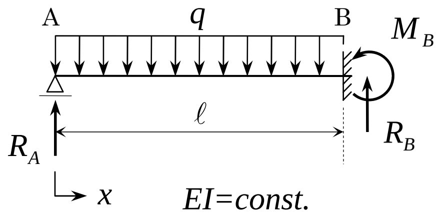
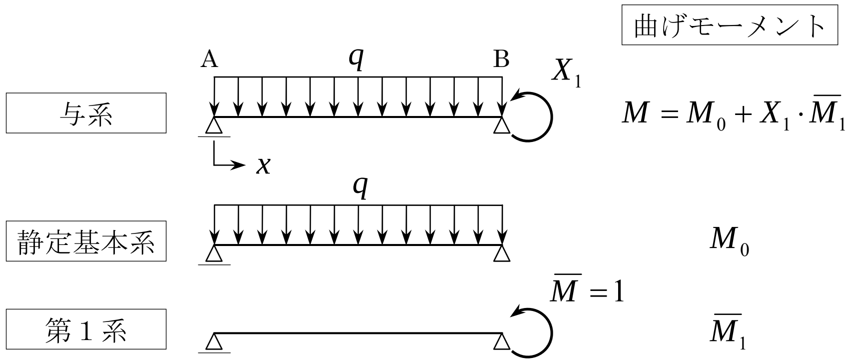
【問題 SM-2】〝応力法（余力法）〟を用いて、下図に示すような１次不静定片持ばりの B 点の支点曲げモーメント M_B を求めよ。ただし、曲げ剛性 EI は一定とし、せん断力の影響は無視する。

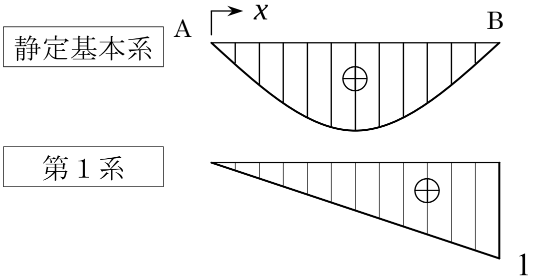


【解答】

支点曲げモーメント M_B を〝不静定力〟とし、その与系・静定基本系・第１系を下図のように考える。



静定基本系と第１系の曲げモーメント図を図示する下図のようになる。



$$M_0 = \frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

$$\overline{M}_1 = \frac{x}{\ell}$$

与系と第１系に対して〝単位荷重法〟を適用して，B 点のたわみ角 θ_B を求めると，次のようになる。

$$1\times\theta_B = \int_0^\ell \frac{M\overline{M}_1}{EI}dx = \int_0^\ell \frac{(M_0 + X_1\cdot\overline{M}_1)\cdot\overline{M}_1}{EI}dx = \int_0^\ell \frac{M_0\cdot\overline{M}_1}{EI}dx + X_1\cdot\int_0^\ell \frac{\overline{M}_1^{\,2}}{EI}dx$$

ところが，B 点は固定端であるから，たわみ角 $\theta_B = 0$ となるので，B 点の支点曲げモーメント M_B，即ち，X_1 は次式から求まる。

$$M_B = X_1 = \frac{-\displaystyle\int_0^\ell \frac{M_0\cdot\overline{M}_1}{EI}dx}{\displaystyle\int_0^\ell \frac{\overline{M}_1^{\,2}}{EI}dx}$$

この式の（分子），（分母）を計算すると，以下のようになる。

$$\int_0^\ell \frac{M_0\cdot\overline{M}_1}{EI}dx = \frac{1}{EI}\int_0^\ell \left(\frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2\right)\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)dx = \frac{q}{2EI}\int_0^\ell \left(x^2 - \frac{x^3}{\ell}\right)dx = \frac{q}{2EI}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4\ell}\right]_0^\ell$$

$$= \frac{q\ell^3}{2EI}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{q\ell^3}{24EI}$$

$$\int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell} \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 dx = \frac{1}{EI\ell^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\ell} = \frac{1}{EI\ell^2} \cdot \frac{\ell^3}{3} = \frac{\ell}{3EI}$$

$$\therefore X_1 = \frac{-\int_0^{\ell} \frac{M_0 \cdot \overline{M}_1}{EI} dx}{\int_0^{\ell} \frac{\overline{M}_1^2}{EI} dx} = \frac{-\frac{q\ell^3}{24EI}}{\frac{\ell}{3EI}} = -\frac{1}{8} q\ell^2 \qquad \therefore \boxed{M_B = -\frac{1}{8} q\ell^2}$$

［補足］

問題の 1 次不静定片持ばりの支点反力は，結局次のようになる。

鉛直方向の力の釣合から，　$R_A + R_B = q\ell$ ………(1)

B 点回りのモーメントの釣合から，　$M_B + q\ell \cdot \frac{\ell}{2} = R_A \cdot \ell$ ………(2)

上記の(2)式に対して，$M_B = -\frac{1}{8} q\ell^2$ を代入すると，

$$R_A \cdot \ell = -\frac{1}{8} q\ell^2 + \frac{1}{2} q\ell^2 = \frac{3}{8} q\ell^2 \qquad \therefore \boxed{R_A = \frac{3}{8} q\ell}$$

また，$\boxed{R_B = \frac{5}{8} q\ell}$

【問題 SM-5】下図に示す曲げ剛性が EI で一定の不静定ばりについて、次の設問に答えよ。

(1) 支点反力 R_B を不静定力と考えて、添付した **〝変形の公式〟** を用いて、これを求めよ。

(2) 支点反力 R_A， R_C を求めよ。

(3) 断面力図（せん断力図，曲げモーメント図）を図示せよ。

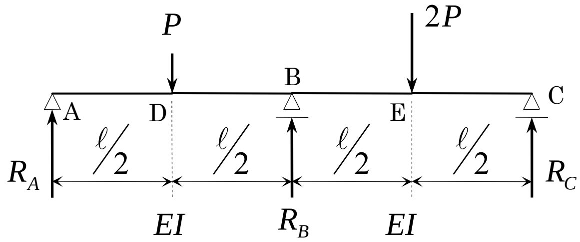
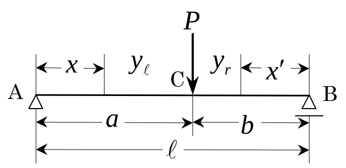
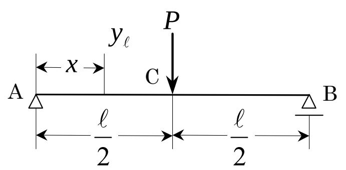


表-8.1(a)　各種はりのたわみおよびたわみ角

	荷重状態	たわみ曲線	特定点のたわみ
単純ばり①		$y_\ell = \dfrac{Pa^2b^2}{6EI\ell}\left(2\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}-\dfrac{x^3}{a^2b}\right)$ $y_r = \dfrac{Pa^2b^2}{6EI\ell}\left(2\dfrac{x'}{b}+\dfrac{x'}{a}-\dfrac{x'^3}{ab^2}\right)$	$y_C = \dfrac{Pa^2b^2}{3EI\ell}$
単純ばり②		$y_\ell = \dfrac{P\ell^3}{16EI}\left(\dfrac{x}{\ell}-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{x^3}{\ell^3}\right)$　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\ell}{2}$	$y_{\max} = y_C = \dfrac{P\ell^3}{48EI}$

【解答】

(1) 問題の不静定ばりにおいて、支点 B を外したものを静定基本系と考え、まず、**〝変形の公式〟** を利用して、B 点の変位 v_B を求めると、次のようになる。

$$v_B = \frac{P\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\ell\right)^2}{6EI(2\ell)}\left(2\frac{\ell}{\frac{3}{2}\ell}+\frac{\ell}{\frac{\ell}{2}}-\frac{\ell^3}{\left(\frac{\ell}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\ell\right)^2}\right)+\frac{2P\left(\frac{3}{2}\ell\right)^2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{6EI(2\ell)}\left(2\frac{\ell}{\frac{3}{2}\ell}+\frac{\ell}{\frac{\ell}{2}}-\frac{\ell^3}{\left(\frac{\ell}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\ell\right)^2}\right)$$

$$=\frac{P\ell^3}{6EI}\cdot\frac{3^2}{2^5}\left(\frac{4}{3}+2-\frac{8}{9}\right)+\frac{2P\ell^3}{6EI}\cdot\frac{3^2}{2^5}\left(\frac{4}{3}+2-\frac{8}{9}\right)=\frac{P\ell^3}{6EI}\cdot\frac{9}{32}\cdot\frac{12+18-8}{9}+\frac{2P\ell^3}{6EI}\cdot\frac{9}{32}\cdot\frac{12+18-8}{9}$$

$$=\frac{P\ell^3}{6EI}\cdot\frac{22}{32}+\frac{2P\ell^3}{6EI}\cdot\frac{22}{32}=\frac{P\ell^3}{6EI}\cdot\frac{11}{16}+\frac{2P\ell^3}{6EI}\cdot\frac{11}{16}=\frac{P\ell^3}{6EI}\cdot\left(\frac{11}{16}+\frac{22}{16}\right)=\frac{P\ell^3}{6EI}\cdot\frac{33}{16}$$

次に、静定基本系の B 点に外力 X を作用させたとき、上記の B 点の変位 v_B と等しくなるような外力 X の大きさを求めれば、B 点の支点反力 R_B が得られる。

そこで、 **〝変形の公式〟** を利用して、B 点の変位 v'_B を求めると、次のようになる。

$$v'_B = \frac{X(2\ell)^3}{48EI}=\frac{8X\ell^3}{48EI}=\frac{X\ell^3}{6EI}$$

$v_B = v'_B$ であるから、 $\dfrac{P\ell^3}{6EI}\cdot\dfrac{33}{16}=\dfrac{X\ell^3}{6EI}$　　$\therefore X=\dfrac{6EI}{\ell^3}\cdot\dfrac{P\ell^3}{6EI}\cdot\dfrac{33}{16}=\dfrac{33}{16}P=R_B$

よって、$\boxed{R_B=\dfrac{33}{16}P}$

(2) 支点反力 R_A， R_C を求めると、次のようになる。

$$R_A = \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}(2P) - \frac{1}{2}R_B = \frac{5}{4}P - \frac{33}{32}P = \frac{40-33}{32}P = \frac{7}{32}P \qquad \therefore R_A = \frac{7}{32}P$$

$$R_C = \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}(2P) - \frac{1}{2}R_B = \frac{7}{4}P - \frac{33}{32}P = \frac{56-33}{32}P = \frac{23}{32}P \qquad \therefore R_C = \frac{23}{32}P$$

以上まとめると、支点反力は、$\boxed{R_A = \frac{7}{32}P}$, $\boxed{R_B = \frac{33}{16}P}$, $\boxed{R_C = \frac{23}{32}P}$ となる。

(3) 断面力図（せん断力図，曲げモーメント図）を図示すると、以下のようになる。