構造力学演習Ⅱ（2018-№.１）

2018/09/04

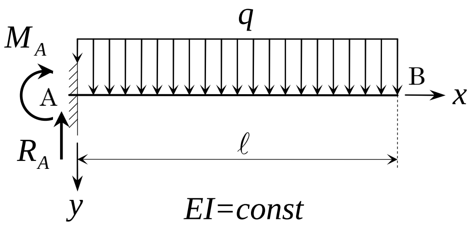
【問題 BD4-CL-1】下図に示す曲げ剛性 EI が一定で、A 点固定の“片持ばり”について、次の設問に答えよ。

(1) 支点反力 M_A， R_A を求めよ。

(2) せん断力 $Q(x)$、曲げモーメント $M(x)$ の式を求め、次に、断面力図、すなわち、せん断力図（Q−図）、曲げモーメント図（M−図）を図示せよ。

(3) はりの変形の基本式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$ を用いて、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ を求めよ。

(4) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を用いて、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ を求めよ。

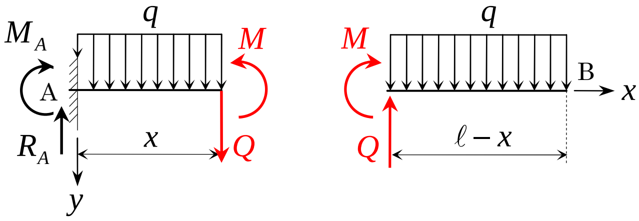


【解答】

(1) 鉛直方向の力の釣合より、$\boxed{R_A=q\ell}$

A 点回りのモーメントの釣合より、$M_A+q\ell\times\dfrac{\ell}{2}=0$ $\quad\therefore\boxed{M_A=-\dfrac{1}{2}q\ell^2}$

(2) A 点から距離 x の点ではりを切断すると、下図のようになる。



左自由体について、釣合を考えると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合より、$Q+q\cdot x=R_A$ $\quad\therefore Q(x)=q\cdot\ell-q\cdot x=q\cdot(\ell-x)$

切断点回りのモーメントの釣合より、

$$M+q\cdot x\cdot\frac{x}{2}=M_A+R_A\cdot x\ \therefore M(x)=-q\cdot\frac{x^2}{2}+q\ell\cdot x-\frac{1}{2}q\ell^2=-\frac{q}{2}(\ell-x)^2$$

右自由体について、釣合を考えると、次のようになる。

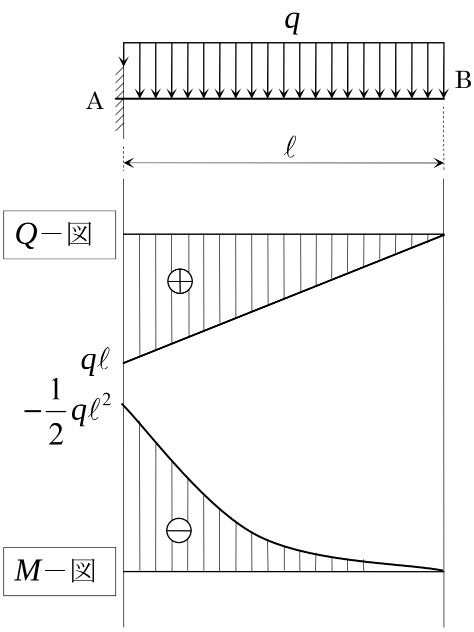
鉛直方向の力の釣合より、$Q=q\cdot(\ell-x)$ $\quad\therefore Q(x)=q\cdot(\ell-x)$

切断点回りのモーメントの釣合より、$M+q\cdot(\ell-x)\cdot\dfrac{\ell-x}{2}=0$ $\quad\therefore M(x)=-\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2$

よって、せん断力 $Q(x)$、曲げモーメント $M(x)$ の式は、次のようになる。

$\boxed{Q(x)=q\cdot(\ell-x)}$, $\boxed{M(x)=-\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2}$

次に、断面力図、即ち、せん断力図（Q−図）、曲げモーメント図（M−図）を図示すると、下図のようになる。



(3) はりの変形の基本式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$ を変形すると、$EI\dfrac{d^2y}{dx^2}=-M$ となり、これに(2)の曲げモーメント $M(x)$ の式を代入すると、$EI\dfrac{d^2y}{dx^2}=q\cdot\dfrac{x^2}{2}-q\ell\cdot x+\dfrac{1}{2}q\ell^2=\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2$ となる。

《解法Ⅰ》

$EIy''=q\cdot\dfrac{x^2}{2}-q\ell\cdot x+\dfrac{1}{2}q\ell^2$ を用いて、逐次積分すると、

$$EIy'=q\cdot\frac{x^3}{6}-q\ell\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{q\ell^2}{2}x+C_1 \qquad EIy=q\cdot\frac{x^4}{24}-q\ell\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{q\ell^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1, C_2 を求める。

①$x=0$ で、たわみがゼロ、即ち、$y=0$ より、　$C_2=0$

②$x=0$ で、たわみ角がゼロ、即ち、$y'=0$ より、　$C_1=0$

よって、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ は、次のようになる。

$$EIy'=q\cdot\frac{x^3}{6}-q\ell\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{q\ell^2}{2}x \qquad EIy=q\cdot\frac{x^4}{24}-q\ell\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{q\ell^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$\boxed{\therefore\begin{cases}\theta(x)=y'(x)=\dfrac{q}{6EI}x^3-\dfrac{q}{2EI}\ell x^2+\dfrac{q}{2EI}\ell^2x=\dfrac{q\ell^3}{6EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3-3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2+3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right\}\\[2ex] y(x)=\dfrac{q}{24EI}x^4-\dfrac{q}{6EI}\ell x^3+\dfrac{q}{4EI}\ell^2x^2=\dfrac{q\ell^4}{24EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^4-4\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3+6\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right\}\end{cases}}$$

《解法Ⅱ》

$EIy''=\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2$ を用いて、逐次積分すると、

$$EIy'=\frac{q}{2}\cdot\left\{-\frac{(\ell-x)^3}{3}\right\}+C_1 \qquad EIy=\frac{q}{2}\cdot\left\{\frac{(\ell-x)^4}{12}\right\}+C_1x+C_2$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1, C_2 を求める。

①$x=0$ で、たわみがゼロ、即ち、$y=0$ より、　$\dfrac{q}{2}\cdot\dfrac{\ell^4}{12}+C_2=0 \quad \therefore C_2=-\dfrac{q\ell^4}{24}$

②$x=0$で、たわみ角がゼロ、即ち、$y'=0$より、　$-\dfrac{q}{2}\cdot\dfrac{\ell^3}{3}+C_1=0 \quad \therefore C_1=\dfrac{q\ell^3}{6}$

よって、たわみ角$\theta(x)$とたわみの式$y(x)$は、次のようになる。

$$EIy'=-\frac{q(\ell-x)^3}{6}+\frac{q\ell^3}{6}=\frac{q}{6}\cdot\left\{\ell^3-(\ell-x)^3\right\}=\frac{q\ell^3}{6}\cdot\left\{1-\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^3\right\}$$

$$EIy=\frac{q}{2}\cdot\left\{\frac{(\ell-x)^4}{12}\right\}+\frac{q\ell^3}{6}x-\frac{q\ell^4}{24}=\frac{q\ell^4}{24}\cdot\left\{\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^4+4\left(\frac{x}{\ell}\right)-1\right\}$$

$$\therefore\boxed{\begin{cases}\theta(x)=y'(x)=\dfrac{q\ell^3}{6EI}\left\{1-\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)^3\right\}\\[2ex] y(x)=\dfrac{q\ell^4}{24EI}\left\{\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)^4+4\left(\dfrac{x}{\ell}\right)-1\right\}\end{cases}}$$

(4) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式$EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=qx+C_1$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1，C_2，C_3，C_4を求める。

①$x=0$で、たわみ角がゼロ、即ち、$y'=0$より、　$C_3=0$

②$x=0$で、たわみがゼロ、即ち、$y=0$より、　$C_4=0$

③$x=\ell$で、せん断力がゼロ、即ち、$y'''=0$より、　$q\ell+C_1=0 \quad \therefore C_1=-q\ell$

④$x=\ell$で、曲げモーメントがゼロ、即ち、$y''=0$より、$\dfrac{q}{2}\ell^2-q\ell^2+C_2=0 \quad \therefore C_2=\dfrac{q}{2}\ell^2$

よって、たわみ角$\theta(x)$とたわみの式$y(x)$は、次のようになる。

$$EIy'''=qx-q\ell$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2-q\ell x+\frac{q}{2}\ell^2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3-\frac{q}{2}\ell x^2+\frac{q}{2}\ell^2x$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4-\frac{q}{6}\ell x^3+\frac{q}{4}\ell^2x^2$$

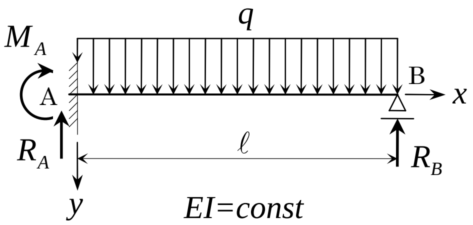
$$\therefore\boxed{\begin{cases}\theta(x)=y'(x)=\dfrac{q}{6EI}x^3-\dfrac{q}{2EI}\ell x^2+\dfrac{q}{2EI}\ell^2x\\[1ex] \qquad=\dfrac{q\ell^3}{6EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3-3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2+3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right\}\\[2ex] y(x)=\dfrac{q}{24EI}x^4-\dfrac{q}{6EI}\ell x^3+\dfrac{q}{4EI}\ell^2x^2\\[1ex] \qquad=\dfrac{q\ell^4}{24EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^4-4\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3+6\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right\}\end{cases}}$$

【問題 BD4-B-1A】下図に示す曲げ剛性 EI が一定で、“A 点固定、B 点単純支持のはり”について、次の設問に答えよ。

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す4階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を用いて、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ を求めよ。

(2) 支点反力 M_A, R_A, R_B を求めよ。

(3) せん断力 $Q(x)$、曲げモーメント $M(x)$ の式を求め、次に、断面力図、すなわち、せん断力図（Q−図）、曲げモーメント図（M−図）を図示せよ。



【解答】

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=qx+C_1$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1, C_2, C_3, C_4 を求める。

(a) $x=0$ のとき、$y'=0$ より、 $C_3=0$

(b) $x=0$ のとき、$y=0$ より、 $C_4=0$

(c) $x=\ell$ のとき、$y''=0$ より、 $\dfrac{q}{2}\ell^2+C_1\ell+C_2=0$ ………①

(d) $x=\ell$ のとき、$y=0$ より、 $\dfrac{q}{24}\ell^4+\dfrac{C_1}{6}\ell^3+\dfrac{C_2}{2}\ell^2=0$ ………②

①を変形すると、 $C_1\ell+C_2=-\dfrac{q}{2}\ell^2$ ………①’

②を変形すると、 $C_1\ell+3C_2=-\dfrac{q}{4}\ell^2$ ………②’

①’−②’より、 $-2C_2=-\dfrac{q}{4}\ell^2$ $\therefore C_2=\dfrac{1}{8}q\ell^2$

これを①’に代入すると、 $C_1\ell=-\dfrac{q}{2}\ell^2-\dfrac{1}{8}q\ell^2=-\dfrac{5}{8}q\ell^2$ $\therefore C_1=-\dfrac{5}{8}q\ell$

よって、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ は、次のようになる。

$$EIy''' = qx - \frac{5}{8}q\ell$$

$$EIy'' = \frac{q}{2}x^2 - \frac{5}{8}q\ell x + \frac{1}{8}q\ell^2$$

$$EIy' = \frac{q}{6}x^3 - \frac{5}{16}q\ell x^2 + \frac{1}{8}q\ell^2 x$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 - \frac{5}{48}q\ell x^3 + \frac{1}{16}q\ell^2 x^2$$

$$\therefore \boxed{\begin{cases} \theta(x) = y'(x) = \dfrac{q}{6EI}x^3 - \dfrac{5}{16EI}q\ell x^2 + \dfrac{1}{8EI}q\ell^2 x \\ \quad = \dfrac{q\ell^3}{48EI}\left\{8\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 - 15\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2 + 6\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right\} \\ y(x) = \dfrac{q}{24EI}x^4 - \dfrac{5}{48EI}q\ell x^3 + \dfrac{1}{16EI}q\ell^2 x^2 \\ \quad = \dfrac{q\ell^4}{48EI}\left\{2\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^4 - 5\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 + 3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right\} \end{cases}}$$

(2) 次に、支点反力 M_A， R_A， R_B を求めると、以下のようになる。

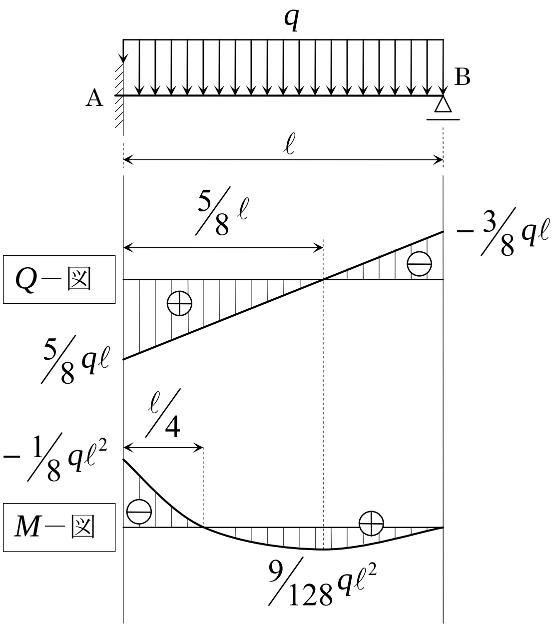
$M_A = -EIy''$ より、 $\quad M_A = -EIy''\big|_{x=0} = -\dfrac{1}{8}q\ell^2$

$Q = -EIy'''$ より、 $\quad R_A = Q_A = -EIy'''\big|_{x=0} = \dfrac{5}{8}q\ell$

また、 $\quad -R_B = Q_B = -EIy'''\big|_{x=\ell} = -q\ell + \dfrac{5}{8}q\ell = -\dfrac{3}{8}q\ell$

以上より、 $\boxed{M_A = -\dfrac{1}{8}q\ell^2}$ $\boxed{R_A = \dfrac{5}{8}q\ell}$ $\boxed{R_B = \dfrac{3}{8}q\ell}$

(3) さらに、せん断力図（Q−図）、曲げモーメント図（M−図）を図示すると、下図のようになる。



曲げモーメントの最大値を求めると、

$$M_{\max} = -EIy''\big|_{x=\frac{5}{8}\ell}$$

$$= -\frac{q}{2}\cdot\frac{25}{64}\ell^2 + \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\ell - \frac{1}{8}q\ell^2$$

$$= \left(-\frac{25}{128} + \frac{25}{64} - \frac{1}{8}\right)\cdot q\ell^2$$

$$= \frac{-25+50-16}{128}q\ell^2$$

$$= \frac{9}{128}q\ell^2$$

$M = -EIy'' = -\dfrac{q}{2}x^2 + \dfrac{5}{8}q\ell x - \dfrac{1}{8}q\ell^2 = 0$ を解くと、

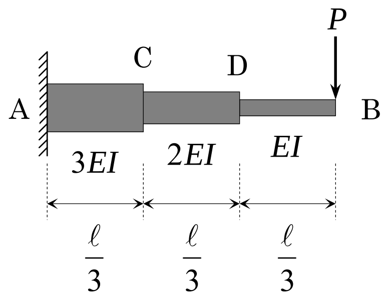
$$-4x^2 + 5\ell x - \ell^2 = 0$$

$$\therefore 4x^2 - 5\ell x + \ell^2 = 0$$

$$\therefore (4x-\ell)(x-\ell) = 0$$

$$\therefore x = \frac{\ell}{4},\quad x = \ell$$

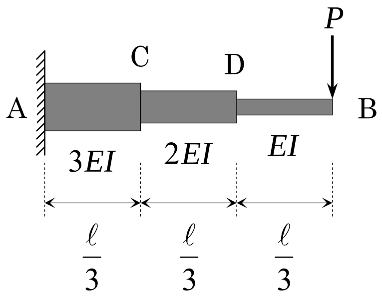
【問題 EL-HCL-2】〝弾性荷重法〟により、下図に示すような“変断面片持ばり AB”の自由端 B のたわみ v_B を求めよ。なお、“変断面片持ばり AB”の曲げ剛性は、A～C 間，C～D 間，D～B 間でそれぞれ $3EI$，$2EI$ ，EI である。

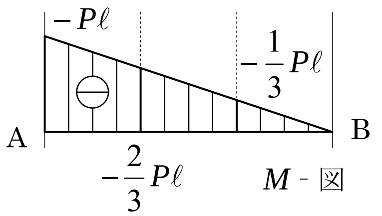


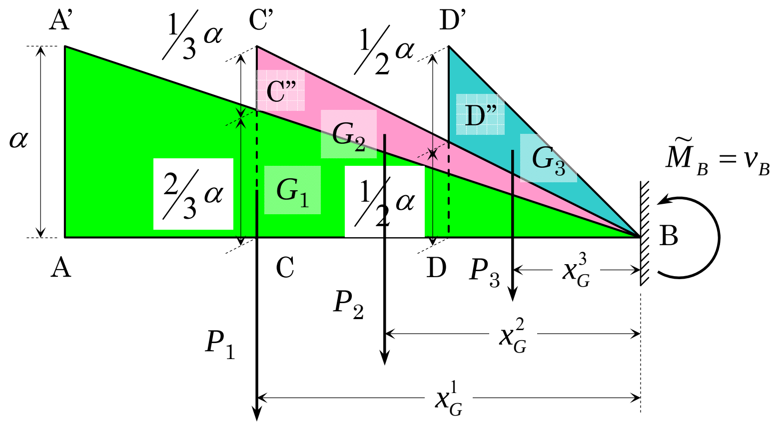
【解答】

まず、変断面片持ばりの曲げモーメント図は、下左図のようになる。

次に、〝モールの定理〟より、〝共役ばり〟に〝弾性荷重〟を載荷したものは下右図のようになり、これについて支点曲げモーメント $\tilde{M}_B = v_B$ を求めればよいことになる。なお、ここに $-\dfrac{P\ell}{3EI} = \alpha$ とする。







ここで、

$$P_1 = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad x_G^1 = \frac{2}{3}\ell$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{1}{9}\alpha\ell \qquad x_G^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{4}{9}\ell$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\ell}{3} = \frac{1}{12}\alpha\ell \qquad x_G^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\ell = \frac{2}{9}\ell$$

であるから、モーメントの釣合から、次のようになる。

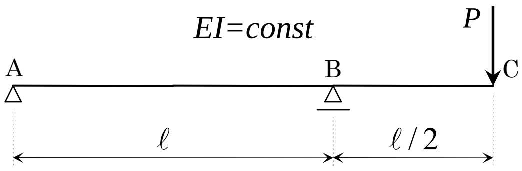
$$\tilde{M}_B + P_1\cdot x_G^1 + P_2\cdot x_G^2 + P_3\cdot x_G^3 = 0$$

$$\therefore -\tilde{M}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell\cdot\frac{2}{3}\ell + \frac{1}{9}\alpha\ell\cdot\frac{4}{9}\ell + \frac{1}{12}\alpha\ell\cdot\frac{2}{9}\ell = \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{81}+\frac{1}{54}\right)\cdot\alpha\ell^2 = \frac{54+8+3}{162}\alpha\ell^2 = \frac{65}{162}\alpha\ell^2$$

$$\therefore v_B = \tilde{M}_B = -\frac{65}{162}\alpha\ell = -\frac{65}{162}\cdot\left(-\frac{P\ell}{3EI}\right)\cdot\ell^2 = \frac{65}{486}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

よって、$\boxed{v_B = \dfrac{65}{486}\cdot\dfrac{P\ell^3}{EI}}$

【問題 EL-OB-1】下図に示す“張出ばり”の C 点のたわみ角 θ_C とたわみ y_C を求めよ。ただし、はりの曲げ剛性は EI で一定とする。



【解答】

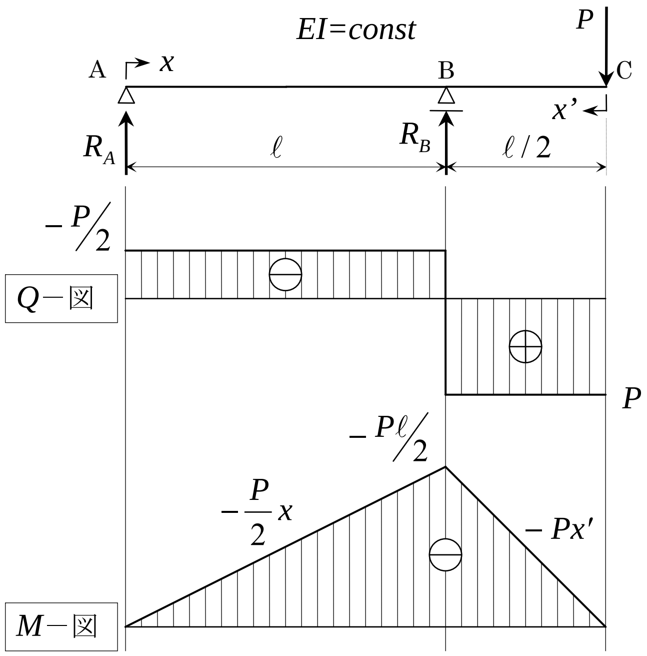
支点反力を R_A，R_B とすると、

$$R_A + R_B = P$$

$$R_B \cdot \ell = P \cdot \left(\ell + \frac{\ell}{2} \right)$$

$$\therefore R_B = \frac{3}{2}P \quad R_A = -\frac{1}{2}P$$

これより、断面力図は、右図のようになる。



次に、〝弾性荷重〟（＝曲げモーメント／曲げ剛性）を求めると、

$$\alpha = -\frac{P\ell}{2EI}$$

また、「張出ばり」の〝共役ばり〟を考えると、

A 点…回転支点　→　回転支点

$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \widetilde{M} = 0 \\ \widetilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$

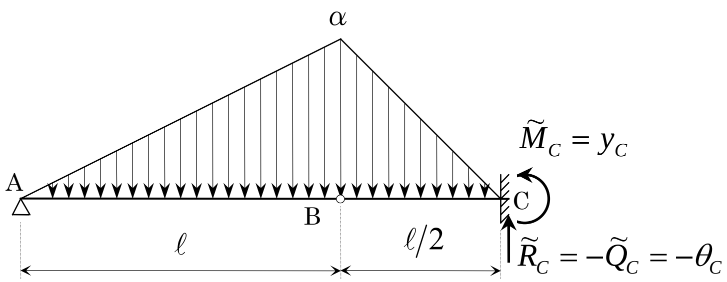
B 点…移動支点　→　ヒンジ

$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta_\ell = \theta_r \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \widetilde{M} = 0 \\ \widetilde{Q}_\ell = \widetilde{Q}_r \end{pmatrix}$$

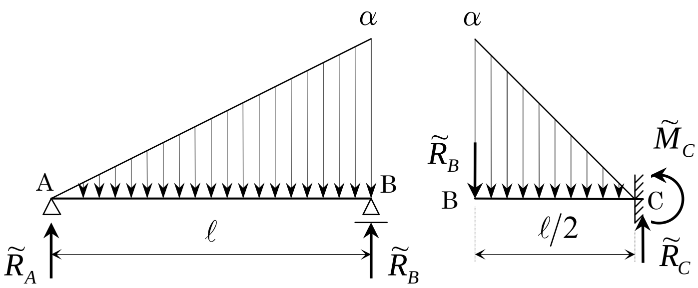
C 点…自由端　→　固定端

$$\begin{pmatrix} y \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \widetilde{M} \neq 0 \\ \widetilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$

となるから、〝弾性荷重〟を載荷した〝共役ばり〟は、右図のようになる。



これを下図のように「単純ばり」と「片持ばり」に分解して考える。



このとき、支点反力 $\widetilde{R}_A$，$\widetilde{R}_B$，$\widetilde{R}_C$，$\widetilde{M}_C$ は、「単純ばり」部分と「片持ばり」部分での釣合条件から次のように求まる。

「単純ばり」部分より、

$$\widetilde{R}_A + \widetilde{R}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad \widetilde{R}_B \cdot \ell = \frac{1}{2}\alpha\ell \cdot \frac{2}{3}\ell = \frac{1}{3}\alpha\ell^2 \qquad \therefore \widetilde{R}_B = \frac{1}{3}\alpha\ell, \quad \widetilde{R}_A = \frac{1}{6}\alpha\ell$$

「片持ばり」部分より、

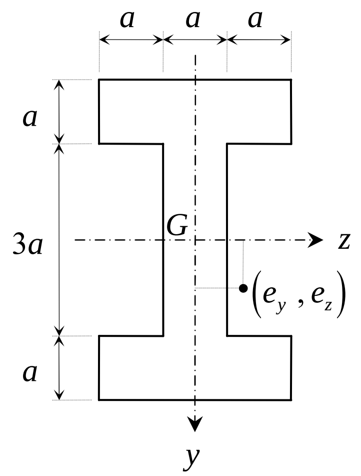
$$\widetilde{R}_C = \widetilde{R}_B + \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}\alpha\ell + \frac{1}{4}\alpha\ell = \frac{7}{12}\alpha\ell \qquad \therefore \boxed{\theta_C = -\widetilde{R}_C = -\frac{7}{12}\cdot\left(-\frac{P\ell}{2EI}\right)\cdot\ell = \frac{7}{24}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}}$$

$$\widetilde{M}_C + \widetilde{R}_B \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \left(\frac{\ell}{2}\cdot\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\therefore -\widetilde{M}_C = \frac{1}{3}\alpha\ell \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{12}\alpha\ell^2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)\cdot\alpha\ell^2 = \frac{1}{4}\alpha\ell^2$$

$$\therefore \boxed{y_C = \widetilde{M}_C = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{P\ell}{2EI}\right)\cdot\ell^2 = \frac{P\ell^3}{8EI}}$$

【問題 CM-CS-1a】下図に示す“Ｉ型断面”の〝断面の核〟を求め、図示せよ。



【解答】

図に示すように、重心 G を通る $y,\ z$ 軸は主軸となるから、$y,\ z$ 軸に関する断面２次モーメント I_y，I_z は、次のようになる。

$$I_y = \frac{3a \cdot a^3}{12} + \frac{a \cdot (3a)^3}{12} \times 2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{2}\right) \cdot a^4 = \frac{19}{4} a^4$$

$$I_z = \frac{a \cdot (3a)^3}{12} + 2 \cdot 3a \cdot a \cdot \left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{3a \cdot a^3}{12} \times 2$$

$$= \frac{9}{4}a^4 + 6 \cdot 4a^4 + \frac{1}{2}a^4 = (\frac{9}{4} + 24 + \frac{1}{2}) \cdot a^4 = \frac{9 + 96 + 2}{4} a^4 = \frac{107}{4} a^4$$

《別解》

$$I_z = \frac{3a \cdot (5a)^3}{12} - \frac{2a \cdot \left(3a\right)^3}{12} = \frac{125}{4}a^4 - \frac{9}{2}a^4 = \frac{125 - 18}{4}a^4 = \frac{107}{4}a^4$$

また、断面積 A は、$A = 3a^2 \times 2 + 3a^2 = 9a^2$ だから、$y,\ z$ 軸に関する回転半径をそれぞれ r_y，r_z とすると、

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{19}{4}a^4}{9a^2} = \frac{19}{36}a^2 \qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{107}{4}a^4}{9a^2} = \frac{107}{36}a^2$$

ここで、載荷荷重の偏心位置を $\left(e_y , e_z\right)$ とすると、中立軸は、$1 + \dfrac{e_y}{r_z^2} y + \dfrac{e_z}{r_y^2} z = 0$ と表され、中立軸が $y,$ z 軸と交わる点すなわち切片 n_y，n_z は、次のようになる。

$$n_y = -\frac{r_z^2}{e_y}, \quad n_z = -\frac{r_y^2}{e_z} \qquad \text{逆に、} \qquad e_y = -\frac{r_z^2}{n_y}, \quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z}$$

よって、〝断面の核〟の端の位置を決めるためには、中立軸が次の２通り（４通り）の限界位置にある場合について、載荷荷重の偏心位置を $\left(e_y , e_z\right)$ を求めればよい。

(1)中立軸が $y=\pm\dfrac{5}{2}a$ となるとき、切片は、$n_y=\pm\dfrac{5}{2}a$，$n_z=\pm\infty$ となるから、

$$e_y=-\frac{r_z^2}{n_y}=-\frac{\dfrac{107}{36}a^2}{\pm\dfrac{5}{2}a}=\mp\frac{107}{36}\cdot\frac{2}{5}=\mp\frac{107}{90}a$$

$$e_z=-\frac{r_y^2}{n_z}=-\frac{\dfrac{19}{36}a^2}{\pm\infty}=0$$

$$\therefore\left(e_y\ ,e_z\right)=\left(\mp\frac{107}{90}a\ ,0\right)$$

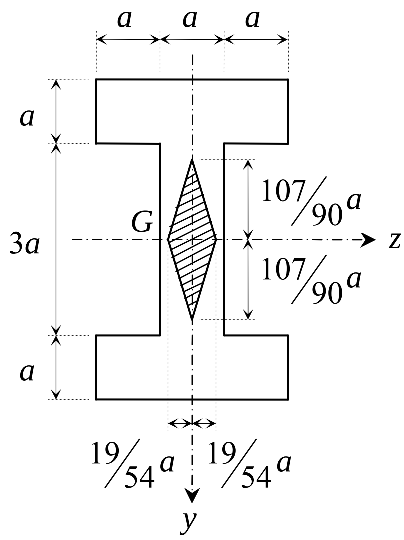
(2)中立軸が $z=\pm\dfrac{3}{2}a$ となるとき、切片は、$n_y=\pm\infty$，$n_z=\pm\dfrac{3}{2}a$ となるから、

$$e_y=-\frac{r_z^2}{n_y}=-\frac{\dfrac{107}{36}a^2}{\pm\infty}=0$$

$$e_z=-\frac{r_y^2}{n_z}=-\frac{\dfrac{19}{36}a^2}{\pm\dfrac{3}{2}a}=\mp\frac{19}{36}\cdot\frac{2}{3}a=\mp\frac{19}{54}a$$

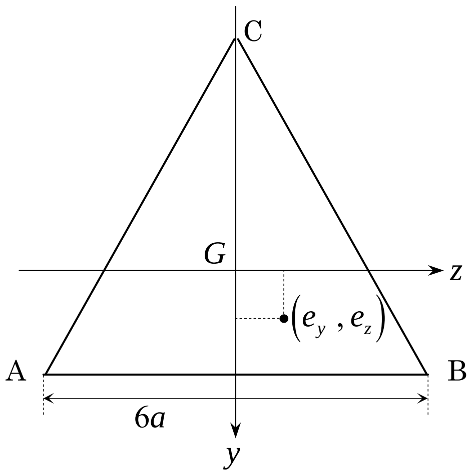
$$\therefore\left(e_y\ ,e_z\right)=\left(0\ ,\mp\frac{19}{54}a\right)$$

以上をまとめて、〝断面の核〟を斜線で図示すると下図のようになる。



【問題 CM-CS-3】

下図に示す一辺の長さが $6a$ の“正三角形断面”ABC の〝断面の核〟を求め、図示せよ。



【解答】

図に示す重心 G を通る y, z 軸は主軸となるから、z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_z は、次のようになる。

$$\frac{1}{2}I_y = \frac{3\sqrt{3}a\cdot(3a)^3}{36} + \left(\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}a\times 3a\right)\times(a)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^4 + \frac{9\sqrt{3}}{2}a^4 = \frac{27\sqrt{3}}{4}a^4 \qquad \therefore I_y = \frac{27\sqrt{3}}{2}a^4$$

$$I_z = \frac{6a\cdot\left(3\sqrt{3}a\right)^3}{36} = \frac{27\cdot 3\sqrt{3}}{6}a^4 = \frac{27\sqrt{3}}{2}a^4$$

また、断面積 A は、$A = \dfrac{1}{2}\times 6a\times 3\sqrt{3}a = 9\sqrt{3}a^2$ だから、y, z 軸に関する回転半径をそれぞれ r_y, r_z とすると、

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{27\sqrt{3}}{2}a^4}{9\sqrt{3}a^2} = \frac{3}{2}a^2 \qquad\qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{27\sqrt{3}}{2}a^4}{9\sqrt{3}a^2} = \frac{3}{2}a^2$$

ここで、載荷荷重の偏心位置を (e_y , e_z) とすると、中立軸は、$1 + \dfrac{e_y}{r_z^2}y + \dfrac{e_z}{r_y^2}z = 0$ と表され、

中立軸が y, z 軸と交わる点すなわち切片 n_y, n_z は、次のようになる。

$$n_y = -\frac{r_z^2}{e_y}, \quad n_z = -\frac{r_y^2}{e_z} \qquad \text{逆に、} \quad e_y = -\frac{r_z^2}{n_y}, \quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z}$$

よって、〝断面の核〟の端の位置を決めるためには、中立軸が次の２通り（3 通り）の限界位置にある場合について、載荷荷重の偏心位置を (e_y , e_z) を求めればよい。

(1) 中立軸が AB となるとき、切片は、$n_y = \sqrt{3}a$, $n_z = \pm\infty$ となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{\sqrt{3}a} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}a = -\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{\pm\infty} = 0$$

$$\therefore (e_y, e_z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right)$$

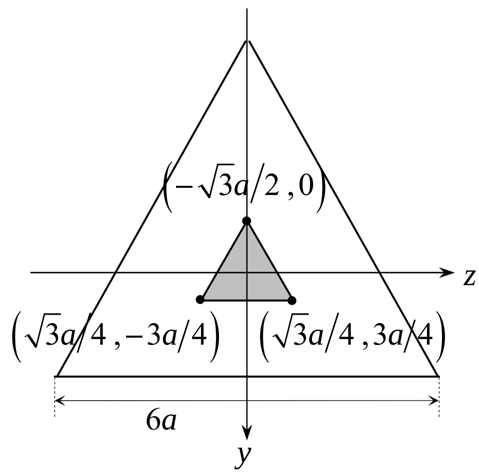
(2) 中立軸が BC または AC となるとき、切片は、$n_y=-2\sqrt{3}a$， $n_z=\pm 2a$ となるから、

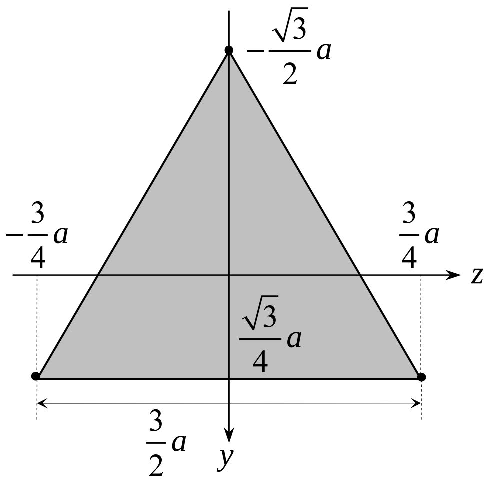
$$e_y=-\frac{r_z^2}{n_y}=-\frac{\frac{3}{2}a^2}{-2\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$$

$$e_z=-\frac{r_y^2}{n_z}=-\frac{\frac{3}{2}a^2}{\pm 2a}=\mp\frac{3}{4}a$$

$$\therefore (e_y, e_z)=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a,\ \mp\frac{3}{4}a\right)$$

以上をまとめて、〝断面の核〟を塗りつぶしで図示すると下図のようになる。





『断面の核』拡大図

（一辺 $\frac{3}{2}a$ の正三角形）

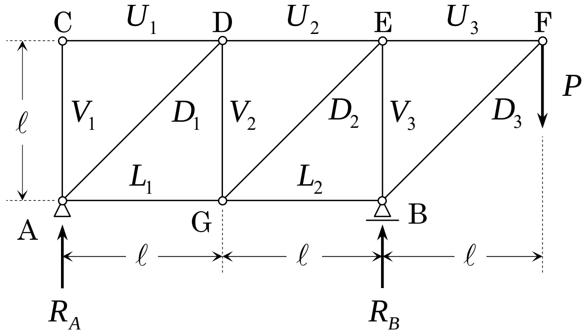
構造力学演習Ⅱ（2018-№.４）

2018/10/02

【問題 CM-BT-6】下図に示す曲げ剛性 EI が一定の静定トラスについて、以下の設問に答えよ。

(1) 部材力 U_1，U_2，U_3，L_1，L_2，V_1，V_2，V_3，D_1，D_2，D_3 を求めよ。

(2) 荷重 P を漸次増加させるとき、最初に座屈が発生する部材はどの部材か。また、そのときの荷重 P の大きさ P_E を求めよ。



【解答】

(1) まず、支点反力 R_A，R_B を求めると、次のようになる。

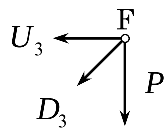
鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R_B = P$

B 点回りのモーメントの釣合から、 $R_A \cdot 2\ell + P\ell = 0 \qquad \therefore\ R_A = -\dfrac{1}{2}P$

A 点回りのモーメントの釣合から、 $R_B \cdot 2\ell = P \cdot 3\ell \qquad \therefore\ R_B = \dfrac{3}{2}P$

各部材力は、〝節点法〟を用いて、鉛直方向と水平方向の力の釣合から、以下のように求める。

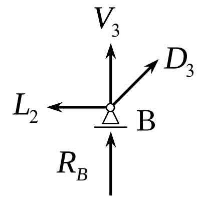
1) F 点について、



（鉛直） $D_3 \sin 45° + P = \dfrac{D_3}{\sqrt{2}} + P = 0 \qquad \therefore D_3 = -\sqrt{2}P$

（水平） $U_3 + D_3 \cos 45° = U_3 + \dfrac{D_3}{\sqrt{2}} = 0 \qquad \therefore U_3 = -\dfrac{D_3}{\sqrt{2}} = P$

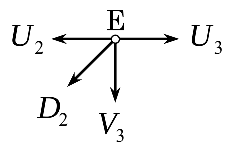
2) B 点について、



（鉛直） $V_3 + D_3 \sin 45° + R_B = V_3 + \dfrac{D_3}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{2}P = 0 \qquad \therefore V_3 = P - \dfrac{3}{2}P = -\dfrac{P}{2}$

（水平） $L_2 = D_3 \cos 45° = \dfrac{D_3}{\sqrt{2}} = -P$

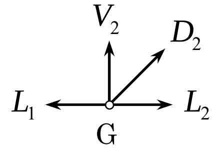
3) E 点について、



（鉛直） $V_3 + D_2 \sin 45° = V_3 + \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = 0 \qquad \therefore D_2 = -\sqrt{2}V_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}P$

（水平） $U_2 + D_2 \cos 45° = U_2 + \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = U_3 \qquad \therefore U_2 = U_3 - \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = P - \dfrac{P}{2} = \dfrac{P}{2}$

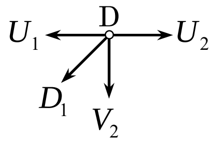
4) G 点について、



（鉛直） $V_2 + D_2 \sin 45° = V_2 + \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = 0 \qquad \therefore V_2 = -\dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{P}{2}$

（水平） $L_1 = L_2 + D_2 \cos 45° = -P + \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = -P + \dfrac{P}{2} = -\dfrac{P}{2}$

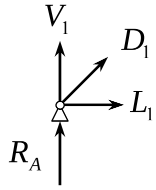
5) D 点について、



（鉛直） $V_2 + D_1 \sin 45° = V_2 + \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} = 0 \qquad \therefore D_1 = -\sqrt{2} V_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} P$

（水平） $U_1 + D_1 \cos 45° = U_1 + \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} = U_2 \qquad \therefore U_1 = U_2 - \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} = \dfrac{P}{2} - \dfrac{P}{2} = 0$

6) A 点について、



（鉛直） $V_1 + D_1 \sin 45° + R_A = V_1 + \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} - \dfrac{P}{2} = 0 \ \therefore V_1 = -\dfrac{D_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{P}{2} = -\dfrac{P}{2} + \dfrac{P}{2} = 0$

（水平） $L_1 + D_1 \cos 45° = L_1 + \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{P}{2} + \dfrac{P}{2} = 0$ （Check）

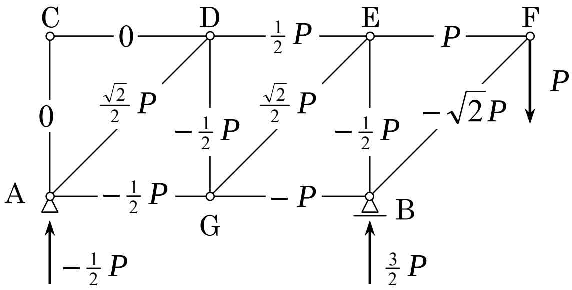
以上をまとめると、

$\boxed{U_1 = 0}$ $\boxed{U_2 = \dfrac{P}{2}}$ $\boxed{U_3 = P}$

$\boxed{L_1 = -\dfrac{P}{2}}$ $\boxed{L_2 = -P}$

$\boxed{V_1 = 0}$ $\boxed{V_2 = -\dfrac{P}{2}}$ $\boxed{V_3 = -\dfrac{P}{2}}$

$\boxed{D_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} P}$ $\boxed{D_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} P}$ $\boxed{D_3 = -\sqrt{2} P}$



となり、これを図示すると右図のようになる。

(2)荷重 P を漸次増加させるとき、最初に座屈が発生する部材は、部材長が同じ場合は最大の圧縮力が作用する部材である。また、部材の支持条件は、すべて両端回転支持である。

(1)で求めた部材力から、部材長が ℓ の場合は L_2，部材長が $\sqrt{2}\ell$ の場合は D_3 が候補として挙げられる。それぞれについて、座屈発生時の荷重 P_E を求めると、次のようになる。

L_2 の場合は、 $P_E = \dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2}$

D_3 の場合は、 $\sqrt{2} P_E = \dfrac{\pi^2 EI}{\left(\sqrt{2}\ell\right)^2} = \dfrac{\pi^2 EI}{2\ell^2} \qquad \therefore \ P_E = \dfrac{\pi^2 EI}{2\sqrt{2}\ell^2}$

したがって、D_3 の場合の方が、L_2 の場合より座屈荷重が小さくなることがわかる。

よって、最初に座屈が発生する部材は、$\boxed{D_3}$ すなわち $\boxed{\text{部材 BF}}$ であり、そのときの荷重 P の大きさ P_E は、$\boxed{P_E = \dfrac{\pi^2 EI}{2\sqrt{2}\ell^2}}$ である。

構造力学演習Ⅱ（2018-№.５）　2018/10/09

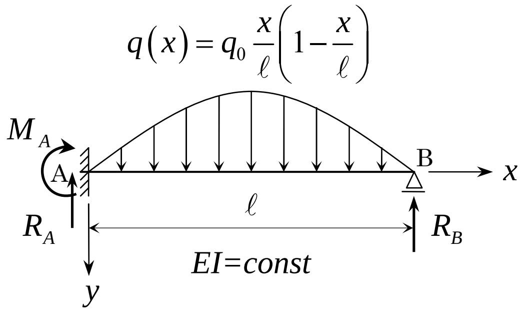
【１】右図に示すような一端固定・他端単純支持ばりに分布荷重$q(x)=q_0\dfrac{x}{\ell}\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)$が作用するとき、

(1) たわみ：$y\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

(2) たわみ角：$\theta\left(\dfrac{x}{\ell}\right)=y'\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

(3) 曲げモーメント：$M\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

(4) せん断力：$Q\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$



の式を求めよ。また、

(5) 支点反力R_A，R_Bと支点曲げモーメントM_Aを求めよ。

ただし、はりの曲げ剛性は、EIで一定とする。

【解答】

(1)(2)はりのたわみと荷重の関係を表す４階の微分方程式$EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q(x)=q_0\dfrac{x}{\ell}\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)=\dfrac{q_0}{\ell}x-\dfrac{q_0}{\ell^2}x^2$

を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^3}{3}+C_1$$

$$EIy''=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^5}{60}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^6}{360}+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1，C_2，C_3，C_4を求める。

1）$x=0$のとき、$y'=0$より、　$C_3=0$

2）$x=0$のとき、$y=0$より、　$C_4=0$

3) $x=\ell$のとき、$y''=0$より、　$\dfrac{q_0}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^3}{6}-\dfrac{q_0}{\ell^2}\dfrac{\ell^4}{12}+C_1\ell+C_2=0$

$$\therefore C_1\ell+C_2=q_0\ell^2\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}q_0\ell^2 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

4) $x=\ell$のとき、$y=0$より、　$\dfrac{q_0}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^5}{120}-\dfrac{q_0}{\ell^2}\cdot\dfrac{\ell^6}{360}+C_1\dfrac{\ell^3}{6}+C_2\dfrac{\ell^2}{2}=0$

$$\therefore C_1\frac{\ell^3}{6}+C_2\frac{\ell^2}{2}=q_0\ell^4\left(\frac{1}{360}-\frac{1}{120}\right)=-\frac{2}{360}q_0\ell^4=-\frac{1}{180}q_0\ell^4$$

$$\therefore C_1\ell+3C_2=-\frac{1}{30}q_0\ell^2 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

②－①より、$2C_2=\left(-\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{12}\right)q_0\ell^2=\dfrac{-2+5}{60}q_0\ell^2=\dfrac{3}{60}q_0\ell^2=\dfrac{1}{20}q_0\ell^2$　　$\therefore C_2=\dfrac{1}{40}q_0\ell^2$

これを①に代入して、$C_1\ell=-\dfrac{1}{12}q_0\ell^2-\dfrac{1}{40}q_0\ell^2=-\dfrac{10+3}{120}q_0\ell^2=-\dfrac{13}{120}q_0\ell^2$　　$\therefore C_1=-\dfrac{13}{120}q_0\ell$

よって、

$$EIy''' = \frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{13}{120}q_0\ell$$

$$EIy'' = \frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6} - \frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^4}{12} - \frac{13}{120}q_0\ell x + \frac{1}{40}q_0\ell^2$$

$$EIy' = \frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24} - \frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^5}{60} - \frac{13}{120}q_0\ell\frac{x^2}{2} + \frac{1}{40}q_0\ell^2 x$$

$$EIy = \frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120} - \frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^6}{360} - \frac{13}{120}q_0\ell\frac{x^3}{6} + \frac{1}{40}q_0\ell^2\frac{x^2}{2}$$

したがって、はりのたわみ $y\left(\frac{x}{\ell}\right)$ とたわみ角 $\theta\left(\frac{x}{\ell}\right) = y'\left(\frac{x}{\ell}\right)$ の式は、次のようになる。

$$EIy' = q_0\ell^3\left\{\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \frac{1}{60}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \frac{13}{240}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{40}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}$$

$$EIy = q_0\ell^4\left\{\frac{1}{120}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \frac{1}{360}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 - \frac{13}{720}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{1}{80}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\theta\left(\frac{x}{\ell}\right) = y'\left(\frac{x}{\ell}\right) &= \frac{q_0\ell^3}{EI}\left\{\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \frac{1}{60}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \frac{13}{240}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{40}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{240}\cdot\frac{q_0\ell^3}{EI}\left\{10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 4\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - 13\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 6\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}y\left(\frac{x}{\ell}\right) &= \frac{q_0\ell^4}{EI}\left\{\frac{1}{120}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \frac{1}{360}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 - \frac{13}{720}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{1}{80}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}\\ &= \frac{1}{720}\cdot\frac{q_0\ell^4}{EI}\left\{6\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - 2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 - 13\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 9\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}\end{aligned}}$$

(3)(4)(5)上記(1)(2)より、せん断力 $Q = -EIy'''$, 曲げモーメント $M = -EIy''$ は、次の式で表される。

$$\boxed{Q\left(\frac{x}{\ell}\right) = -EIy''' = -q_0\ell\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \frac{13}{120}\right\} = -\frac{q_0\ell}{120}\left\{60\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 40\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 13\right\}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}M\left(\frac{x}{\ell}\right) &= -EIy'' = -q_0\ell^2\left\{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \frac{13}{120}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + \frac{1}{40}\right\}\\ &= -\frac{q_0\ell^2}{120}\left\{20\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 13\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + 3\right\}\end{aligned}}$$

したがって、A 点, B 点それぞれの支点反力 R_A , R_B と支点曲げモーメント M_A は、次のようになる。

$$R_A = Q_A = \left[-EIy'''\right]_{x=0} = -\left[EIy'''\right]_{x=0} = -\left(-\frac{13}{120}q_0\ell\right) = \frac{13}{120}q_0\ell$$

$$R_B = -Q_B = -\left[-EIy'''\right]_{x=\ell} = \left[EIy'''\right]_{x=\ell} = q_0\ell\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{13}{120}\right) = \frac{60-40-13}{120}q_0\ell = \frac{7}{120}q_0\ell$$

$$M_A = \left[-EIy''\right]_{x=0} = -\left[EIy''\right]_{x=0} = -\frac{1}{40}q_0\ell^2$$

$$\therefore \boxed{R_A = \frac{13}{120}q_0\ell},\ \boxed{R_B = \frac{7}{120}q_0\ell},\ \boxed{M_A = -\frac{1}{40}q_0\ell^2}$$

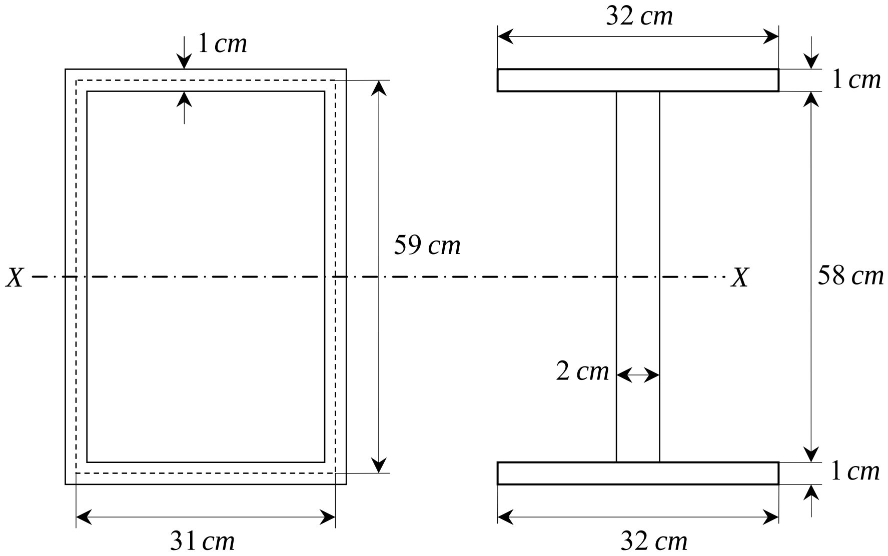
【４】単純ねじりに関する次の問いに答えよ。

⑴ 板厚 t, 薄肉中央線の長さ（周長）S, せん断弾性係数 G が相等しい中空正六角形断面，中空長方形断面（薄肉中央線の長辺と短辺の長さの比が 7：5），中空三角形断面（薄肉中央線の三辺の長さの比が 5：4：3）の 3 つの薄肉中空断面において、それぞれのねじり剛性を GJ_H，GJ_S，GJ_T とするとき、3 者のねじり剛性の比 $GJ_H : GJ_S : GJ_T$ はいくらか。

⑵ 下図に示す 2 つの断面について、下左図は、板厚が $1\,cm$, 薄肉中央線の長辺が $59\,cm$ と短辺が $31\,cm$ の「中空長方形断面」，下右図は、上下フランジが $32\,cm \times 1\,cm$ でウェブが $58\,cm \times 2\,cm$ の「Ｉ形断面」を表している。この 2 つの断面は、X-X 軸に関して対称である。

このとき、「中空長方形断面」の X-X 軸に関する断面 2 次モーメント I_T と「Ｉ形断面」の X-X 軸に関する断面 2 次モーメント I_G を求めよ。

次に、「中空長方形断面」のねじり定数 J_T と「Ｉ形断面」のねじり定数 J_G を求め、さらに、2 つの断面のねじり定数の比 $\dfrac{J_T}{J_G}$ を求めよ。



【解答】

⑴ 薄肉中空断面のねじり剛性 GJ は、$GJ = \dfrac{4F^2}{\oint \frac{ds}{t}} G$ …①と表される。

ここに、F：薄肉中央線に囲まれた面積，$\oint ds$ ：薄肉中央線に沿う周回積分である。

問題では、板厚 t, 薄肉中央線の長さ（周長）S, せん断弾性係数 G が相等しいので、全ての薄肉中空断面で①式の分母は一定となり、3 者のねじり剛性の比 $GJ_H : GJ_S : GJ_T$ は、薄肉中央線に囲まれた面積 F の二乗の比となる。そこで、中空正六角形断面の一辺の長さを $4r$、すなわち S=$24r$、として、3 者の F の二乗を計算すると、次のようになる

$$F_H^2 = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 4r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4r \times 6 \right\}^2 = \left(24\sqrt{3}r^2\right)^2 = 576 \times 3r^4 = 1728r^4$$

$$F_S^2 = (5r \cdot 7r)^2 = \left(35r^2\right)^2 = 1225r^4$$

$$F_T^2 = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 6r \cdot 8r \right\}^2 = \left(24r^2\right)^2 = 576r^4$$ （∵三辺の長さの比が 5：4：3 の三角形は、直角三角形）

したがって、

$$GJ_H : GJ_S : GJ_T = F_H^2 : F_S^2 : F_T^2 = 1728r^4 : 1225r^4 : 576r^4 = 1728 : 1225 : 576$$

$$\therefore \boxed{GJ_H : GJ_S : GJ_T = 1728 : 1225 : 576 \cong 1 : 0.709 : 0.33}$$

(2) 「中空長方形断面」の X-X 軸に関する断面 2 次モーメント I_T は、次のようになる。

$$I_T = \frac{(31+1)\times(59+1)^3}{12} - \frac{(31-1)\times(59-1)^3}{12}$$

$$= \frac{32\times 60^3}{12} - \frac{30\times 58^3}{12} = 576000 - 487780 = 88220$$

$$\therefore \boxed{I_T = 88220\ cm^4}$$

「I 形断面」の X-X 軸に関する断面 2 次モーメント I_G は、次のようになる。

$$I_G = \frac{2\times(59-1)^3}{12} + 2\times\left\{\frac{(31+1)\times 1^3}{12} + (31+1)\times 1\times\left(\frac{59-1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{2\times 58^3}{12} + 2\times\left\{\frac{32\times 1^3}{12} + 32\times 1\times\left(\frac{59}{2}\right)^2\right\} = 88220$$

$$\therefore \boxed{I_G = 88220\ cm^4}$$

「中空長方形断面」のねじり定数 J_T は、①式より、

$$J_T = \frac{4\times(31\times 59)^2}{2(31+59)/1} = 74338.68889 \cong 74338.69 \qquad \therefore \boxed{J_T = 74338.69\ cm^4}$$

「I 形断面」のねじり定数 J_G は、開断面であるから、次のようになる。

$$J_G = \frac{1}{3}\times(59-1)\times 2^3 + 2\times\frac{1}{3}\times(31+1)\times 1^3 = 176 \qquad \therefore \boxed{J_G = 176\ cm^4}$$

2 つの断面のねじり定数の比 $\dfrac{J_T}{J_G}$ は、次のようになる。

$$\frac{J_T}{J_G} = \frac{74338.68889}{176} = 422.3789141 \cong 422.4 \qquad \therefore \boxed{\frac{J_T}{J_G} = 422.4}$$

【５】下図に示す∠BAC=90°で AB=AC の直角二等辺三角形断面 ABC の『断面の核』を以下の手順で求め、図示せよ。なお、原点 O は、◿ABC の重心であり、y, z 軸は、主軸である。

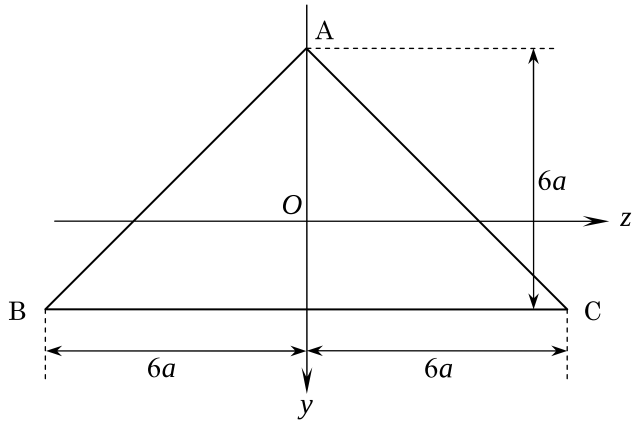
(1) 直角二等辺三角形断面 ABC の面積 A を求めよ。

(2) 直角二等辺三角形断面 ABC の y 軸と z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_z を求めよ。

(3) 直線 BC が中立軸になるときの荷重位置 $D\left(e_y, e_z\right)$ を求めよ。

(4) 直線 AC または AB が中立軸になるときの荷重位置 $E\left(e_y, e_z\right)$ または $F\left(e_y, e_z\right)$ を求めよ。

(5) 『断面の核』を斜線で図示せよ。



【解答】

(1) 上図より、直角二等辺三角形断面 ABC の面積 A は、次のようになる。

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12a \cdot 6a = 36a^2 \qquad \therefore \boxed{A = 36a^2}$$

(2) 直角二等辺三角形断面の y 軸と z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_z は次のようになる。

$$\frac{1}{2} I_y = \frac{(6a)\cdot(6a)^3}{36} + \frac{A}{2}\cdot(2a)^2 = 36a^4 + 18a^2 \cdot 4a^2 = (36+72)a^4 = 108a^4$$

$$I_z = \frac{(12a)\cdot(6a)^3}{36} = 72a^4$$

$$\therefore \boxed{I_y = 216a^4} \ \boxed{I_z = 72a^4}$$

従って、直角二等辺三角形断面の y 軸と z 軸に関する断面半径は、次のようになる。

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{216a^4}{36a^2} = 6a^2 \qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{72a^4}{36a^2} = 2a^2$$

(3) 直線 BC が中立軸になるときの荷重位置 $D\left(e_y, e_z\right)$ を求める。

直線 BC の y 切片は $n_y = 2a$, z 切片は $n_z = \infty$ だから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{2a^2}{2a} = -a, \quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{6a^2}{\infty} = 0 \qquad \therefore \boxed{D\left(e_y, e_z\right) = (-a, 0)}$$

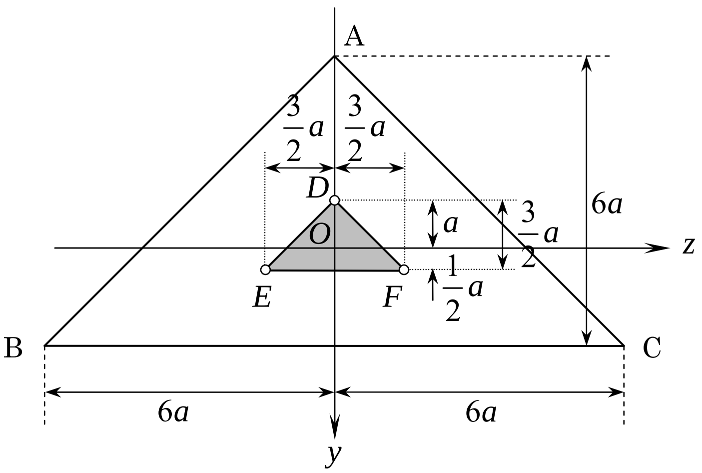
(4) 直線 AC または AB が中立軸になるときの荷重位置 $E\left(e_y, e_z\right)$ または $F\left(e_y, e_z\right)$ を求める。

直線 AC の y 切片は $n_y = -4a$, z 切片は $n_z = \pm 4a$ だから、

$$e_y=-\frac{r_z^2}{n_y}=-\frac{2a^2}{-4a}=\frac{1}{2}a\,,\quad e_z=-\frac{r_y^2}{n_z}=-\frac{6a^2}{\pm 4a}=\mp\frac{3}{2}a$$

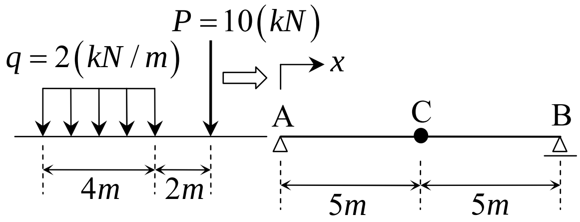
$$\therefore \boxed{E\left(e_y,e_z\right)=\left(\frac{1}{2}a,-\frac{3}{2}a\right)}\quad \boxed{F\left(e_y,e_z\right)=\left(\frac{1}{2}a,\frac{3}{2}a\right)}$$

(5)『断面の核』を図示すると、塗りつぶし部分のようになる。



【問題 IL-SB-2】下図に示すような“集中荷重Pと等分布荷重qのセット”（移動荷重）が、単純ばり AB 上を移動するとき、載荷位置による C 点のせん断力Qと曲げモーメントMの変化を“影響線”を用いて求め、図示せよ。

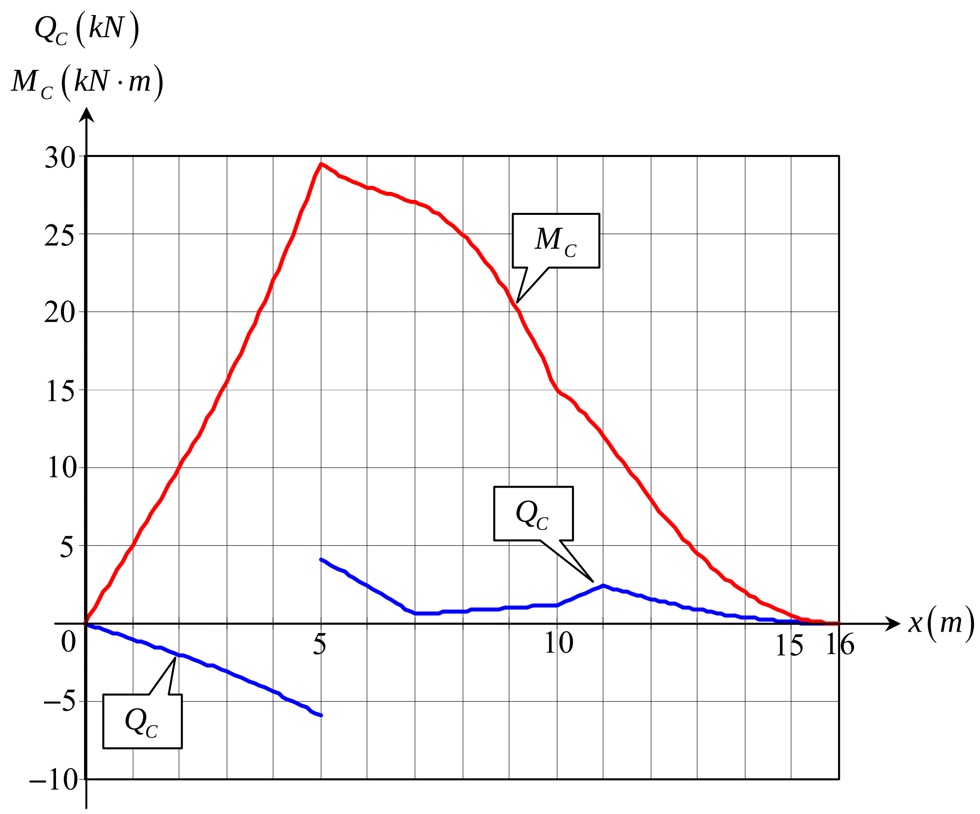
なお、移動荷重は、A 点を原点とするx軸において、集中荷重Pの位置によって“載荷位置”を表わすものとする。



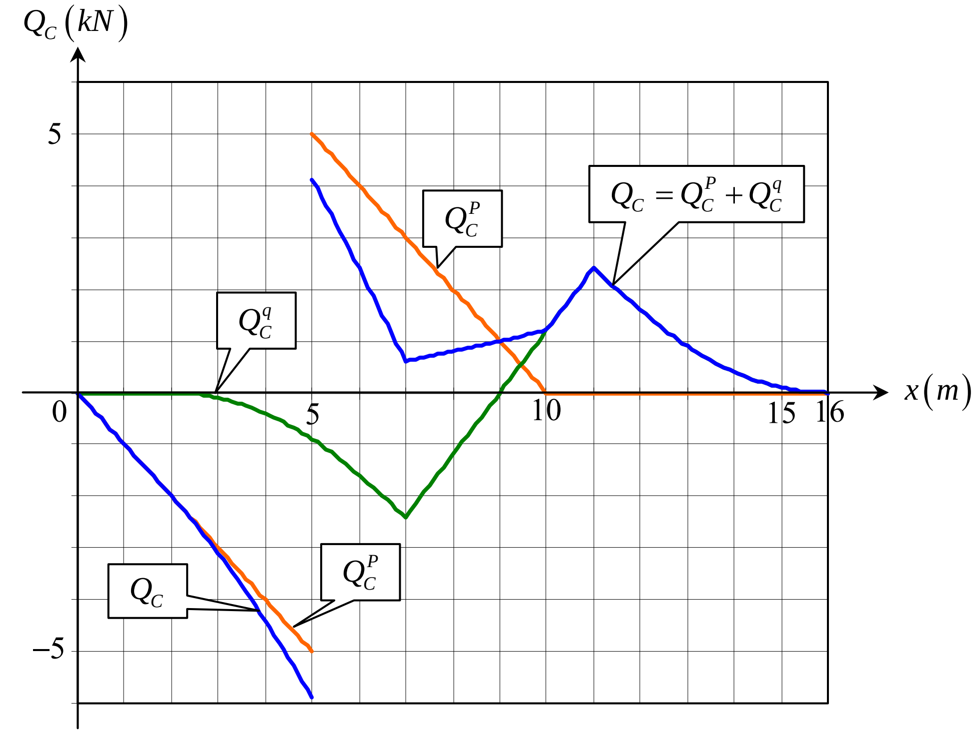
【解答】

表－移動荷重の載荷位置による C 点のせん断力と曲げモーメントの変化

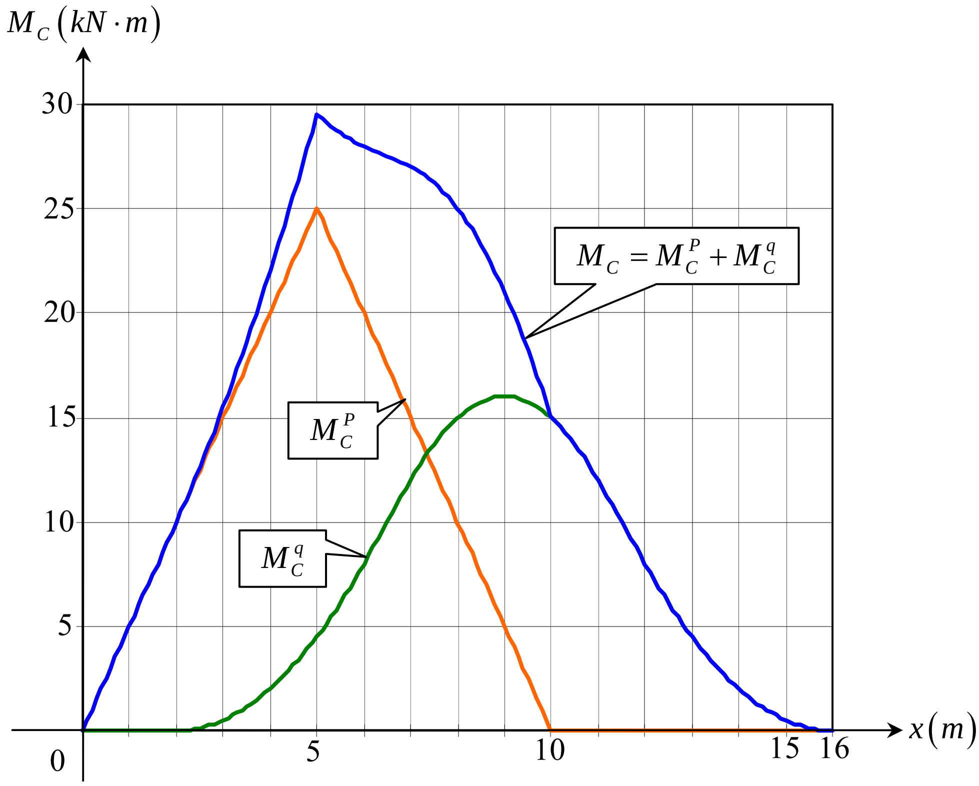
荷重位置 $x(m)$	せん断力 $Q_C\,(kN)$			曲げモーメント $M_C\,(kN\cdot m)$		
	集中荷重 Q_C^P	分布荷重 Q_C^q	合計	集中荷重 M_C^P	分布荷重 M_C^q	合計
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	-1.0	0.0	-1.0	5.0	0.0	5.0
2.0	-2.0	0.0	-2.0	10.0	0.0	10.0
3.0	-3.0	-0.1	-3.1	15.0	0.5	15.5
4.0	-4.0	-0.4	-4.4	20.0	2.0	22.0
5.0	-5.0	-0.9	-5.9	25.0	4.5	29.5
5.0	5.0	-0.9	4.1	25.0	4.5	29.5
6.0	4.0	-1.6	2.4	20.0	8.0	28.0
7.0	3.0	-2.4	0.6	15.0	12.0	27.0
8.0	2.0	-1.2	0.8	10.0	15.0	25.0
9.0	1.0	0.0	1.0	5.0	16.0	21.0
10.0	0.0	1.2	1.2	0.0	15.0	15.0
11.0	0.0	2.4	2.4	0.0	12.0	12.0
12.0	0.0	1.6	1.6	0.0	8.0	8.0
13.0	0.0	0.9	0.9	0.0	4.5	4.5
14.0	0.0	0.4	0.4	0.0	2.0	2.0
15.0	0.0	0.1	0.1	0.0	0.5	0.5
16.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0



図－移動荷重の載荷位置による C 点のせん断力と曲げモーメントの変化

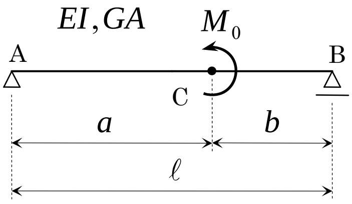


図－１　移動荷重の載荷位置によるＣ点のせん断力の変化
（集中荷重と等分布荷重に分けて考えた場合）



図－２　移動荷重の載荷位置によるＣ点の曲げモーメントの変化
（集中荷重と等分布荷重に分けて考えた場合）

【問題 SE-B-2】下図に示す集中モーメントM_0が作用する単純ばりのひずみエネルギーUを求めよ。
ただし、はりの曲げ剛性はEI，せん断弾性係数はG，断面積はAとする。



【解答】

支点反力をR_A，R_Bとすると、

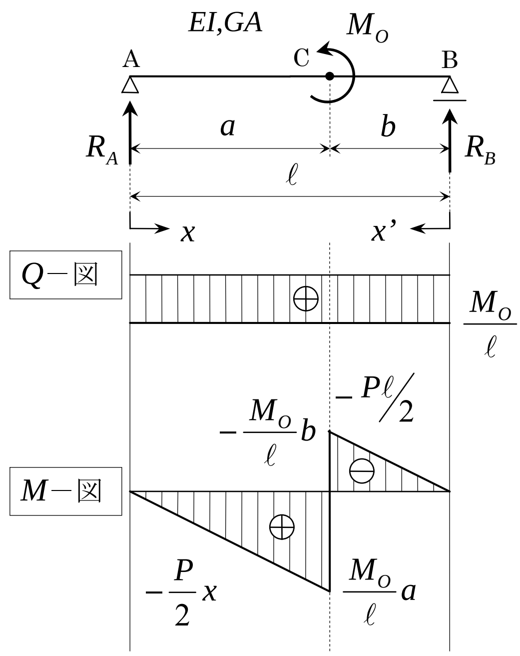
$$R_A + R_B = P$$

$$R_B \cdot \ell = P \cdot \left(\ell + \frac{\ell}{2} \right)$$

$$\therefore R_B = \frac{3}{2}P \quad R_A = -\frac{1}{2}P$$

これより、断面力図は、右図のようになる。

したがって、ひずみエネルギーUは、次のようになる。



$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{M^2}{EI} + \kappa\frac{Q^2}{GA} \right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{a}\left(\frac{1}{EI}\cdot\frac{M_O^2}{\ell^2}x^2 + \frac{\kappa}{GA}\cdot\frac{M_O^2}{\ell^2} \right)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{b}\left(\frac{1}{EI}\cdot\frac{M_O^2}{\ell^2}x'^2 + \frac{\kappa}{GA}\cdot\frac{M_O^2}{\ell^2} \right)dx'$$

$$U = \frac{{M_O}^2}{2EI\ell^2}\int_0^a x^2 dx + \frac{\kappa {M_O}^2}{2GA\ell^2}a$$

$$+\frac{{M_O}^2}{2EI\ell^2}\int_0^b x'^2 dx' + \frac{\kappa {M_O}^2}{2GA\ell^2}b$$

$$= \frac{{M_O}^2}{2EI\ell^2}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} \right) + \frac{\kappa {M_O}^2}{2GA\ell^2}(a+b) = \frac{{M_O}^2\left(a^3+b^3\right)}{6EI\ell^2} + \frac{\kappa {M_O}^2}{2GA\ell}$$

$$= \frac{{M_O}^2}{6EI\ell^2}(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) + \frac{\kappa {M_O}^2}{2GA\ell^2}(a+b)$$

$$= \frac{{M_O}^2}{6EI\ell}\left(a^2-ab+b^2\right) + \frac{\kappa {M_O}^2}{2GA\ell}$$

$$= \frac{{M_O}^2}{6EI\ell}\left\{(a+b)^2-3ab\right\} + \frac{\kappa {M_O}^2}{2GA\ell}$$

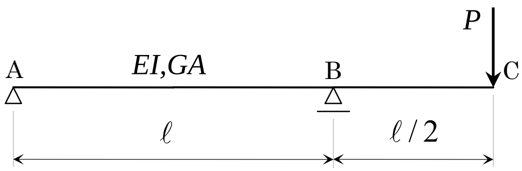
$$= \frac{{M_O}^2\ell}{6EI} - \frac{{M_O}^2}{2EI}\cdot\frac{ab}{\ell} + \frac{\kappa {M_O}^2}{2GA\ell}$$

$$\therefore \boxed{U = \frac{M_O^2}{6EI\ell}\left(a^2-ab+b^2\right) + \frac{\kappa M_O^2}{2GA\ell} = \frac{M_O^2\ell}{6EI} - \frac{M_O^2}{2EI}\cdot\frac{ab}{\ell} + \frac{\kappa M_O^2}{2GA\ell}}$$

ここで、UをM_Oで偏微分すると、（カステリアーノの第２定理）

$$\frac{\partial U}{\partial M_O} = \frac{M_O}{3EI\ell}\left(a^2-ab+b^2\right) + \frac{\kappa M_O}{GA\ell} = \frac{M_O\ell}{3EI} - \frac{M_O}{EI}\cdot\frac{ab}{\ell} + \frac{\kappa M_O}{GA\ell}$$ ➡C 点の相対角

【問題 SE-B-1】下図に示す張出ばりのひずみエネルギーU を求めよ。ただし、はりの曲げ剛性は EI, せん断弾性係数は G, 断面積は A とする。



【解答】

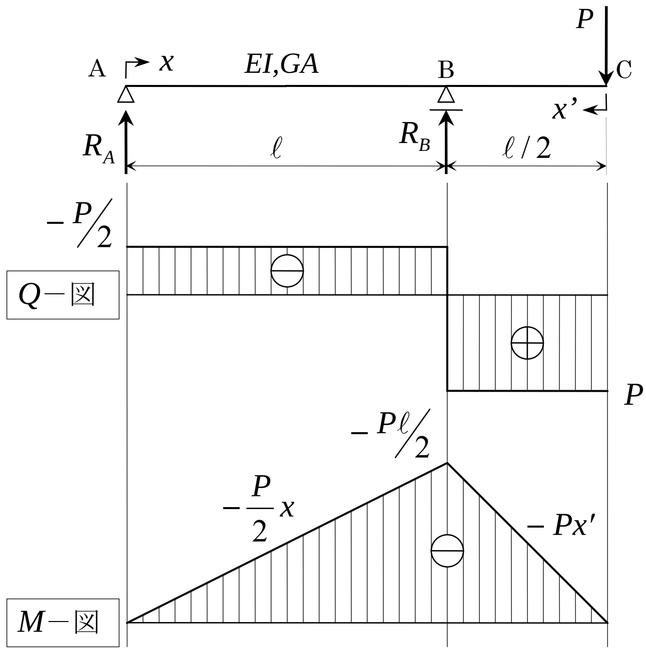
支点反力を R_A， R_B とすると、

$$R_A + R_B = P$$

$$R_B \cdot \ell = P \cdot \left(\ell + \frac{\ell}{2}\right)$$

$$\therefore R_B = \frac{3}{2}P \quad R_A = -\frac{1}{2}P$$

これより、断面力図は、右図のようになる。
したがって、ひずみエネルギーU は、次のようになる。



$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}\ell}\left(\frac{M^2}{EI} + \kappa\frac{Q^2}{GA}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{1}{EI}\cdot\frac{P^2}{4}x^2 + \frac{\kappa}{GA}\cdot\frac{P^2}{4}\right)dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\ell}\left(\frac{1}{EI}\cdot P^2 x'^2 + \frac{\kappa}{GA}\cdot P^2\right)dx'$$

$$U = \frac{P^2}{8EI}\int_0^{\ell}x^2dx + \frac{\kappa P^2}{8GA}\ell + \frac{P^2}{2EI}\int_0^{\frac{1}{2}\ell}x'^2dx' + \frac{\kappa P^2}{2GA}\cdot\frac{\ell}{2}$$

$$= \frac{P^2}{8EI}\cdot\frac{\ell^3}{3} + \frac{P^2}{2EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\ell^3}{8} + \frac{\kappa P^2}{8GA}\cdot(\ell + 2\ell)$$

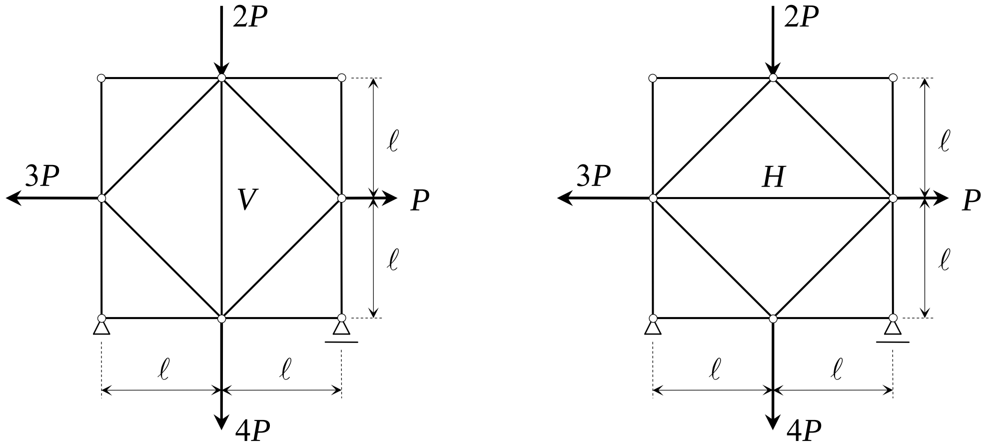
$$= \frac{P^2\ell^3}{48EI}\cdot(2+1) + \frac{3}{8}\cdot\frac{\kappa P^2\ell}{GA} = \frac{P^2\ell^3}{16EI} + \frac{3}{8}\cdot\frac{\kappa P^2\ell}{GA}$$

$$\therefore \boxed{U = \frac{1}{16}\cdot\frac{P^2\ell^3}{EI} + \frac{3}{8}\cdot\frac{\kappa P^2\ell}{GA}}$$

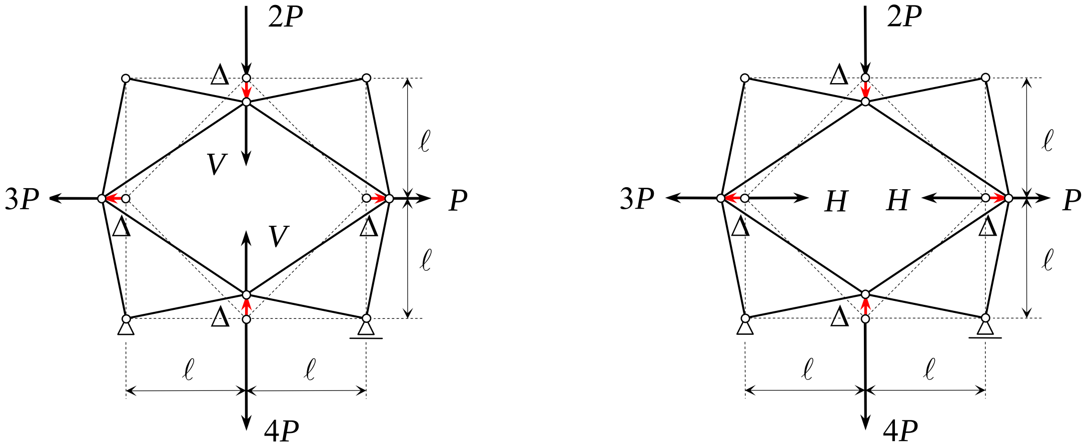
ここで、U を P で偏微分すると、（カステリアーノの第 2 定理）

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{8}\cdot\frac{P\ell^3}{EI} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\kappa P\ell}{GA}$$ ➡C 点の変位

【問題 UD-T-3】下図のトラスの鉛直材 V，水平材 H の部材力を〝**仮想変位の原理**〟を用いて求めよ。



【解答】



変位の境界条件を満足する単位の仮想変位 Δ による変位性状は、上図のようになるから、

（左上図について）

$$P\times(\Delta)+2P\times(\Delta)+3P\times(\Delta)+4P\times(-\Delta)+V\times(\Delta)+V\times(\Delta)=0$$

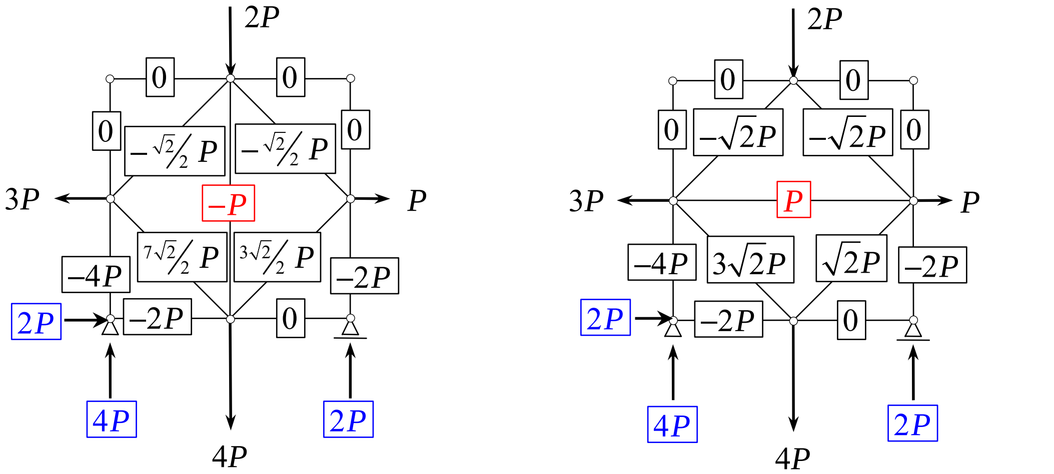
$$\therefore (P+2P+3P-4P+V+V)\times\Delta=0 \qquad \therefore 2P+2V=0 \qquad \therefore \boxed{V=-P}$$

（右上図について）

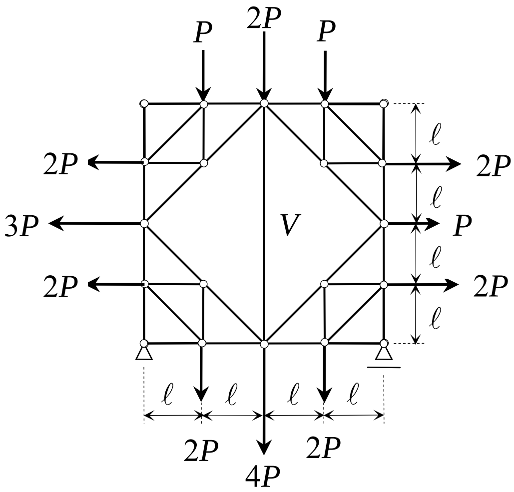
$$P\times(\Delta)+2P\times(\Delta)+3P\times(\Delta)+4P\times(-\Delta)+H\times(-\Delta)+H\times(-\Delta)=0$$

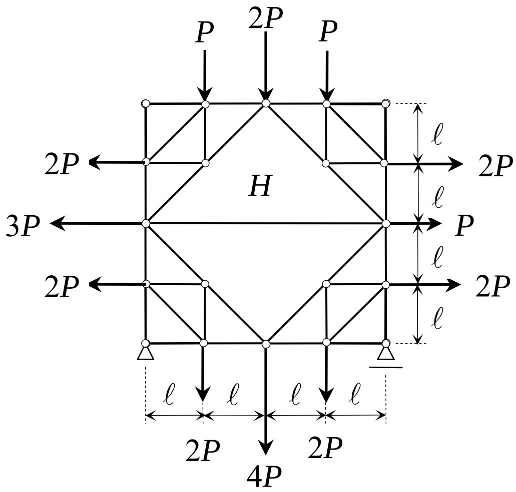
$$\therefore (P+2P+3P-4P-H-H)\times\Delta=0 \qquad \therefore 2P-2H=0 \qquad \therefore \boxed{H=P}$$

ちなみに、〝節点法〟によりすべての部材力を求めると、下図のようになる。



【問題 UD-T-3X】下図のトラスの鉛直材 V, 水平材 H の部材力を〝**仮想変位の原理**〟を用いて求めよ。





【解答】

変位の境界条件を満足する単位の仮想変位 Δ による変位性状は、【問題 UD-T-3】と同様になるから、

（左上図について）

上側：　$P\times\left(\Delta/2\right)+2P\times\left(\Delta\right)+P\times\left(\Delta/2\right)$

左側：　$+2P\times\left(\Delta/2\right)+3P\times\left(\Delta\right)+2P\times\left(\Delta/2\right)$

右側：　$+2P\times\left(\Delta/2\right)+P\times\left(\Delta\right)+2P\times\left(\Delta/2\right)$

下側：　$+2P\times\left(-\Delta/2\right)+4P\times\left(-\Delta\right)+2P\times\left(-\Delta/2\right)$

部材力：　$+V\times\left(\Delta\right)+V\times\left(\Delta\right)=0$

➡

$$
\begin{aligned}
&3P\times\left(\Delta\right)\\
&+5P\times\left(\Delta\right)\\
&+3P\times\left(\Delta\right)\\
&+6P\times\left(-\Delta\right)\\
&+2V\times\left(\Delta\right)=0
\end{aligned}
$$

$\therefore\left(5P+2V\right)\times\Delta=0$　　　$\therefore 5P+2V=0$　　　$\therefore\ \boxed{V=-\dfrac{5}{2}P}$

（右上図について）

上側：　$P\times\left(\Delta/2\right)+2P\times\left(\Delta\right)+P\times\left(\Delta/2\right)$

左側：　$+2P\times\left(\Delta/2\right)+3P\times\left(\Delta\right)+2P\times\left(\Delta/2\right)$

右側：　$+2P\times\left(\Delta/2\right)+P\times\left(\Delta\right)+2P\times\left(\Delta/2\right)$

下側：　$+2P\times\left(-\Delta/2\right)+4P\times\left(-\Delta\right)+2P\times\left(-\Delta/2\right)$

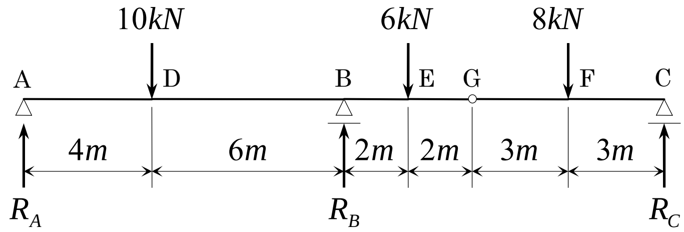
部材力：　$+H\times\left(-\Delta\right)+H\times\left(-\Delta\right)=0$

➡

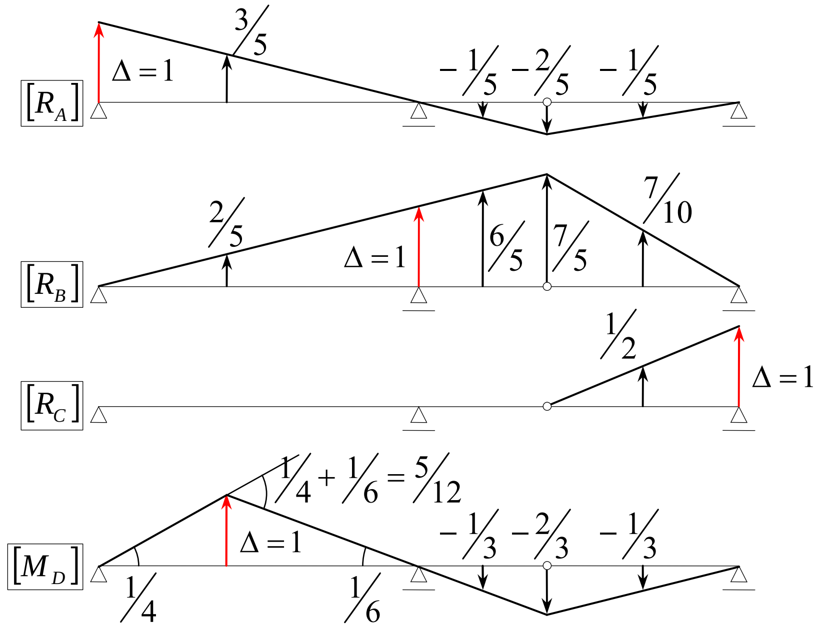
$$
\begin{aligned}
&3P\times\left(\Delta\right)\\
&+5P\times\left(\Delta\right)\\
&+3P\times\left(\Delta\right)\\
&+6P\times\left(-\Delta\right)\\
&+2H\times\left(-\Delta\right)=0
\end{aligned}
$$

$\therefore\left(5P-2H\right)\times\Delta=0$　　　$\therefore 5P-2H=0$　　　$\therefore\ \boxed{H=\dfrac{5}{2}P}$

【問題 UD-G-2】下図に示すゲルバーばりの支点反力 R_A， R_B， R_C と D 点の曲げモーメント M_D を〝**仮想変位の原理**〟を用いて求めよ。



【解答】
境界条件を満足し、単位の仮想変位 $\Delta=1$ に対応する変位の性状は下図のようになる。



これを用いて、支点反力 R_A， R_B， R_C および曲げモーメント M_D を求める。

(1) 支点反力 R_A

$$R_A\times1+10kN\times\left(-\frac{3}{5}\right)+6kN\times\left\{-\left(-\frac{1}{5}\right)\right\}+8kN\times\left\{-\left(-\frac{1}{5}\right)\right\}=0$$

$\therefore\ R_A-6kN+1.2kN+1.6kN=0$ $\qquad\therefore\ \boxed{R_A=6-1.2-1.6=3.2\ kN}$

(2) 支点反力 R_B

$$R_B\times1+10kN\times\left(-\frac{2}{5}\right)+6kN\times\left(-\frac{6}{5}\right)+8kN\times\left(-\frac{7}{10}\right)=0$$

$\therefore\ R_B-4kN-7.2kN-5.6kN=0$ $\qquad\therefore\ \boxed{R_B=4+7.2+5.6=16.8\ kN}$

(3) 支点反力 R_C

$R_C\times1+8kN\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ $\qquad\therefore\ \boxed{R_C=4\ kN}$

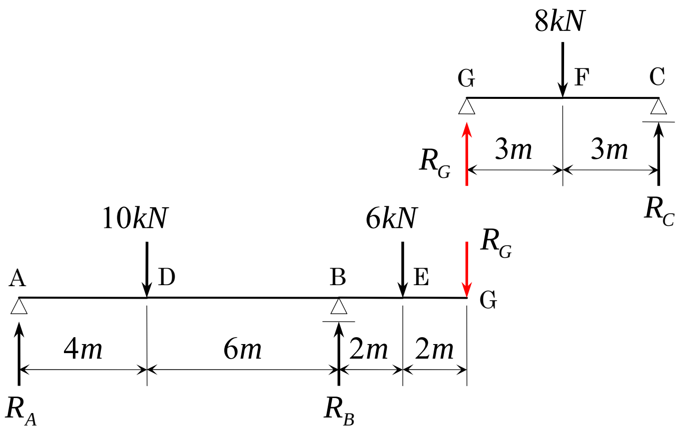
(4) 曲げモーメント M_D

$$M_D\times\frac{5}{12}+10kN\times(-1m)+6kN\times\left\{-\left(-\frac{1}{3}m\right)\right\}+8kN\times\left\{-\left(-\frac{1}{3}m\right)\right\}=0$$

$$\therefore\ \frac{5}{12}M_D-10kN\cdot m+2kN\cdot m+\frac{8}{3}kN\cdot m=0$$

$\therefore\ \frac{5}{12}M_D=10-2-\frac{8}{3}=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}\ kN\cdot m$ $\qquad\therefore\ \boxed{M_D=\frac{16}{3}\cdot\frac{12}{5}=\frac{64}{5}=12.8\ kN\cdot m}$

〔***Check***〕



問題のゲルバーばりを分解すると、上図のようになる。
これを用いて、支点反力 R_A， R_B， R_C および曲げモーメント M_D を求める。

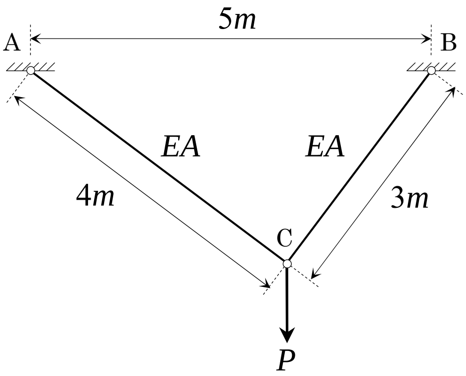
$$R_C = R_G = 4kN$$

$$10R_B = 10\times 4 + 6\times 12 + R_G\times 14 = 40 + 72 + 56 = 168 \quad \therefore R_B = 16.8kN$$

$$R_A + R_B = 10 + 6 + R_G = 16 + 4 = 20 \quad \therefore R_A = 20 - 16.8 = 3.2kN$$

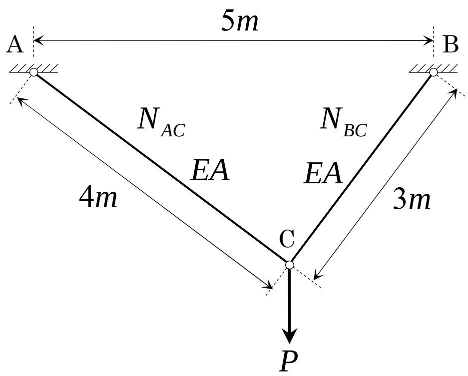
$$M_D = R_A\times 4 = 3.2\times 4 = 12.8 \quad \therefore M_D = 12.8kN\cdot m$$

【問題 UL-T-1】下図に示すトラスの載荷点 C の鉛直変位 v_C と水平変位 u_C を求めよ。ただし、各部材の引張剛性 EA は一定とする。



【解答】

右図のように、C 点に次の３つがそれぞれ作用するときの部材力 N_{AC}， N_{BC} を求めると、次のようになる。



1) 集中荷重 P

水平方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5}N_{AC} = \frac{3}{5}N_{BC} \quad \therefore N_{BC} = \frac{4}{3}N_{AC} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

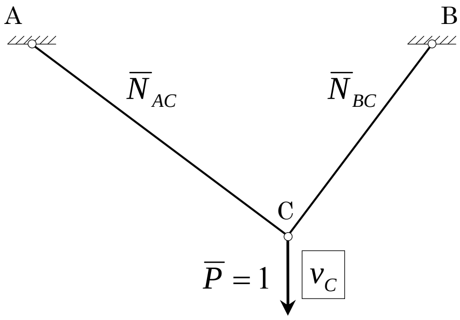
鉛直方向の力の釣合から、

$$\frac{3}{5}N_{AC} + \frac{4}{5}N_{BC} = P \quad \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

①を②に代入すると、

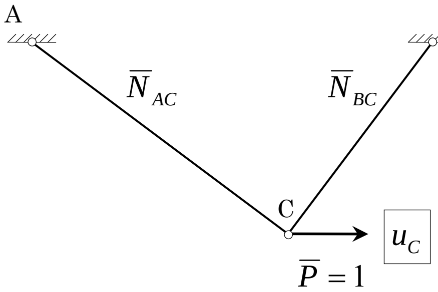
$$\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot N_{AC} = \frac{9+16}{15}N_{AC} = \frac{25}{15}N_{AC} = \frac{5}{3}N_{AC} = P$$

$$\therefore N_{AC} = \frac{3}{5}P, \quad N_{BC} = \frac{4}{5}P$$



2) 単位の鉛直方向集中荷重 $\overline{P} = 1$

上記 1)と同様にして、$\overline{N}_{AC} = \dfrac{3}{5}$，$\overline{N}_{BC} = \dfrac{4}{5}$



3) 単位の水平方向集中荷重 $\overline{P} = 1$

水平方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5}\overline{N}_{AC} = \frac{2}{5}\overline{N}_{BC} + \overline{P} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots①'$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$\frac{3}{5}\overline{N}_{AC} + \frac{4}{5}\overline{N}_{BC} = 0$$

$$\therefore \overline{N}_{BC} = -\frac{3}{4}\overline{N}_{AC} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots②'$$

②'を①'に代入すると、

$$\left\{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right\}\cdot\overline{N}_{AC} = \frac{16+9}{20}\overline{N}_{AC} = \frac{25}{20}\overline{N}_{AC} = \frac{5}{4}\overline{N}_{AC} = \overline{P} = 1$$

$$\therefore \overline{N}_{AC} = \frac{4}{5}, \quad \overline{N}_{BC} = -\frac{3}{5}$$

以上より、〝単位荷重法〟を用いて、点 C の鉛直変位 v_C と水平変位 u_C を求めると、次のようになる。

$$1\times v_C=\int_0^{\ell}\frac{N\overline{N}}{EA}dx=\frac{1}{EA}\left\{\frac{3}{5}P\cdot\frac{3}{5}\times 4m+\frac{4}{5}P\cdot\frac{4}{5}\times 3m\right\}=\frac{P}{EA}\left(\frac{36}{25}+\frac{48}{25}\right)=\frac{84}{25}\cdot\frac{P}{EA}$$

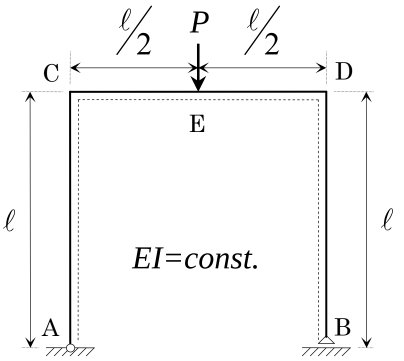
$$\therefore \boxed{v_C=\frac{84}{25}\cdot\frac{P}{EA}\quad(m)}$$

$$1\times u_C=\int_0^{\ell}\frac{N\overline{N}}{EA}dx=\frac{1}{EA}\left\{\frac{3}{5}P\cdot\frac{4}{5}\times 4m+\frac{4}{5}P\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\times 3m\right\}=\frac{P}{EA}\left(\frac{48}{25}-\frac{26}{25}\right)=\frac{12}{25}\cdot\frac{P}{EA}$$

$$\therefore \boxed{u_C=\frac{12}{25}\cdot\frac{P}{EA}\quad(m)}$$

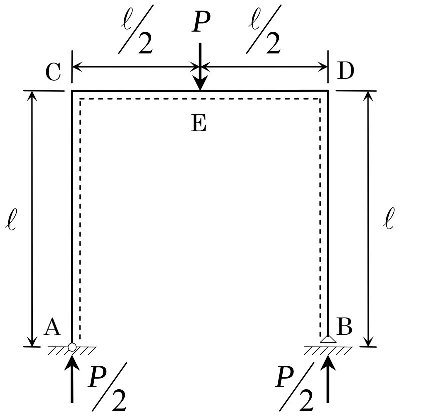
構造力学演習Ⅱ（2018-№10）　　2018/11/20

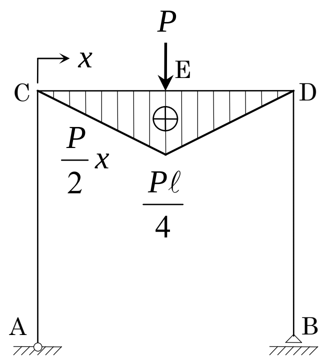
【問題 UL-R-4】下図に示す静定ラーメンの B 点の水平右方向の変位 Δ_B を〝**単位荷重法**〟を用いて求めよ。ただし、曲げ剛性 EI は一定とし、軸方向力・せん断力の影響は無視する。また、曲げモーメントは、点線側が〝引張〟となる曲げモーメントを〝正〟とする。



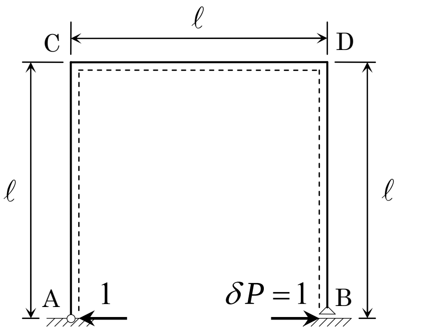
【解答】

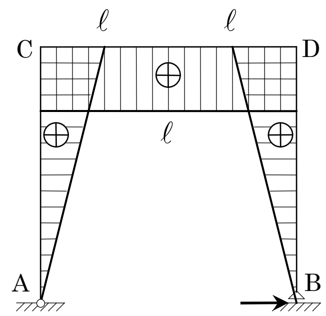
実系の曲げモーメント図（ Mー図 ）を求めると、下左図より、下右図のようになる。





次に、下左図のような仮想系の曲げモーメント図（ $\overline{M}$ー図 ）を求めると、下右図のようになる。



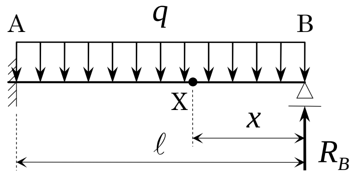


これに、〝単位荷重法〟を適用すれば、次のようになる。

$$1\times\Delta_B=\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx=\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{P}{2}x\right)\cdot\ell dx=\frac{2}{EI}\cdot\frac{P\ell}{2}\int_0^{\frac{\ell}{2}}xdx=\frac{P\ell}{EI}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\ell}{2}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

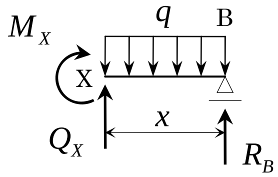
$$\therefore\boxed{\Delta_B=\frac{1}{8}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

【問題 LW-B-4】下図に示すような曲げ剛性 EI が一定で、等分布荷重 q が作用する1次不静定ばりの B 点の支点反力 R_B を〝**最小仕事の原理**〟を用いて求めよ。なお、せん断力の影響は無視する。



$$EI = const.$$

【解答】
不静定力を R_B とし、支点 B の左側距離 x の点 X の曲げモーメント M_X を考えると、右図のようになるから、



$$M_X + qx \cdot \frac{x}{2} = R_B \cdot x \qquad \therefore M_X = R_B \cdot x - \frac{q}{2}x^2$$

したがって、ひずみエネルギーU は、以下のように表される。

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \frac{M_X^2}{EI}dx = \frac{1}{2EI}\int_0^{\ell}\left(R_B \cdot x - \frac{q}{2}x^2\right)^2 dx$$

U を計算する際に、R_B での偏微分を先に行い、〝最小仕事の原理〟$\dfrac{\partial U}{\partial R_B} = 0$ より R_B を求めると、次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{1}{EI}\int_0^{\ell}\left(R_B \cdot x - \frac{q}{2}x^2\right)\cdot x dx = \frac{1}{EI}\left[R_B \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_0^{\ell} = 0$$

$$\therefore R_B \cdot \frac{\ell^3}{3} - \frac{q}{2}\cdot\frac{\ell^4}{4} = 0 \qquad \therefore \boxed{R_B = \frac{q\ell^4}{8}\cdot\frac{3}{\ell^3} = \frac{3}{8}q\ell}$$

《別解》

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\frac{M_X^2}{EI}dx = \frac{1}{2EI}\int_0^{\ell}\left(R_B \cdot x - \frac{q}{2}x^2\right)^2 dx = \frac{1}{2EI}\int_0^{\ell}\left(R_B^2 \cdot x^2 - R_B \cdot q \cdot x^3 + \frac{q^2}{4}x^4\right)dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\left[R_B^2 \cdot \frac{x^3}{3} - R_B \cdot q \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{q^2}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\right]_0^{\ell} = \frac{1}{2EI}\left[R_B^2 \cdot \frac{\ell^3}{3} - R_B \cdot q \cdot \frac{\ell^4}{4} + \frac{q^2}{4}\cdot\frac{\ell^5}{5}\right]$$

ここで、U を R_B で偏微分して、〝最小仕事の原理〟$\dfrac{\partial U}{\partial R_B} = 0$ より R_B を求めると、次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{1}{2EI}\left[\frac{2}{3}R_B \cdot \ell^3 - q \cdot \frac{\ell^4}{4}\right] = 0 \qquad \therefore \frac{2}{3}R_B \cdot \ell^3 - q \cdot \frac{\ell^4}{4} = 0 \qquad \therefore \boxed{R_B = \frac{q\ell^4}{4}\cdot\frac{3}{2\ell^3} = \frac{3}{8}q\ell}$$

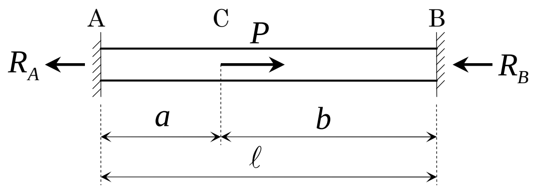
【問題 CA1-1】下図のような長さℓ，ヤング係数Eの真直な棒の両端A, Bを固定し、点Cに軸方向外力 P を作用させるとき、固定端に生じる反力R_A， R_Bを次の２通りの方法で求めよ。ただし、棒の断面積Aは一定とする。

①部分AC, BCの伸びをそれぞれΔ_1， Δ_2として、

力の釣合条件，フックの法則，変位の適合条件（$\Delta_1+\Delta_2=0$）

から求める方法。

②点 C の右向きの変位をΔとし、棒に蓄えられるひずみエネルギーU と〝カステリアーノの第１定理〟より求める方法。



【解答①】

力の釣合条件より、 $R_A+R_B-P=0$ …………①

また、部分AC, BCの軸方向力をそれぞれN_1， N_2とすると、

$N_1=R_A$ …………②

$N_2=-R_B$ …………③

次に、部分AC, BCの伸びをそれぞれΔ_1， Δ_2とすると、フックの法則と②，③式より、

$$N_1=EA\frac{\Delta_1}{a} \qquad \therefore \Delta_1=\frac{N_1}{EA}a=\frac{R_A}{EA}a \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

$$N_2=EA\frac{\Delta_2}{b} \qquad \therefore \Delta_2=\frac{N_2}{EA}b=-\frac{R_B}{EA}b \qquad \cdots\cdots\cdots⑤$$

さらに、変位の適合条件を考えると、両端は固定されて棒の長さは不変だから、

$\Delta_1+\Delta_2=0$ …………⑥

よって、⑥式に④，⑤式を代入して、

$$\Delta_1+\Delta_2=\frac{1}{EA}\left(R_A\cdot a-R_B\cdot b\right)=0 \qquad \therefore R_A\cdot a-R_B\cdot b=0 \qquad \therefore R_B=\frac{a}{b}R_A$$

これを①式に代入すると、

$$R_A+\frac{a}{b}R_A-P=\frac{a+b}{b}R_A-P=\frac{\ell}{b}R_A-P=0 \qquad \therefore \boxed{R_A=\frac{b}{\ell}P,\quad R_B=\frac{a}{\ell}P}$$

【解答②】

点Cの右向きの変位をΔとし、部分AC, BCの軸方向力をそれぞれN_1， N_2とすると、

$$N_1^2=\left(EA\frac{\Delta}{a}\right)^2 \qquad N_2^2=\left(EA\frac{\Delta}{b}\right)^2$$

このとき、棒に蓄えられるひずみエネルギーUは、次のようになる。

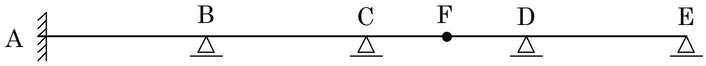
$$U=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{N_1^2}{EA}dx+\frac{1}{2}\int_0^b\frac{N_2^2}{EA}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{EA}\cdot\left(EA\frac{\Delta}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{EA}\cdot\left(EA\frac{\Delta}{b}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{EA}{a}\Delta^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{EA}{b}\Delta^2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot EA\Delta^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{ab}\cdot EA\Delta^2=\frac{EA\ell}{2ab}\cdot\Delta^2$$

〝カステリアーノの第１定理〟より、$\dfrac{\partial U}{\partial\Delta}=P$ すなわち、$\dfrac{\partial U}{\partial\Delta}=\dfrac{EA\ell}{ab}\Delta=P \qquad \therefore \Delta=\dfrac{ab}{EA\ell}P$

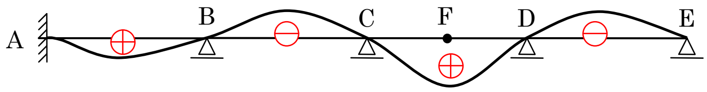
したがって、$\boxed{R_A=EA\dfrac{\Delta}{a}=\dfrac{b}{\ell}P,\quad R_B=EA\dfrac{\Delta}{b}=\dfrac{a}{\ell}P}$

【問題 MB-2】 **〝ミューラー・ブレスラウ(Müller-Breslau)の定理〟**を用いて、
下図に示す不静定ばりの F 点のたわみ v_F，せん断力 Q_F，曲げモーメント M_F と支点反力 R_A，R_B の影響線の概略を図示せよ。ただし、図中には、正負の符号を必ず明記すること。

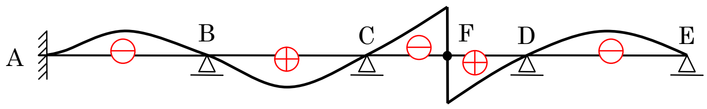


【解答】

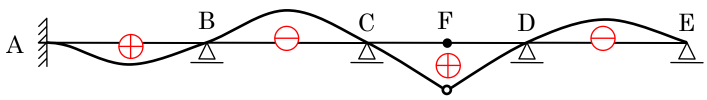
F 点のたわみ v_F



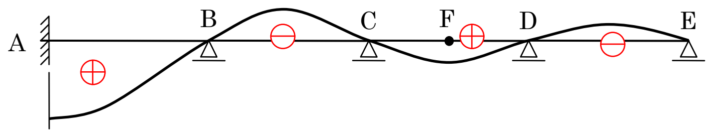
F 点のせん断力 Q_F



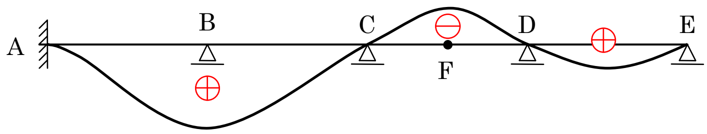
F 点の曲げモーメント M_F



支点反力 R_A

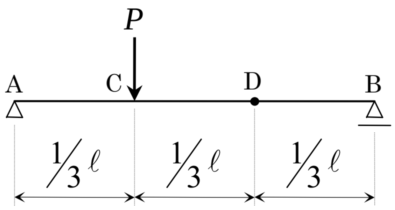


支点反力 R_B



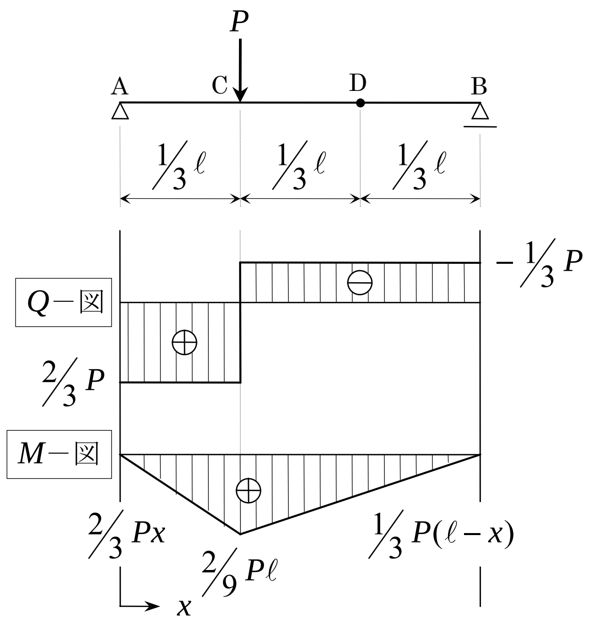
【問題 CP-2】下図に示す単純ばりの C 点に集中荷重 P が載荷されるとき、D 点の鉛直方向変位 v_D を次の２通りの方法で求めよ。ただし、はりの曲げ剛性は EI で一定とし、せん断力の影響は無視する。

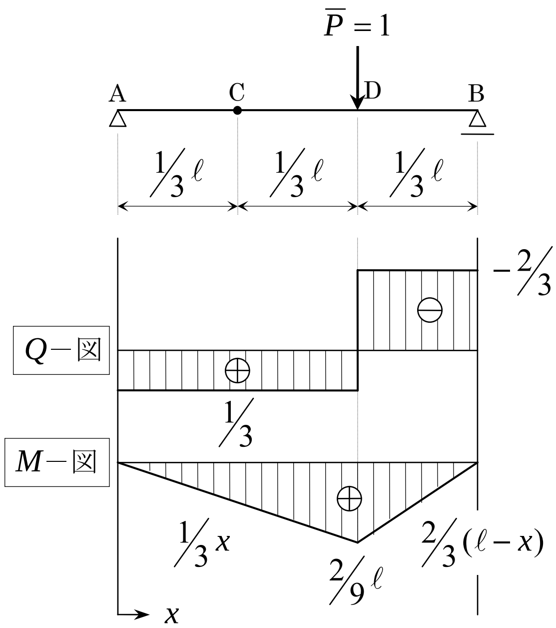
(1) 〝**単位荷重法**〟
(2) 〝**カステリアーノの第2定理**〟



【解答】(1) 〝**単位荷重法**〟による解答

実系と仮想系の断面力図を図示すると、下左図と下右図のようになる。





よって、D 点の鉛直方向変位 v_D は、次のように求められる。

$$1 \times v_D = \int_0^{\ell} \frac{M\delta M}{EI} dx$$

ここで、EI=*const* であるから、

$$EI \times v_D = \int_0^{\ell} M\delta M dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}\ell} \left(\frac{2}{3}Px\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) dx + \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell} \left(\frac{1}{3}P(\ell - x)\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) dx + \int_{\frac{2}{3}\ell}^{\ell} \left(\frac{1}{3}P(\ell - x)\right) \cdot \left(\frac{2}{3}(\ell - x)\right) dx$$

$$= \frac{2}{9}P \cdot \int_0^{\frac{1}{3}\ell} x^2 \, dx + \frac{1}{9}P \cdot \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell} (\ell x - x^2) \, dx + \frac{2}{9}P \cdot \int_{\frac{2}{3}\ell}^{\ell} (\ell - x)^2 \, dx$$

$$EI \times v_D = \frac{2}{9}P \cdot \frac{\frac{1}{27}\ell^3}{3} + \frac{1}{9}P \cdot \left\{ \ell \cdot \frac{\frac{4}{9}\ell^2}{2} - \frac{\frac{8}{27}\ell^3}{3} - \ell \cdot \frac{\frac{1}{9}\ell^2}{2} + \frac{\frac{1}{27}\ell^3}{3} \right\}$$

$$+\frac{2}{9}P \cdot \left\{ \ell^2 \cdot \ell - \ell \cdot \ell^2 + \frac{\ell^3}{3} - \ell^2 \cdot \frac{2}{3}\ell + \ell \cdot \frac{4}{9}\ell^2 - \frac{\frac{8}{27}\ell^3}{3} \right\}$$

$$EI \times v_D = \frac{2}{729}P\ell^3 + \frac{1}{9}P\ell^3 \cdot \left\{ \frac{2}{9} - \frac{8}{81} - \frac{1}{18} + \frac{1}{81} \right\} + \frac{2}{9}P\ell^3 \cdot \left\{ \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{81} \right\}$$

$$= \frac{2}{729}P\ell^3 + \frac{1}{9}P\ell^3 \cdot \frac{36-16-9+2}{162} + \frac{2}{9}P\ell^3 \cdot \frac{27-54+36-8}{81}$$

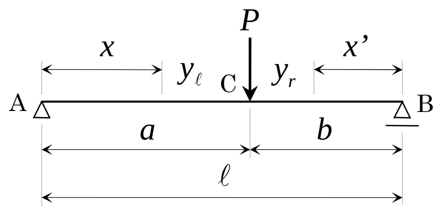
$$= \frac{2}{729}P\ell^3 + \frac{1}{9}P\ell^3 \cdot \frac{13}{162} + \frac{2}{9}P\ell^3 \cdot \frac{1}{81} = \frac{2}{729}P\ell^3 + \frac{13}{1458}P\ell^3 + \frac{2}{729}P\ell^3$$

$$= \frac{4+13+4}{1458}P\ell^3 = \frac{21}{1458}P\ell^3 = \frac{7}{486}P\ell^3$$

$$\therefore \boxed{v_D = \frac{7}{486} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}}$$

《たわみの公式による別解》

教科書 pp.194 表 8･1(b)によると、右図のような場合、そのたわみ曲線は次のように表される。



$$y_\ell = \frac{Pa^2b^2}{6EI\ell}\left(2\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2b}\right)$$

$$y_r = \frac{Pa^2b^2}{6EI\ell}\left(2\frac{x'}{b} + \frac{x'}{a} - \frac{x'^3}{ab^2}\right)$$

この y_r の式に、$a = \frac{1}{3}\ell, b = \frac{2}{3}\ell, x' = \frac{1}{3}\ell$ を代入して、D 点のたわみ v_D を求めると次のようになる。

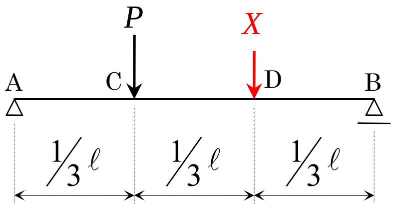
$$v_D = \frac{P\left(\frac{1}{3}\ell\right)^2\left(\frac{2}{3}\ell\right)^2}{6EI\ell}\left(2\frac{\frac{1}{3}\ell}{\frac{2}{3}\ell} + \frac{\frac{1}{3}\ell}{\frac{1}{3}\ell} - \frac{\frac{1}{27}\ell^3}{\frac{1}{3}\ell \cdot \frac{4}{9}\ell^2}\right) = \frac{4}{486} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}\left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1 - \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 27}\right)$$

$$= \frac{2}{243} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}\left(1 + 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{243} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{486} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore \boxed{v_D = \frac{7}{486} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}}$$

【解答】 (2) 〝カステリアーノの第2定理〟による解答

右図のように、D 点にも仮想の集中荷重 X が載荷されていると考えたとき、曲げモーメント M は次のように表される。

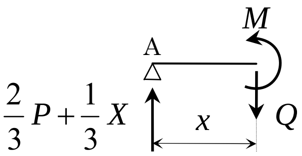


a) A～C 間　　$M=\left(\dfrac{2}{3}P+\dfrac{1}{3}X\right)x$

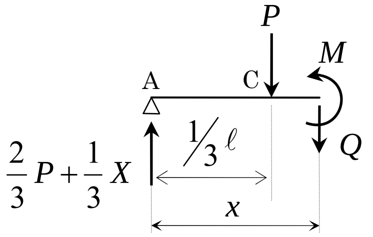
b) C～D 間

$$M=\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}X\right)x-P\left(x-\frac{1}{3}\ell\right)=\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)x+\frac{1}{3}P\ell$$

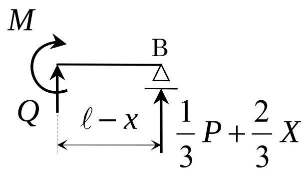
c) D～B 間　　$M=\left(\dfrac{1}{3}P+\dfrac{2}{3}X\right)(\ell-x)$



a) A～C 間



b) C～D 間



c) D～B 間

よって、このはりに蓄えられるひずみエネルギー U は、次のように表される。

$$U=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\frac{M^2}{EI}dx$$

ここで、EI=*const* であるから、

$$2EI\cdot U=\int_0^{\ell}M^2dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{3}\ell}\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}X\right)^2x^2dx+\int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell}\left\{\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)x+\frac{1}{3}P\ell\right\}^2dx+\int_{\frac{2}{3}\ell}^{\ell}\left(\frac{1}{3}P+\frac{2}{3}X\right)^2(\ell-x)^2dx$$

$$=\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}X\right)^2\int_0^{\frac{1}{3}\ell}x^2dx+\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)^2\int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell}x^2dx+\frac{2}{3}P\ell\cdot\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)\cdot\int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell}xdx$$

$$+\left(\frac{1}{3}P\ell\right)^2\int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell}dx+\left(\frac{1}{3}P+\frac{2}{3}X\right)^2\int_{\frac{2}{3}\ell}^{\ell}(\ell-x)^2dx$$

$$2EI\cdot U=\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}X\right)^2\cdot\frac{1}{81}\ell^3+\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)^2\cdot\frac{7}{81}\ell^3+\frac{2}{3}P\ell\cdot\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)\cdot\frac{1}{6}\ell^2$$

$$+\left(\frac{1}{3}P\ell\right)^2\cdot\frac{1}{3}\ell+\left(\frac{1}{3}P+\frac{2}{3}X\right)^2\cdot\frac{1}{81}\ell^3$$

$$\therefore\frac{2EI}{\ell^3}\cdot U=\frac{1}{81}\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}X\right)^2+\frac{7}{81}\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)^2+\frac{1}{9}P\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)+\frac{1}{27}P^2+\frac{1}{81}\left(\frac{1}{3}P+\frac{2}{3}X\right)^2$$

これを X で偏微分すると、〝カステリアーノの第2定理〟により、次のようになる。

$$\frac{2EI}{\ell^3}\cdot\frac{\partial U}{\partial X}=\frac{2EI}{\ell^3}\cdot v_D=\frac{1}{81}\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}X\right)\frac{2}{3}+\frac{7}{81}\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)\frac{2}{3}+\frac{1}{27}P+\frac{1}{81}\left(\frac{1}{3}P+\frac{2}{3}X\right)\frac{4}{3}$$

ここで、仮想の集中荷重 X は、X=0 だから、

$$\frac{2EI}{\ell^3}\cdot v_D=\frac{4}{729}P-\frac{14}{729}P+\frac{1}{27}P+\frac{4}{729}P=\frac{4-14+27+4}{729}P=\frac{21}{729}P=\frac{7}{243}P$$

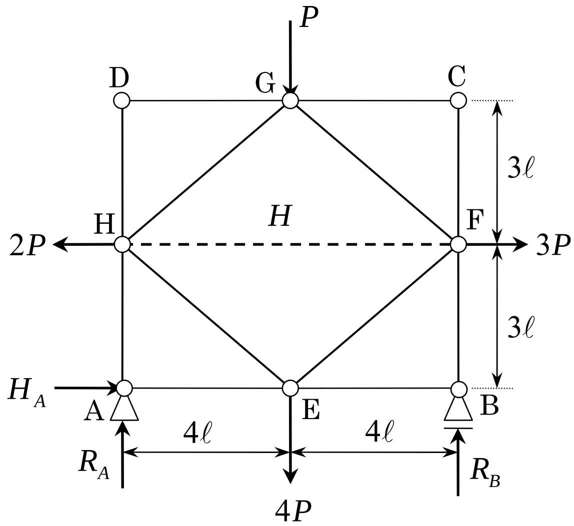
$$\therefore\boxed{v_D=\frac{7}{243}P\cdot\frac{\ell^3}{2EI}=\frac{7}{486}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

【１】下図に示す静定トラスについて、次の設問に答えよ。

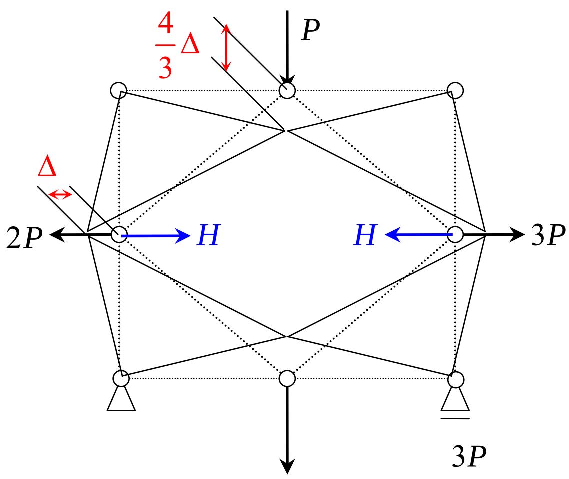
(1) 破線で表される部材の部材力 H を〝**仮想変位の原理**〟を用いて求めよ。
なお、解答用紙に記された図に、仮想変位による変位性状を明記すること。

(2) E 点の鉛直方向の変位 v_E を〝**単位荷重法**〟を用いて求めよ。

なお、全ての部材の引張剛性は、EA とする。
また、全ての部材力の計算結果は、解答用紙に記入せよ。



【解答】



(1) 右図に示すように、支持条件や幾何学的条件を満足する水平方向の仮想変位を Δ とすると、鉛直方向の仮想変位は $\frac{4}{3}\Delta$ となること、及び、力の方向と逆方向の仮想変位は〝負〟となることに注意して、〝仮想変位の原理〟を適用すると、次のようになる。

$$2P\cdot\Delta+3P\cdot\Delta+H\cdot(-\Delta)+H\cdot(-\Delta)$$
$$+P\cdot\frac{4}{3}\Delta+4P\cdot\left(-\frac{4}{3}\Delta\right)=0$$
$$\therefore 2P+3P-H-H+\frac{4}{3}P-\frac{16}{3}P=0$$
$$\therefore 5P-2H-4P=0 \qquad \therefore \boxed{H=\frac{1}{2}P}$$
」5 点

(2) **実系**の支点反力 R_A，H_A，R_B を求めると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合から、　$R_A+R_B=P+4P=5P$

水平方向の力の釣合から、　$H_A+3P=2P$　　$\therefore H_A=-P$

A 点回りのモーメントの釣合から、$R_B\times 8\ell+2P\times 3\ell=P\times 4\ell+3P\times 3\ell+4P\times 4\ell$

$$\therefore 8R_B=23P \qquad \therefore R_B=\frac{23}{8}P \qquad よって\ R_A=5P-R_B=5P-\frac{23}{8}P=\frac{17}{8}P$$

さらに、〝節点法〟を用いて、**実系**の全ての部材力を求めると下左図のようになる。

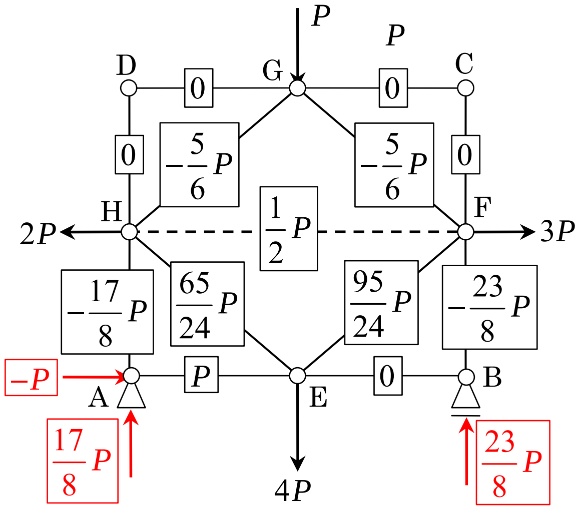
次に、E 点に単位荷重 $\overline{P}=1$ のみを鉛直方向に載荷させた**仮想系**を考え、これの全ての部材力を求める。

まず、(1) と同様な方法で、部材 HF の部材力 $\overline{H}$ を求めると、

$$\overline{H}\cdot(-\Delta)+\overline{H}\cdot(-\Delta)+\overline{P}\cdot\left(-\frac{4}{3}\Delta\right)=0 \qquad \therefore \overline{H}+\overline{H}+\frac{4}{3}\overline{P}=0$$

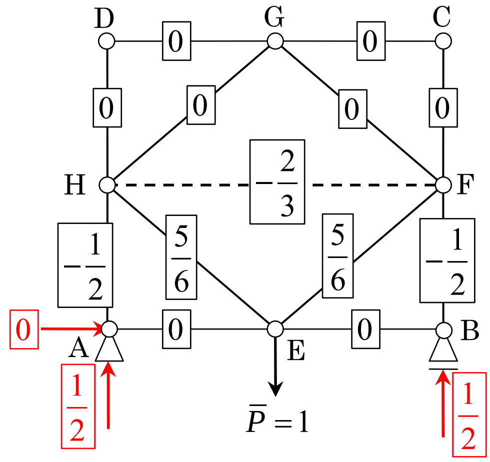
$$\therefore 2\bar{H} = -\frac{4}{3}\bar{P} \qquad \therefore \bar{H} = -\frac{2}{3}\bar{P} = -\frac{2}{3}$$

さらに、〝節点法〟を用いて、**仮想系**の全ての部材力を求めると下右図のようになる。



【実系】

」10 点



【仮想系】

」5 点

したがって、〝単位荷重法〟を用いて、E 点の鉛直方向の変位 v_E を求めると、次のようになる。

$$1 \times v_E = \sum \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} \ell_{ij}$$

$$= \frac{1}{EA}\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}P\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\times 2\times 4\ell + \left(-\frac{17}{8}P\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\times 3\ell + \left(-\frac{23}{8}P\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\times 3\ell \\ &+\left(\frac{65}{24}P\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\times 5\ell + \left(\frac{95}{24}P\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\times 5\ell\end{aligned}\right\}$$

$$= \frac{1}{EA}\left\{-\frac{8}{3}P\ell + \frac{51}{16}P\ell + \frac{69}{16}P\ell + \frac{1625}{144}P\ell + \frac{2375}{144}P\ell\right\} = \frac{1}{EA}\left\{-\frac{8}{3}P\ell + \frac{15}{2}P\ell + \frac{250}{9}P\ell\right\}$$

$$= \frac{P\ell}{EA}\cdot\frac{-144+405+1500}{54} = \frac{1761}{54}\cdot\frac{P\ell}{EA} = \frac{587}{18}\cdot\frac{P\ell}{EA}$$

$$\therefore \boxed{v_E = \frac{587}{18}\cdot\frac{P\ell}{EA}}$$ 」10 点

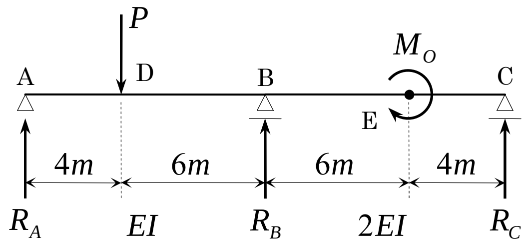
【問題 3M-1】下図に示す１次不静定ばりについて、次の設問に答えよ。

なお、A～B, B～C 間の曲げ剛性は、それぞれ EI , $2EI$ とする。また、支点沈下はないものとする。

(1) **〝３連モーメントの定理〟**を用いて、B 点の支点曲げモーメント M_B を求めよ。

(2) 支点反力 R_A， R_B， R_C を求めよ。

(3) 曲げモーメント図（M－図）とせん断力図（Q－図）を図示せよ。



【解答】

(1) A,B,C 点の支点曲げモーメントをそれぞれ M_A, M_B, M_C として、〝３連モーメントの定理〟の式を適用すると、支点沈下はないので、部材回転角： $R_n=R_{n+1}=0$ だから、次のようになる。

$$\frac{10m}{I}M_A+2\cdot\left(\frac{10m}{I}+\frac{10m}{2I}\right)\cdot M_B+\frac{10m}{2I}M_C=-6\cdot\left(\frac{\overline{A}_0}{I}+\frac{\overline{B}_0}{2I}\right)$$

荷重項については、表を参照すると、

$$\overline{A}_0=\frac{P\ell^2}{6}\cdot\left(\frac{a}{\ell}-\frac{a^3}{\ell^3}\right)=\frac{P\cdot 10^2}{6}\cdot\left(\frac{4}{10}-\frac{4^3}{10^3}\right)=\frac{P}{6}\cdot\left(40-\frac{4^3}{10}\right)=\frac{P}{6}\cdot\frac{400-64}{10}=\frac{P}{6}\cdot\frac{336}{10}=\frac{56}{10}P=\frac{28}{5}P$$

$$\overline{B}_0=-M\cdot\frac{\ell}{6}\cdot\left(1-3\frac{b^2}{\ell^2}\right)=-M_O\cdot\frac{10}{6}\cdot\left(1-3\frac{4^2}{10^2}\right)=-M_O\cdot\frac{10}{6}\cdot\frac{100-48}{100}=-M_O\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{52}{100}=-\frac{13}{15}M_O$$

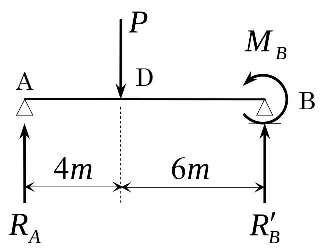
であり、また、A,C 点の支点曲げモーメントは、 $M_A=M_C=0$ であるから、

$$2\cdot\left(\frac{10}{I}+\frac{10}{2I}\right)\cdot M_B=-6\cdot\left(\frac{28P}{5I}-\frac{13M_O}{30I}\right)\qquad\therefore 2\cdot\left(10+\frac{10}{2}\right)\cdot M_B=-6\cdot\left(\frac{28}{5}P-\frac{13}{30}M_O\right)$$

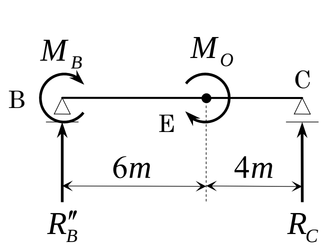
$$\therefore 15M_B=-\frac{84}{5}P+\frac{13}{10}M_O\qquad\therefore M_B=-\frac{84}{75}P+\frac{13}{150}M_O=-\frac{28}{25}P+\frac{13}{150}M_O$$

よって、 $\boxed{M_B=-\frac{28}{25}P+\frac{13}{150}M_O}$

(2) １次不静定ばりを下図に示すように〝左スパン〟と〝右スパン〟に分解して考える。



〝左スパン〟



〝右スパン〟

まず、〝左スパン〟について解く。

鉛直方向の力の釣合から、 $R_A+R'_B=P$

B 点回りのモーメントの釣合から、 $R_A\times 10m=P\times 6m+M_B$

$$\therefore 10R_A=6P+\left(-\frac{28}{25}P+\frac{13}{150}M_O\right)=\frac{150-28}{25}P+\frac{13}{150}M_O=\frac{122}{25}P+\frac{13}{150}M_O$$

$$\therefore R_A=\frac{61}{125}P+\frac{13}{1500}M_O$$

よって、$R_B' = P - R_A = P - \left(\frac{61}{125}P + \frac{13}{1500}M_O\right) = \frac{64}{125}P - \frac{13}{1500}M_O$

次に、〝右スパン〟について解く。

鉛直方向の力の釣合から、　$R_B'' + R_C = 0$

B 点回りのモーメントの釣合から、　$R_C \times 10m = M_B + M_O$

$$\therefore 10R_C = \left(-\frac{28}{25}P + \frac{13}{150}M_O\right) + M_O = -\frac{28}{25}P + \frac{163}{150}M_O \qquad \therefore R_C = -\frac{14}{125}P + \frac{163}{1500}M_O$$

よって、$R_B'' = -R_C = \frac{14}{125}P - \frac{163}{1500}M_O$

したがって、

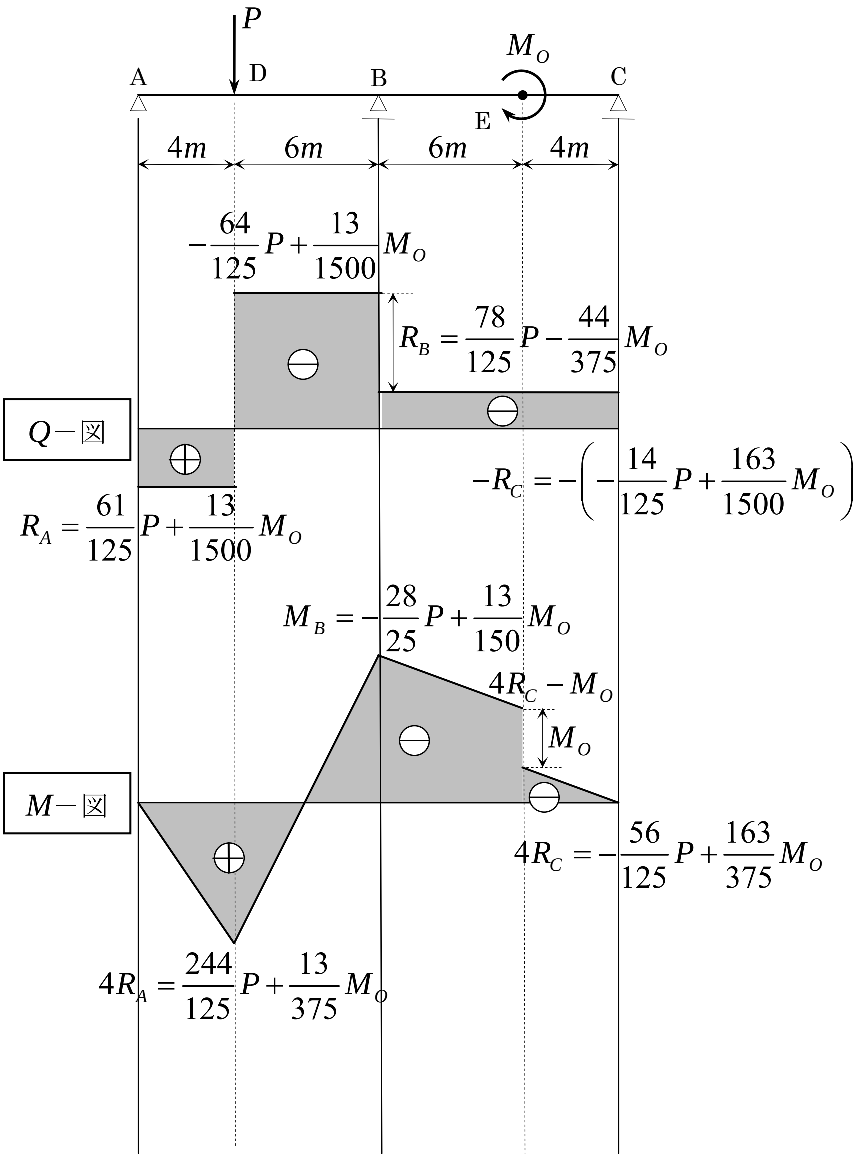
$$R_B = R_B' + R_B'' = \left(\frac{64}{125}P - \frac{13}{1500}M_O\right) + \left(\frac{14}{125}P - \frac{163}{1500}M_O\right)$$

$$= \frac{64+14}{125}P - \frac{13+163}{1500}M_O = \frac{78}{125}P - \frac{176}{1500}M_O = \frac{78}{125}P - \frac{44}{375}M_O$$

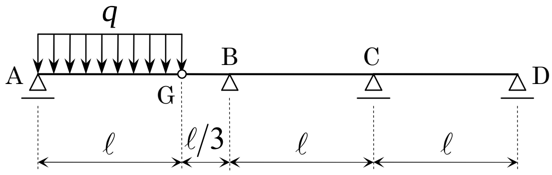
以上をまとめると、

$$\boxed{R_A = \frac{61}{125}P + \frac{13}{1500}M_O}, \quad \boxed{R_B = \frac{78}{125}P - \frac{44}{375}M_O}, \quad \boxed{R_C = -\frac{14}{125}P + \frac{163}{1500}M_O}$$

⑶ 曲げモーメント図（Mー図）とせん断力図（Qー図）を図示すると、下図のようになる。



【問題 3M-8】下図に示す中間ヒンジをもつ不静定ばりを **〝３連モーメントの定理〟** を用いて解き、支点曲げモーメント M_B， M_C を求めよ。ただし、はりの曲げ剛性は EI で一定とする。また、支点沈下はないものとする。

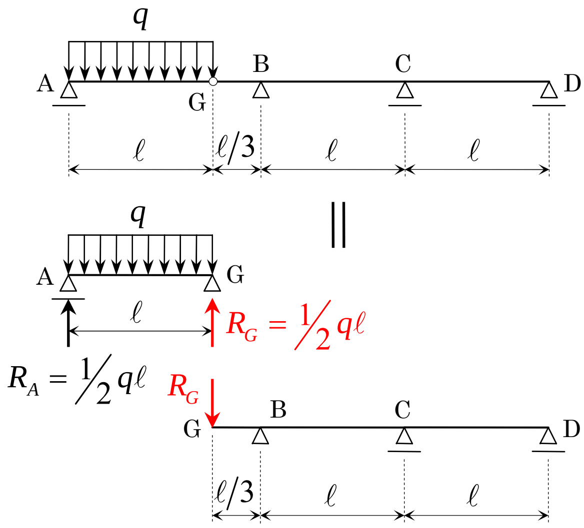


【解答】

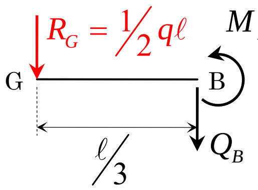
中間ヒンジをもつ不静定ばりは、右図のように、

- 単純ばり
- 張出部をもつ不静定ばり

に分解され、G 点でのせん断力のみが伝達される構造となる。



張出部について、モーメントの釣合を考えると、



$$M_B + \frac{1}{2}q\ell \cdot \frac{\ell}{3} = 0$$

$$\therefore \boxed{M_B = -\frac{1}{6}q\ell^2}$$

次に、$B-C-D$ 間に〝３連モーメントの定理〟を適用すると、中間荷重・支点沈下とも存在しないので、

$$M_B + 4M_C + M_D = 0$$

ここで、 $M_D = 0$ だから、 $M_B + 4M_C = 0$ となり、 $\boxed{M_C = -\frac{1}{4}M_B = \frac{1}{24}q\ell^2}$