示すような曲げ剛性 EI が一定で、集中モーメント M_O が作用する１次不静定ばりの B 点の支点反力 R_B を〝**最小仕事の原理**〟を用いて求めよ。なお、せん断力の影響は無視する。



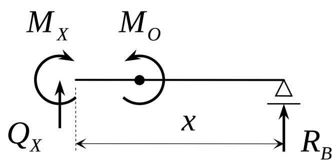
【解答】

不静定力を R_B とすると、点 X(支点 B の左側で距離 x の点) の曲げモーメント M_X は、次のようになる。

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\ell}{2}$ のとき、　　　　$\dfrac{\ell}{2} < x \leqq \ell$ のとき、



$$M_X = R_B x$$



$$M_X = R_B x + M_O$$

このとき、はりに蓄えられるひずみエネルギー U は、次のようになる。

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \frac{M_X^2}{EI}dx = \frac{1}{2EI}\left\{ \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(R_B x\right)^2 dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \left(R_B x + M_O\right)^2 dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2EI}\left\{ R_B^2 \int_0^{\frac{\ell}{2}} x^2 dx + R_B^2 \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} x^2 dx + 2R_B M_O \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} x dx + M_O^2 \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2EI}\left\{ R_B^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} + 2R_B M_O \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} + M_O^2 \left[x\right]_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \right\} = \frac{1}{2EI}\left\{ \frac{1}{3}R_B^2 \ell^3 + R_B M_O \left(\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}\right) + \frac{\ell}{2}M_O^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2EI}\left\{ \frac{\ell^3}{3}R_B^2 + \frac{3}{4}\ell^2 M_O R_B + \frac{\ell}{2}M_O^2 \right\}$$

ここで、U を R_B で偏微分して、〝最小仕事の原理〟$\dfrac{\partial U}{\partial R_B} = 0$ より R_B を求めると、次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{1}{2EI}\left\{ \frac{2}{3}\ell^3 R_B + \frac{3}{4}\ell^2 M_O \right\} = 0 \qquad \therefore \frac{2}{3}\ell^3 R_B + \frac{3}{4}\ell^2 M_O = 0$$

$$\therefore R_B = -\frac{3}{4}\ell^2 M_O \cdot \frac{3}{2\ell^3} = -\frac{9}{8}\cdot\frac{M_O}{\ell} \qquad \text{すなわち、} \boxed{R_B = -\frac{9}{8}\cdot\frac{M_O}{\ell}}$$

《別解》

はりに蓄えられるひずみエネルギー U を計算する際に、R_B での偏微分を先に行うと、次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{1}{2EI}\left\{ 2R_B \int_0^{\frac{\ell}{2}} x^2 dx + 2\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} x\left(R_B x + M_O\right) dx \right\} = \frac{1}{EI}\left\{ R_B \int_0^{\frac{\ell}{2}} x^2 dx + R_B \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} x^2 dx + M_O \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} x dx \right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{ R_B \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} + M_O \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \right\} = \frac{1}{EI}\left\{ R_B \cdot \frac{\ell^3}{3} + M_O \left(\frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell^2}{8}\right) \right\} = \frac{1}{EI}\left\{ \frac{\ell^3}{3}R_B + \frac{3}{8}\ell^2 M_O \right\} = 0$$

$$\therefore \boxed{R_B = -\frac{3}{8}\ell^2 M_O \cdot \frac{3}{\ell^3} = -\frac{9}{8}\cdot\frac{M_O}{\ell}}$$