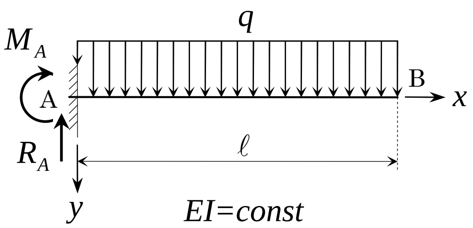
【問題 BD4-CL-1】下図に示す曲げ剛性 EI が一定で、A 点固定の“片持ばり”について、次の設問に答えよ。

(1) 支点反力 M_A， R_A を求めよ。

(2) せん断力 $Q(x)$、曲げモーメント $M(x)$ の式を求め、次に、断面力図、すなわち、せん断力図（Q－図）、曲げモーメント図（M－図）を図示せよ。

(3) はりの変形の基本式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$ を用いて、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ を求めよ。

(4) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を用いて、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ を求めよ。

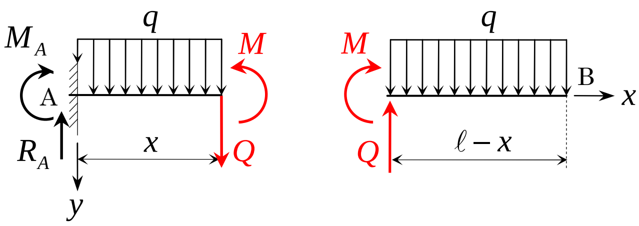


【解答】

(1) 鉛直方向の力の釣合より、$\boxed{R_A=q\ell}$

A 点回りのモーメントの釣合より、$M_A+q\ell\times\dfrac{\ell}{2}=0$ $\quad\therefore\boxed{M_A=-\dfrac{1}{2}q\ell^2}$

(2) A 点から距離 x の点ではりを切断すると、下図のようになる。



左自由体について、釣合を考えると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合より、$Q+q\cdot x=R_A$ $\quad\therefore Q(x)=q\cdot\ell-q\cdot x=q\cdot(\ell-x)$

切断点回りのモーメントの釣合より、

$$M+q\cdot x\cdot\frac{x}{2}=M_A+R_A\cdot x\ \therefore M(x)=-q\cdot\frac{x^2}{2}+q\ell\cdot x-\frac{1}{2}q\ell^2=-\frac{q}{2}(\ell-x)^2$$

右自由体について、釣合を考えると、次のようになる。

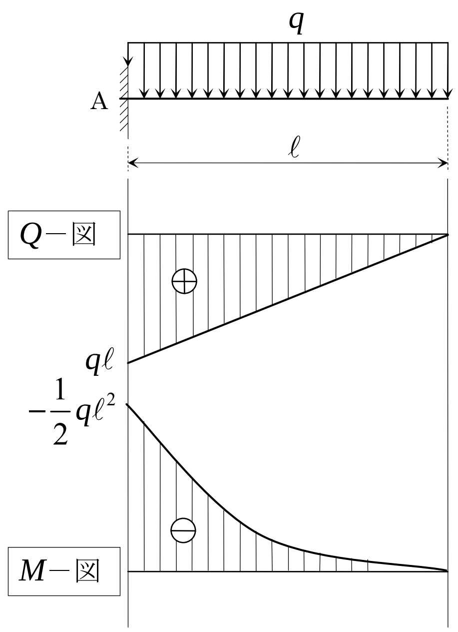
鉛直方向の力の釣合より、$Q=q\cdot(\ell-x)$ $\quad\therefore Q(x)=q\cdot(\ell-x)$

切断点回りのモーメントの釣合より、$M+q\cdot(\ell-x)\cdot\dfrac{\ell-x}{2}=0$ $\quad\therefore M(x)=-\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2$

よって、せん断力 $Q(x)$、曲げモーメント $M(x)$ の式は、次のようになる。

$\boxed{Q(x)=q\cdot(\ell-x)}$, $\boxed{M(x)=-\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2}$

次に、断面力図、即ち、せん断力図（Q－図）、曲げモーメント図（M－図）を図示すると、下図のようになる。



(3) はりの変形の基本式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$ を変形すると、$EI\dfrac{d^2y}{dx^2}=-M$ となり、これに(2)の曲げモーメント $M(x)$ の式を代入すると、$EI\dfrac{d^2y}{dx^2}=q\cdot\dfrac{x^2}{2}-q\ell\cdot x+\dfrac{1}{2}q\ell^2=\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2$ となる。

《解法Ⅰ》

$EIy''=q\cdot\dfrac{x^2}{2}-q\ell\cdot x+\dfrac{1}{2}q\ell^2$ を用いて、逐次積分すると、

$$EIy'=q\cdot\frac{x^3}{6}-q\ell\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{q\ell^2}{2}x+C_1 \qquad EIy=q\cdot\frac{x^4}{24}-q\ell\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{q\ell^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1, C_2 を求める。

①$x=0$ で、たわみがゼロ、即ち、$y=0$ より、　$C_2=0$

②$x=0$ で、たわみ角がゼロ、即ち、$y'=0$ より、　$C_1=0$

よって、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ は、次のようになる。

$$EIy'=q\cdot\frac{x^3}{6}-q\ell\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{q\ell^2}{2}x \qquad EIy=q\cdot\frac{x^4}{24}-q\ell\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{q\ell^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$\boxed{\therefore\begin{cases}\theta(x)=y'(x)=\dfrac{q}{6EI}x^3-\dfrac{q}{2EI}\ell x^2+\dfrac{q}{2EI}\ell^2x=\dfrac{q\ell^3}{6EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3-3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2+3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right\}\\ y(x)=\dfrac{q}{24EI}x^4-\dfrac{q}{6EI}\ell x^3+\dfrac{q}{4EI}\ell^2x^2=\dfrac{q\ell^4}{24EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^4-4\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3+6\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right\}\end{cases}}$$

《解法Ⅱ》

$EIy''=\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2$ を用いて、逐次積分すると、

$$EIy'=\frac{q}{2}\cdot\left\{-\frac{(\ell-x)^3}{3}\right\}+C_1 \qquad EIy=\frac{q}{2}\cdot\left\{\frac{(\ell-x)^4}{12}\right\}+C_1x+C_2$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1, C_2 を求める。

①$x=0$ で、たわみがゼロ、即ち、$y=0$ より、　$\dfrac{q}{2}\cdot\dfrac{\ell^4}{12}+C_2=0$　$\therefore C_2=-\dfrac{q\ell^4}{24}$

②$x=0$で、たわみ角がゼロ、即ち、$y'=0$より、　$-\frac{q}{2}\cdot\frac{\ell^3}{3}+C_1=0$　$\therefore C_1=\frac{q\ell^3}{6}$

よって、たわみ角$\theta(x)$とたわみの式$y(x)$は、次のようになる。

$$EIy'=-\frac{q(\ell-x)^3}{6}+\frac{q\ell^3}{6}=\frac{q}{6}\cdot\left\{\ell^3-(\ell-x)^3\right\}=\frac{q\ell^3}{6}\cdot\left\{1-\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^3\right\}$$

$$EIy=\frac{q}{2}\cdot\left\{\frac{(\ell-x)^4}{12}\right\}+\frac{q\ell^3}{6}x-\frac{q\ell^4}{24}=\frac{q\ell^4}{24}\cdot\left\{\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^4+4\left(\frac{x}{\ell}\right)-1\right\}$$

$$\boxed{\therefore\begin{cases}\theta(x)=y'(x)=\dfrac{q\ell^3}{6EI}\left\{1-\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)^3\right\}\\[2ex] y(x)=\dfrac{q\ell^4}{24EI}\left\{\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)^4+4\left(\dfrac{x}{\ell}\right)-1\right\}\end{cases}}$$

(4) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式$EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=qx+C_1$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1，C_2，C_3，C_4を求める。

①$x=0$で、たわみ角がゼロ、即ち、$y'=0$より、　$C_3=0$

②$x=0$で、たわみがゼロ、即ち、$y=0$より、　$C_4=0$

③$x=\ell$で、せん断力がゼロ、即ち、$y'''=0$より、　$q\ell+C_1=0$　　$\therefore C_1=-q\ell$

④$x=\ell$で、曲げモーメントがゼロ、即ち、$y''=0$より、$\frac{q}{2}\ell^2-q\ell^2+C_2=0$　　$\therefore C_2=\frac{q}{2}\ell^2$

よって、たわみ角$\theta(x)$とたわみの式$y(x)$は、次のようになる。

$$EIy'''=qx-q\ell$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2-q\ell x+\frac{q}{2}\ell^2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3-\frac{q}{2}\ell x^2+\frac{q}{2}\ell^2x$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4-\frac{q}{6}\ell x^3+\frac{q}{4}\ell^2x^2$$

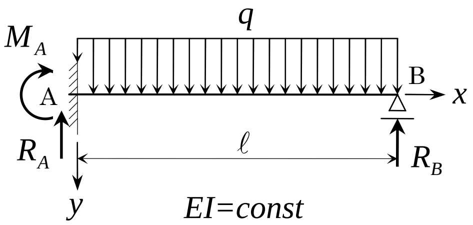
$$\boxed{\therefore\begin{cases}\theta(x)=y'(x)=\dfrac{q}{6EI}x^3-\dfrac{q}{2EI}\ell x^2+\dfrac{q}{2EI}\ell^2x\\[1ex] \qquad=\dfrac{q\ell^3}{6EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3-3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2+3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right\}\\[2ex] y(x)=\dfrac{q}{24EI}x^4-\dfrac{q}{6EI}\ell x^3+\dfrac{q}{4EI}\ell^2x^2\\[1ex] \qquad=\dfrac{q\ell^4}{24EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^4-4\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3+6\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right\}\end{cases}}$$

【問題 BD4-B-1A】下図に示す曲げ剛性 EI が一定で、“A 点固定、B 点単純支持のはり”について、次の設問に答えよ。

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を用いて、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ を求めよ。

(2) 支点反力 M_A, R_A, R_B を求めよ。

(3) せん断力 $Q(x)$、曲げモーメント $M(x)$ の式を求め、次に、断面力図、すなわち、せん断力図（Q－図）、曲げモーメント図（M－図）を図示せよ。



【解答】

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=qx+C_1$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1, C_2, C_3, C_4 を求める。

(a) $x=0$ のとき、$y'=0$ より、　$C_3=0$

(b) $x=0$ のとき、$y=0$ より、　$C_4=0$

(c) $x=\ell$ のとき、$y''=0$ より、　$\dfrac{q}{2}\ell^2+C_1\ell+C_2=0$　………①

(d) $x=\ell$ のとき、$y=0$ より、　$\dfrac{q}{24}\ell^4+\dfrac{C_1}{6}\ell^3+\dfrac{C_2}{2}\ell^2=0$　………②

①を変形すると、　$C_1\ell+C_2=-\dfrac{q}{2}\ell^2$　………①’

②を変形すると、　$C_1\ell+3C_2=-\dfrac{q}{4}\ell^2$　………②’

①’－②’より、　$-2C_2=-\dfrac{q}{4}\ell^2$　　$\therefore C_2=\dfrac{1}{8}q\ell^2$

これを①’に代入すると、　$C_1\ell=-\dfrac{q}{2}\ell^2-\dfrac{1}{8}q\ell^2=-\dfrac{5}{8}q\ell^2$　　$\therefore C_1=-\dfrac{5}{8}q\ell$

よって、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ は、次のようになる。

$$EIy''' = qx - \frac{5}{8}q\ell$$

$$EIy'' = \frac{q}{2}x^2 - \frac{5}{8}q\ell x + \frac{1}{8}q\ell^2$$

$$EIy' = \frac{q}{6}x^3 - \frac{5}{16}q\ell x^2 + \frac{1}{8}q\ell^2 x$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 - \frac{5}{48}q\ell x^3 + \frac{1}{16}q\ell^2 x^2$$

$$\boxed{\therefore\left\{\begin{aligned} \theta(x) = y'(x) &= \frac{q}{6EI}x^3 - \frac{5}{16EI}q\ell x^2 + \frac{1}{8EI}q\ell^2 x \\ &= \frac{q\ell^3}{48EI}\left\{8\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 15\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 6\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\} \\ y(x) &= \frac{q}{24EI}x^4 - \frac{5}{48EI}q\ell x^3 + \frac{1}{16EI}q\ell^2 x^2 \\ &= \frac{q\ell^4}{48EI}\left\{2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 5\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\} \end{aligned}\right.}$$

(2) 次に、支点反力 M_A, R_A, R_B を求めると、以下のようになる。

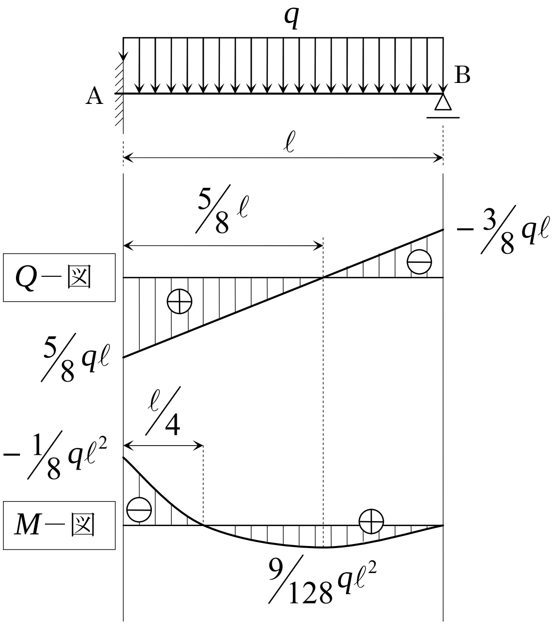
$M_A = -EIy''$ より、 $$M_A = -EIy''\big|_{x=0} = -\frac{1}{8}q\ell^2$$

$Q = -EIy'''$ より、 $$R_A = Q_A = -EIy'''\big|_{x=0} = \frac{5}{8}q\ell$$

また、 $$-R_B = Q_B = -EIy'''\big|_{x=\ell} = -q\ell + \frac{5}{8}q\ell = -\frac{3}{8}q\ell$$

以上より、 $\boxed{M_A = -\frac{1}{8}q\ell^2}$ $\boxed{R_A = \frac{5}{8}q\ell}$ $\boxed{R_B = \frac{3}{8}q\ell}$

(3) さらに、せん断力図（Q−図）、曲げモーメント図（M−図）を図示すると、下図のようになる。



曲げモーメントの最大値を求めると、

$$M_{\max} = -EIy''\big|_{x=\frac{5}{8}\ell}$$

$$= -\frac{q}{2}\cdot\frac{25}{64}\ell^2 + \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\ell - \frac{1}{8}q\ell^2$$

$$= \left(-\frac{25}{128} + \frac{25}{64} - \frac{1}{8}\right)\cdot q\ell^2$$

$$= \frac{-25+50-16}{128}q\ell^2$$

$$= \frac{9}{128}q\ell^2$$

$M = -EIy'' = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{5}{8}q\ell x - \frac{1}{8}q\ell^2 = 0$ を解くと、

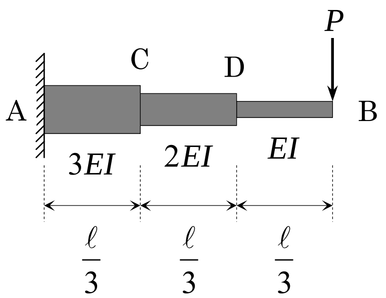
$$-4x^2 + 5\ell x - \ell^2 = 0$$

$$\therefore 4x^2 - 5\ell x + \ell^2 = 0$$

$$\therefore (4x-\ell)(x-\ell) = 0$$

$$\therefore x = \frac{\ell}{4},\quad x = \ell$$

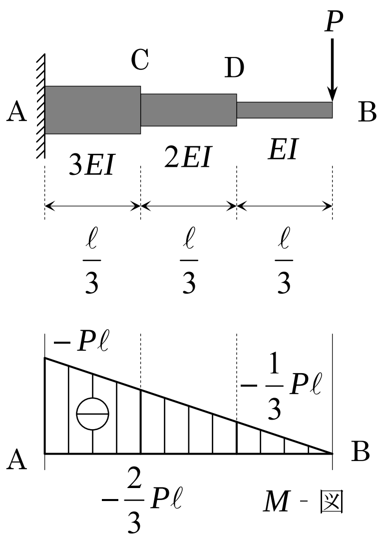
【問題 EL-HCL-2】〝弾性荷重法〟により、下図に示すような“変断面片持ばり AB”の自由端 B のたわみ v_B を求めよ。なお、“変断面片持ばり AB”の曲げ剛性は、A～C 間，C～D 間，D～B 間でそれぞれ $3EI$，$2EI$ ，EI である。

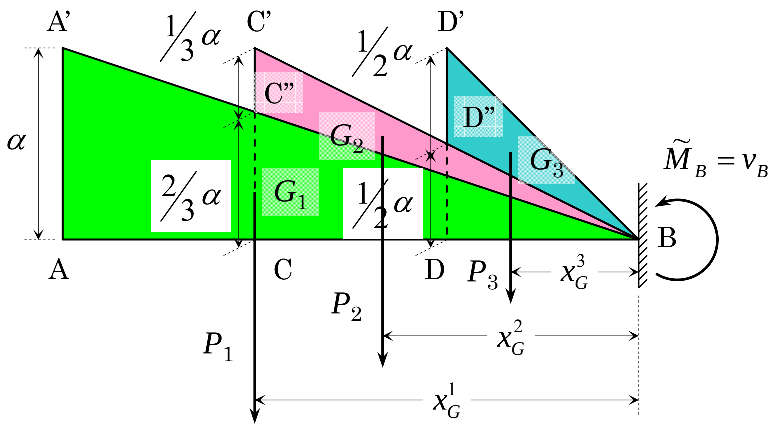


【解答】

まず、変断面片持ばりの曲げモーメント図は、下左図のようになる。

次に、〝モールの定理〟より、〝共役ばり〟に〝弾性荷重〟を載荷したものは下右図のようになり、これについて支点曲げモーメント $\widetilde{M}_B = v_B$ を求めればよいことになる。なお、ここに $-\dfrac{P\ell}{3EI} = \alpha$ とする。





ここで、

$$P_1 = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad x_G^1 = \frac{2}{3}\ell$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{1}{9}\alpha\ell \qquad x_G^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{4}{9}\ell$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\ell}{3} = \frac{1}{12}\alpha\ell \qquad x_G^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\ell = \frac{2}{9}\ell$$

であるから、モーメントの釣合から、次のようになる。

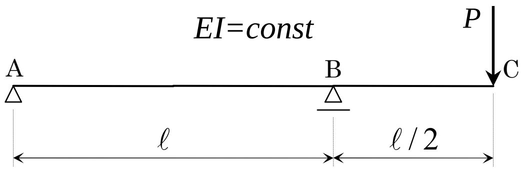
$$\widetilde{M}_B + P_1\cdot x_G^1 + P_2\cdot x_G^2 + P_3\cdot x_G^3 = 0$$

$$\therefore -\widetilde{M}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell\cdot\frac{2}{3}\ell + \frac{1}{9}\alpha\ell\cdot\frac{4}{9}\ell + \frac{1}{12}\alpha\ell\cdot\frac{2}{9}\ell = \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{81}+\frac{1}{54}\right)\cdot\alpha\ell^2 = \frac{54+8+3}{162}\alpha\ell^2 = \frac{65}{162}\alpha\ell^2$$

$$\therefore v_B = \widetilde{M}_B = -\frac{65}{162}\alpha\ell = -\frac{65}{162}\cdot\left(-\frac{P\ell}{3EI}\right)\cdot\ell^2 = \frac{65}{486}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

よって、$\boxed{v_B = \dfrac{65}{486}\cdot\dfrac{P\ell^3}{EI}}$

【問題 EL-OB-1】下図に示す“張出ばり”の C 点のたわみ角 θ_C とたわみ y_C を求めよ。ただし、はりの曲げ剛性は EI で一定とする。



【解答】

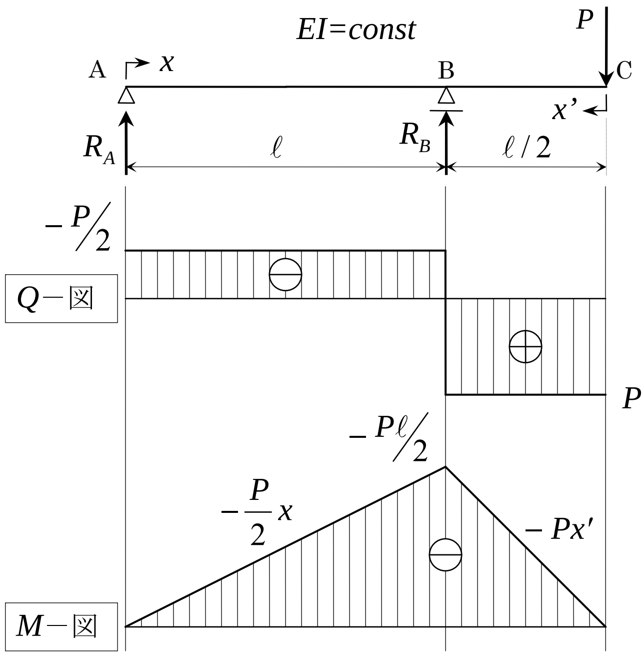
支点反力を R_A， R_B とすると、

$$R_A + R_B = P$$

$$R_B \cdot \ell = P \cdot \left(\ell + \frac{\ell}{2} \right)$$

$$\therefore R_B = \frac{3}{2}P \quad R_A = -\frac{1}{2}P$$

これより、断面力図は、右図のようになる。



次に、〝弾性荷重〟（＝曲げモーメント／曲げ剛性）を求めると、

$$\alpha = -\frac{P\ell}{2EI}$$

また、「張出ばり」の〝共役ばり〟を考えると、

A 点…回転支点　→　回転支点

$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} = 0 \\ \tilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$

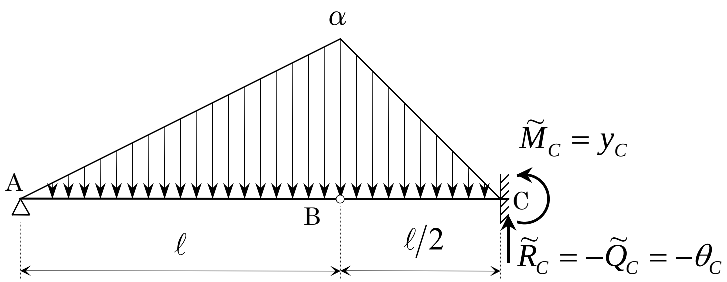
B 点…移動支点　→　ヒンジ

$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta_\ell = \theta_r \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} = 0 \\ \tilde{Q}_\ell = \tilde{Q}_r \end{pmatrix}$$

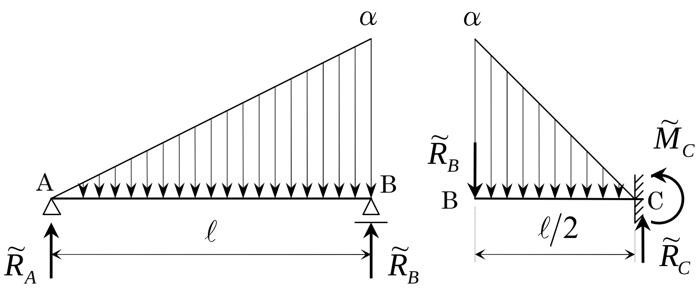
C 点…自由端　→　固定端

$$\begin{pmatrix} y \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{M} \neq 0 \\ \tilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$

となるから、〝弾性荷重〟を載荷した〝共役ばり〟は、右図のようになる。



これを下図のように「単純ばり」と「片持ばり」に分解して考える。



このとき、支点反力 $\tilde{R}_A$， $\tilde{R}_B$， $\tilde{R}_C$， $\tilde{M}_C$ は、「単純ばり」部分と「片持ばり」部分での釣合条件から次のように求まる。

「単純ばり」部分より、

$$\tilde{R}_A + \tilde{R}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad \tilde{R}_B \cdot \ell = \frac{1}{2}\alpha\ell \cdot \frac{2}{3}\ell = \frac{1}{3}\alpha\ell^2 \qquad \therefore \tilde{R}_B = \frac{1}{3}\alpha\ell, \quad \tilde{R}_A = \frac{1}{6}\alpha\ell$$

「片持ばり」部分より、

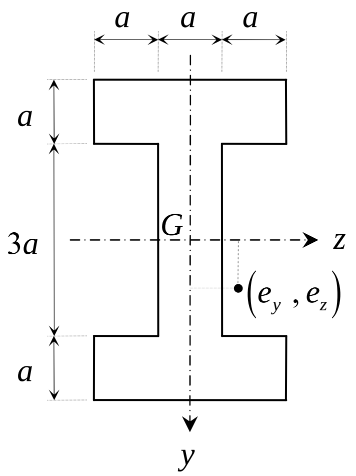
$$\tilde{R}_C = \tilde{R}_B + \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}\alpha\ell + \frac{1}{4}\alpha\ell = \frac{7}{12}\alpha\ell \qquad \therefore \boxed{\theta_C = -\tilde{R}_C = -\frac{7}{12}\cdot\left(-\frac{P\ell}{2EI}\right)\cdot\ell = \frac{7}{24}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}}$$

$$\tilde{M}_C + \tilde{R}_B \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\ell}{2}\cdot\left(\frac{\ell}{2}\cdot\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\therefore -\tilde{M}_C = \frac{1}{3}\alpha\ell \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{12}\alpha\ell^2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)\cdot\alpha\ell^2 = \frac{1}{4}\alpha\ell^2$$

$$\therefore \boxed{y_C = \tilde{M}_C = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{P\ell}{2EI}\right)\cdot\ell^2 = \frac{P\ell^3}{8EI}}$$

【問題 CM-CS-1a】下図に示す“Ｉ型断面”の〝断面の核〟を求め、図示せよ。



【解答】
図に示すように、重心 G を通る y, z 軸は主軸となるから、y, z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_z は、次のようになる。

$$I_y = \frac{3a \cdot a^3}{12} + \frac{a \cdot (3a)^3}{12} \times 2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{2}\right) \cdot a^4 = \frac{19}{4} a^4$$

$$I_z = \frac{a \cdot (3a)^3}{12} + 2 \cdot 3a \cdot a \cdot \left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{3a \cdot a^3}{12} \times 2$$

$$= \frac{9}{4}a^4 + 6 \cdot 4a^4 + \frac{1}{2}a^4 = (\frac{9}{4} + 24 + \frac{1}{2}) \cdot a^4 = \frac{9 + 96 + 2}{4}a^4 = \frac{107}{4}a^4$$

《別解》

$$I_z = \frac{3a \cdot (5a)^3}{12} - \frac{2a \cdot \left(3a\right)^3}{12} = \frac{125}{4}a^4 - \frac{9}{2}a^4 = \frac{125 - 18}{4}a^4 = \frac{107}{4}a^4$$

また、断面積 A は、$A = 3a^2 \times 2 + 3a^2 = 9a^2$ だから、y, z 軸に関する回転半径をそれぞれ r_y, r_z とすると、

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{19}{4}a^4}{9a^2} = \frac{19}{36}a^2 \qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{107}{4}a^4}{9a^2} = \frac{107}{36}a^2$$

ここで、載荷荷重の偏心位置を $\left(e_y , e_z\right)$ とすると、中立軸は、$1 + \frac{e_y}{r_z^2}y + \frac{e_z}{r_y^2}z = 0$ と表され、中立軸が y, z 軸と交わる点すなわち切片 n_y, n_z は、次のようになる。

$$n_y = -\frac{r_z^2}{e_y}, \quad n_z = -\frac{r_y^2}{e_z} \qquad \text{逆に、} \qquad e_y = -\frac{r_z^2}{n_y}, \quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z}$$

よって、〝断面の核〟の端の位置を決めるためには、中立軸が次の２通り（４通り）の限界位置にある場合について、載荷荷重の偏心位置を $\left(e_y , e_z\right)$ を求めればよい。

⑴中立軸が $y=\pm\dfrac{5}{2}a$ となるとき、切片は、$n_y=\pm\dfrac{5}{2}a$, $n_z=\pm\infty$ となるから、

$$e_y=-\frac{r_z^2}{n_y}=-\frac{\frac{107}{36}a^2}{\pm\frac{5}{2}a}=\mp\frac{107}{36}\cdot\frac{2}{5}=\mp\frac{107}{90}a$$

$$e_z=-\frac{r_y^2}{n_z}=-\frac{\frac{19}{36}a^2}{\pm\infty}=0$$

$$\therefore\left(e_y\ ,e_z\right)=\left(\mp\frac{107}{90}a\ ,0\right)$$

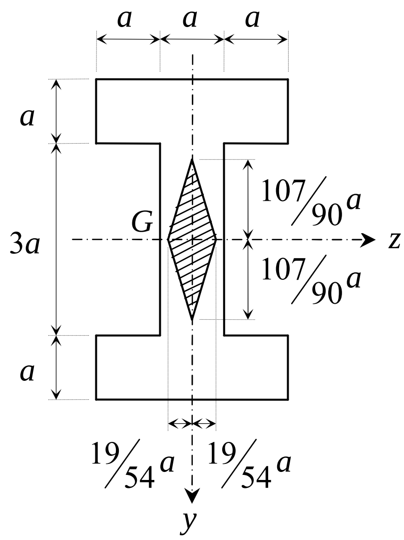
⑵中立軸が $z=\pm\dfrac{3}{2}a$ となるとき、切片は、$n_y=\pm\infty$, $n_z=\pm\dfrac{3}{2}a$ となるから、

$$e_y=-\frac{r_z^2}{n_y}=-\frac{\frac{107}{36}a^2}{\pm\infty}=0$$

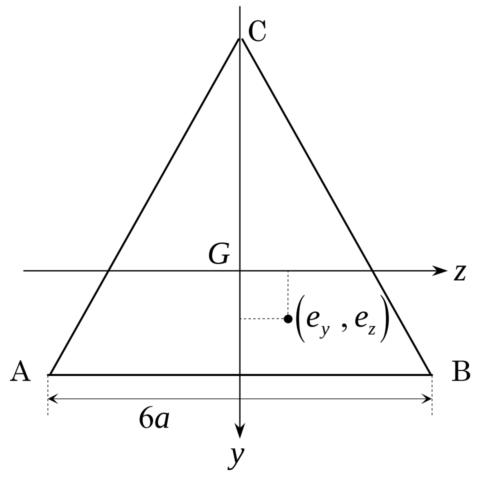
$$e_z=-\frac{r_y^2}{n_z}=-\frac{\frac{19}{36}a^2}{\pm\frac{3}{2}a}=\mp\frac{19}{36}\cdot\frac{2}{3}a=\mp\frac{19}{54}a$$

$$\therefore\left(e_y\ ,e_z\right)=\left(0\ ,\mp\frac{19}{54}a\right)$$

以上をまとめて、〝断面の核〟を斜線で図示すると下図のようになる。



【問題 CM-CS-3】
下図に示す一辺の長さが $6a$ の“正三角形断面”ABC の〝断面の核〟を求め、図示せよ。



【解答】
図に示す重心 G を通る y, z 軸は主軸となるから、z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_z は、次のようになる。

$$\frac{1}{2}I_y = \frac{3\sqrt{3}a\cdot(3a)^3}{36} + \left(\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}a\times 3a\right)\times(a)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^4 + \frac{9\sqrt{3}}{2}a^4 = \frac{27\sqrt{3}}{4}a^4 \qquad \therefore I_y = \frac{27\sqrt{3}}{2}a^4$$

$$I_z = \frac{6a\cdot\left(3\sqrt{3}a\right)^3}{36} = \frac{27\cdot 3\sqrt{3}}{6}a^4 = \frac{27\sqrt{3}}{2}a^4$$

また、断面積 A は、$A = \frac{1}{2}\times 6a\times 3\sqrt{3}a = 9\sqrt{3}a^2$ だから、y, z 軸に関する回転半径をそれぞれ r_y, r_z とすると、

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{27\sqrt{3}}{2}a^4}{9\sqrt{3}a^2} = \frac{3}{2}a^2 \qquad\qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{27\sqrt{3}}{2}a^4}{9\sqrt{3}a^2} = \frac{3}{2}a^2$$

ここで、載荷荷重の偏心位置を $(e_y \,, e_z)$ とすると、中立軸は、$1 + \frac{e_y}{r_z^2}y + \frac{e_z}{r_y^2}z = 0$ と表され、

中立軸が y, z 軸と交わる点すなわち切片 n_y, n_z は、次のようになる。

$$n_y = -\frac{r_z^2}{e_y}, \quad n_z = -\frac{r_y^2}{e_z} \qquad\qquad 逆に、\quad e_y = -\frac{r_z^2}{n_y}, \quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z}$$

よって、〝断面の核〟の端の位置を決めるためには、中立軸が次の２通り（3 通り）の限界位置にある場合について、載荷荷重の偏心位置を $(e_y \,, e_z)$ を求めればよい。

(1) 中立軸が AB となるとき、切片は、$n_y = \sqrt{3}a$, $n_z = \pm\infty$ となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{\sqrt{3}a} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}a = -\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{\pm\infty} = 0$$

$$\therefore (e_y, e_z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right)$$

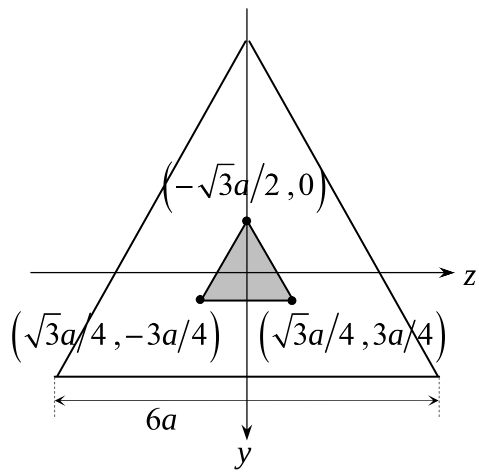
(2) 中立軸が BC または AC となるとき、切片は、$n_y = -2\sqrt{3}a$，$n_z = \pm 2a$ となるから、

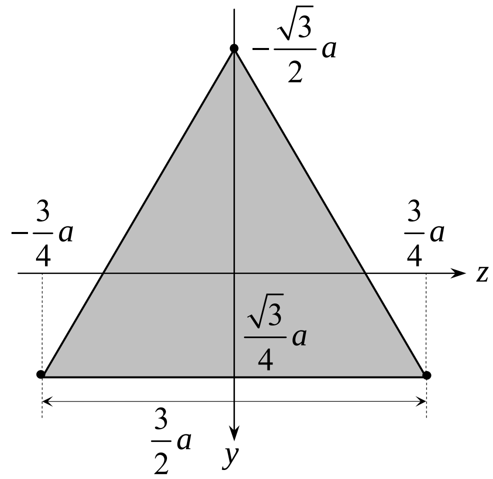
$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{-2\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{\pm 2a} = \mp\frac{3}{4}a$$

$$\therefore (e_y, e_z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a,\ \mp\frac{3}{4}a\right)$$

以上をまとめて、〝断面の核〟を塗りつぶしで図示すると下図のようになる。





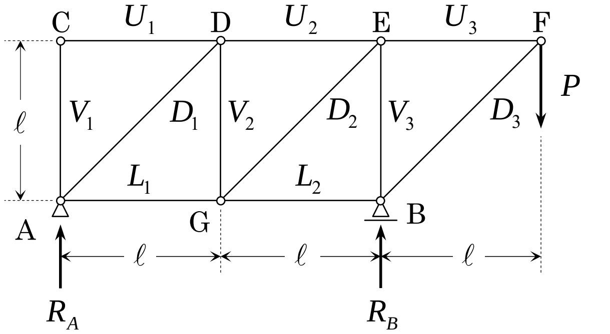
『断面の核』拡大図

（一辺 $\frac{3}{2}a$ の正三角形）

【問題 CM-BT-6】下図に示す曲げ剛性 EI が一定の静定トラスについて、以下の設問に答えよ。

(1) 部材力 U_1， U_2， U_3， L_1， L_2， V_1， V_2， V_3， D_1， D_2， D_3 を求めよ。

(2) 荷重 P を漸次増加させるとき、最初に座屈が発生する部材はどの部材か。また、そのときの荷重 P の大きさ P_E を求めよ。



【解答】

(1)まず、支点反力 R_A， R_B を求めると、次のようになる。

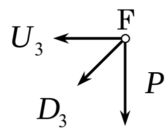
鉛直方向の力の釣合から、　$R_A + R_B = P$

B 点回りのモーメントの釣合から、　$R_A \cdot 2\ell + P\ell = 0$　　$\therefore\ R_A = -\dfrac{1}{2}P$

A 点回りのモーメントの釣合から、　$R_B \cdot 2\ell = P \cdot 3\ell$　　$\therefore\ R_B = \dfrac{3}{2}P$

各部材力は、〝節点法〟を用いて、鉛直方向と水平方向の力の釣合から、以下のように求める。

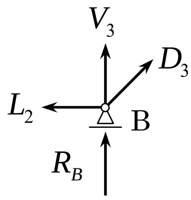
1) F 点について、



（鉛直） $D_3 \sin 45° + P = \dfrac{D_3}{\sqrt{2}} + P = 0$　　$\therefore D_3 = -\sqrt{2}P$

（水平） $U_3 + D_3 \cos 45° = U_3 + \dfrac{D_3}{\sqrt{2}} = 0$　　$\therefore U_3 = -\dfrac{D_3}{\sqrt{2}} = P$

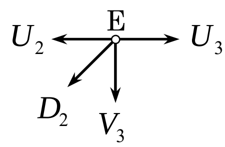
2) B 点について、



（鉛直） $V_3 + D_3 \sin 45° + R_B = V_3 + \dfrac{D_3}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{2}P = 0$　　$\therefore V_3 = P - \dfrac{3}{2}P = -\dfrac{P}{2}$

（水平） $L_2 = D_3 \cos 45° = \dfrac{D_3}{\sqrt{2}} = -P$

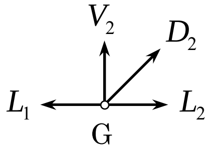
3) E 点について、



（鉛直） $V_3 + D_2 \sin 45° = V_3 + \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = 0$　　$\therefore D_2 = -\sqrt{2}V_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}P$

（水平） $U_2 + D_2 \cos 45° = U_2 + \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = U_3$　　$\therefore U_2 = U_3 - \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = P - \dfrac{P}{2} = \dfrac{P}{2}$

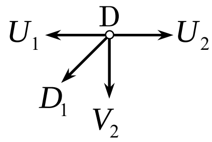
4) G 点について、



（鉛直） $V_2 + D_2 \sin 45° = V_2 + \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = 0$　　$\therefore V_2 = -\dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{P}{2}$

（水平） $L_1 = L_2 + D_2 \cos 45° = -P + \dfrac{D_2}{\sqrt{2}} = -P + \dfrac{P}{2} = -\dfrac{P}{2}$

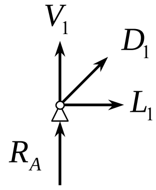
5) D 点について、



（鉛直）$V_2 + D_1 \sin 45° = V_2 + \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} = 0$　　　$\therefore D_1 = -\sqrt{2}V_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}P$

（水平）$U_1 + D_1 \cos 45° = U_1 + \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} = U_2$　　　$\therefore U_1 = U_2 - \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} = \dfrac{P}{2} - \dfrac{P}{2} = 0$

6) A 点について、



（鉛直）$V_1 + D_1 \sin 45° + R_A = V_1 + \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} - \dfrac{P}{2} = 0 \therefore V_1 = -\dfrac{D_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{P}{2} = -\dfrac{P}{2} + \dfrac{P}{2} = 0$

（水平）$L_1 + D_1 \cos 45° = L_1 + \dfrac{D_1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{P}{2} + \dfrac{P}{2} = 0$　　(Check)

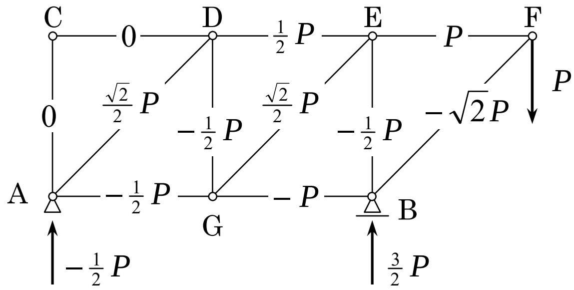
以上をまとめると、

$\boxed{U_1 = 0}$　$\boxed{U_2 = \dfrac{P}{2}}$　$\boxed{U_3 = P}$

$\boxed{L_1 = -\dfrac{P}{2}}$　$\boxed{L_2 = -P}$

$\boxed{V_1 = 0}$　$\boxed{V_2 = -\dfrac{P}{2}}$　$\boxed{V_3 = -\dfrac{P}{2}}$

$\boxed{D_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}P}$　$\boxed{D_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}P}$　$\boxed{D_3 = -\sqrt{2}P}$



となり、これを図示すると右図のようになる。

(2)荷重 P を漸次増加させるとき、最初に座屈が発生する部材は、部材長が同じ場合は最大の圧縮力が作用する部材である。また、部材の支持条件は、すべて両端回転支持である。

(1)で求めた部材力から、部材長が ℓ の場合は L_2，部材長が $\sqrt{2}\ell$ の場合は D_3 が候補として挙げられる。それぞれについて、座屈発生時の荷重 P_E を求めると、次のようになる。

L_2 の場合は、$P_E = \dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2}$

D_3 の場合は、$\sqrt{2}P_E = \dfrac{\pi^2 EI}{\left(\sqrt{2}\ell\right)^2} = \dfrac{\pi^2 EI}{2\ell^2}$　　　$\therefore\ P_E = \dfrac{\pi^2 EI}{2\sqrt{2}\ell^2}$

したがって、D_3 の場合の方が、L_2 の場合より座屈荷重が小さくなることがわかる。

よって、最初に座屈が発生する部材は、$\boxed{D_3}$ すなわち $\boxed{\text{部材 BF}}$ であり、そのときの荷重 P の大きさ P_E は、$\boxed{P_E = \dfrac{\pi^2 EI}{2\sqrt{2}\ell^2}}$ である。

構造力学演習Ⅱ（2018-№.５）　　2018/10/09

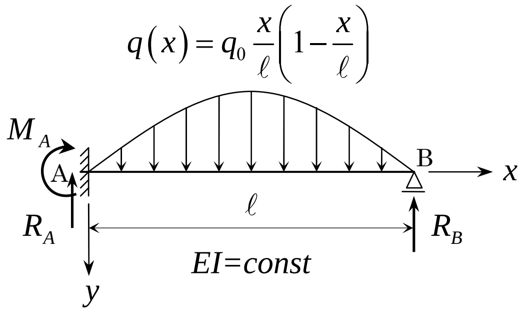
【１】右図に示すような一端固定・他端単純支持ばりに分布荷重 $q\left(x\right)=q_0\dfrac{x}{\ell}\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)$ が作用するとき、

(1) たわみ：$y\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

(2) たわみ角：$\theta\left(\dfrac{x}{\ell}\right)=y'\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

(3) 曲げモーメント：$M\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

(4) せん断力：$Q\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$



の式を求めよ。また、

(5) 支点反力 R_A，R_B と支点曲げモーメント M_A を求めよ。

ただし、はりの曲げ剛性は、EI で一定とする。

【解答】

(1)(2)はりのたわみと荷重の関係を表す４階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q\left(x\right)=q_0\dfrac{x}{\ell}\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)=\dfrac{q_0}{\ell}x-\dfrac{q_0}{\ell^2}x^2$

を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^3}{3}+C_1$$

$$EIy''=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^5}{60}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^6}{360}+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1，C_2，C_3，C_4 を求める。

1) $x=0$ のとき、$y'=0$ より、　$C_3=0$

2) $x=0$ のとき、$y=0$ より、　$C_4=0$

3) $x=\ell$ のとき、$y''=0$ より、　$\dfrac{q_0}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^3}{6}-\dfrac{q_0}{\ell^2}\dfrac{\ell^4}{12}+C_1\ell+C_2=0$

$$\therefore C_1\ell+C_2=q_0\ell^2\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}q_0\ell^2 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

4) $x=\ell$ のとき、$y=0$ より、　$\dfrac{q_0}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^5}{120}-\dfrac{q_0}{\ell^2}\cdot\dfrac{\ell^6}{360}+C_1\dfrac{\ell^3}{6}+C_2\dfrac{\ell^2}{2}=0$

$$\therefore C_1\frac{\ell^3}{6}+C_2\frac{\ell^2}{2}=q_0\ell^4\left(\frac{1}{360}-\frac{1}{120}\right)=-\frac{2}{360}q_0\ell^4=-\frac{1}{180}q_0\ell^4$$

$$\therefore C_1\ell+3C_2=-\frac{1}{30}q_0\ell^2 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

②－①より、$2C_2=\left(-\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{12}\right)q_0\ell^2=\dfrac{-2+5}{60}q_0\ell^2=\dfrac{3}{60}q_0\ell^2=\dfrac{1}{20}q_0\ell^2$　　$\therefore C_2=\dfrac{1}{40}q_0\ell^2$

これを①に代入して、$C_1\ell=-\dfrac{1}{12}q_0\ell^2-\dfrac{1}{40}q_0\ell^2=-\dfrac{10+3}{120}q_0\ell^2=-\dfrac{13}{120}q_0\ell^2$　　$\therefore C_1=-\dfrac{13}{120}q_0\ell$

よって、

$$EIy''' = \frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{13}{120}q_0\ell$$

$$EIy'' = \frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6} - \frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^4}{12} - \frac{13}{120}q_0\ell x + \frac{1}{40}q_0\ell^2$$

$$EIy' = \frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24} - \frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^5}{60} - \frac{13}{120}q_0\ell\frac{x^2}{2} + \frac{1}{40}q_0\ell^2 x$$

$$EIy = \frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120} - \frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^6}{360} - \frac{13}{120}q_0\ell\frac{x^3}{6} + \frac{1}{40}q_0\ell^2\frac{x^2}{2}$$

したがって、はりのたわみ $y\left(\frac{x}{\ell}\right)$ とたわみ角 $\theta\left(\frac{x}{\ell}\right) = y'\left(\frac{x}{\ell}\right)$ の式は、次のようになる。

$$EIy' = q_0\ell^3\left\{\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \frac{1}{60}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \frac{13}{240}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{40}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}$$

$$EIy = q_0\ell^4\left\{\frac{1}{120}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \frac{1}{360}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 - \frac{13}{720}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{1}{80}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\theta\left(\frac{x}{\ell}\right) = y'\left(\frac{x}{\ell}\right) &= \frac{q_0\ell^3}{EI}\left\{\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \frac{1}{60}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \frac{13}{240}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{40}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{240}\cdot\frac{q_0\ell^3}{EI}\left\{10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 4\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - 13\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 6\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}y\left(\frac{x}{\ell}\right) &= \frac{q_0\ell^4}{EI}\left\{\frac{1}{120}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \frac{1}{360}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 - \frac{13}{720}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{1}{80}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}\\ &= \frac{1}{720}\cdot\frac{q_0\ell^4}{EI}\left\{6\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - 2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 - 13\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 9\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}\end{aligned}}$$

(3)(4)(5)上記(1)(2)より、せん断力 $Q = -EIy'''$，曲げモーメント $M = -EIy''$ は、次の式で表される。

$$\boxed{Q\left(\frac{x}{\ell}\right) = -EIy''' = -q_0\ell\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \frac{13}{120}\right\} = -\frac{q_0\ell}{120}\left\{60\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 40\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 13\right\}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}M\left(\frac{x}{\ell}\right) = -EIy'' &= -q_0\ell^2\left\{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \frac{13}{120}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + \frac{1}{40}\right\}\\ &= -\frac{q_0\ell^2}{120}\left\{20\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 13\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + 3\right\}\end{aligned}}$$

したがって、A 点，B 点それぞれの支点反力 R_A， R_B と支点曲げモーメント M_A は、次のようになる。

$$R_A = Q_A = \left[-EIy'''\right]_{x=0} = -\left[EIy'''\right]_{x=0} = -\left(-\frac{13}{120}q_0\ell\right) = \frac{13}{120}q_0\ell$$

$$R_B = -Q_B = -\left[-EIy'''\right]_{x=\ell} = \left[EIy'''\right]_{x=\ell} = q_0\ell\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{13}{120}\right) = \frac{60-40-13}{120}q_0\ell = \frac{7}{120}q_0\ell$$

$$M_A = \left[-EIy''\right]_{x=0} = -\left[EIy''\right]_{x=0} = -\frac{1}{40}q_0\ell^2$$

$$\therefore\ \boxed{R_A = \frac{13}{120}q_0\ell},\ \boxed{R_B = \frac{7}{120}q_0\ell},\ \boxed{M_A = -\frac{1}{40}q_0\ell^2}$$

構造力学演習Ⅱ（2018-№6）　2018/10/16

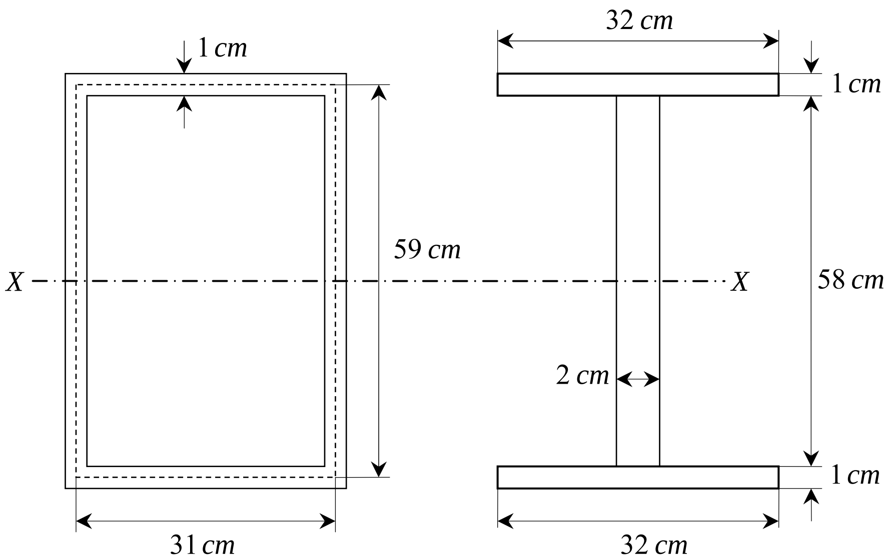
【４】単純ねじりに関する次の問いに答えよ。

⑴ 板厚 t，薄肉中央線の長さ（周長）S，せん断弾性係数 G が相等しい中空正六角形断面，中空長方形断面（薄肉中央線の長辺と短辺の長さの比が 7 : 5），中空三角形断面（薄肉中央線の三辺の長さの比が 5 : 4 : 3）の 3 つの薄肉中空断面において、それぞれのねじり剛性を GJ_H， GJ_S， GJ_T とするとき、3 者のねじり剛性の比 $GJ_H : GJ_S : GJ_T$ はいくらか。

⑵ 下図に示す 2 つの断面について、下左図は、板厚が $1\,cm$，薄肉中央線の長辺が $59\,cm$ と短辺が $31\,cm$ の「中空長方形断面」，下右図は、上下フランジが $32\,cm \times 1\,cm$ でウェブが $58\,cm \times 2\,cm$ の「Ｉ形断面」を表している。この 2 つの断面は、X-X 軸に関して対称である。

　このとき、「中空長方形断面」の X-X 軸に関する断面 2 次モーメント I_T と「Ｉ形断面」の X-X 軸に関する断面 2 次モーメント I_G を求めよ。

　次に、「中空長方形断面」のねじり定数 J_T と「Ｉ形断面」のねじり定数 J_G を求め、さらに、2 つの断面のねじり定数の比 $\dfrac{J_T}{J_G}$ を求めよ。



【解答】

⑴ 薄肉中空断面のねじり剛性 GJ は、$GJ = \dfrac{4F^2}{\oint \dfrac{ds}{t}} G$ …①と表される。

ここに、F : 薄肉中央線に囲まれた面積，$\oint ds$: 薄肉中央線に沿う周回積分である。

問題では、板厚 t，薄肉中央線の長さ（周長）S，せん断弾性係数 G が相等しいので、全ての薄肉中空断面で①式の分母は一定となり、3 者のねじり剛性の比 $GJ_H : GJ_S : GJ_T$ は、薄肉中央線に囲まれた面積 F の二乗の比となる。そこで、中空正六角形断面の一辺の長さを $4r$、すなわち S=$24r$、として、3 者の F の二乗を計算すると、次のようになる

$$F_H^2 = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 4r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4r \times 6 \right\}^2 = \left(24\sqrt{3}r^2\right)^2 = 576 \times 3r^4 = 1728r^4$$

$$F_S^2 = \left(5r \cdot 7r\right)^2 = \left(35r^2\right)^2 = 1225r^4$$

$$F_T^2 = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 6r \cdot 8r \right\}^2 = \left(24r^2\right)^2 = 576r^4$$ （∵三辺の長さの比が 5 : 4 : 3 の三角形は、直角三角形）

したがって、

$$GJ_H : GJ_S : GJ_T = F_H^2 : F_S^2 : F_T^2 = 1728r^4 : 1225r^4 : 576r^4 = 1728 : 1225 : 576$$

$$\therefore \boxed{GJ_H : GJ_S : GJ_T = 1728 : 1225 : 576 \cong 1 : 0.709 : 0.33}$$

(2) 「中空長方形断面」の X-X 軸に関する断面 2 次モーメント I_T は、次のようになる。

$$I_T = \frac{(31+1)\times(59+1)^3}{12} - \frac{(31-1)\times(59-1)^3}{12}$$

$$= \frac{32\times60^3}{12} - \frac{30\times58^3}{12} = 576000 - 487780 = 88220$$

$$\therefore \boxed{I_T = 88220\ cm^4}$$

「I 形断面」の X-X 軸に関する断面 2 次モーメント I_G は、次のようになる。

$$I_G = \frac{2\times(59-1)^3}{12} + 2\times\left\{\frac{(31+1)\times1^3}{12} + (31+1)\times1\times\left(\frac{59-1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{2\times58^3}{12} + 2\times\left\{\frac{32\times1^3}{12} + 32\times1\times\left(\frac{59}{2}\right)^2\right\} = 88220$$

$$\therefore \boxed{I_G = 88220\ cm^4}$$

「中空長方形断面」のねじり定数 J_T は、①式より、

$$J_T = \frac{4\times(31\times59)^2}{2(31+59)/1} = 74338.68889 \cong 74338.69 \qquad \therefore \boxed{J_T = 74338.69\ cm^4}$$

「I 形断面」のねじり定数 J_G は、開断面であるから、次のようになる。

$$J_G = \frac{1}{3}\times(59-1)\times2^3 + 2\times\frac{1}{3}\times(31+1)\times1^3 = 176 \qquad \therefore \boxed{J_G = 176\ cm^4}$$

2 つの断面のねじり定数の比 $\dfrac{J_T}{J_G}$ は、次のようになる。

$$\frac{J_T}{J_G} = \frac{74338.68889}{176} = 422.3789141 \cong 422.4 \qquad \therefore \boxed{\frac{J_T}{J_G} = 422.4}$$

【５】下図に示す∠BAC=90°で AB=AC の直角二等辺三角形断面 ABC の『断面の核』を以下の手順で求め、図示せよ。なお、原点 O は、◿ABC の重心であり、y, z 軸は、主軸である。

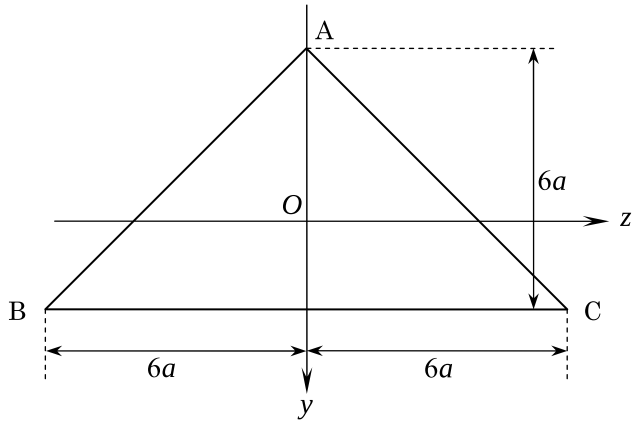
(1) 直角二等辺三角形断面 ABC の面積 A を求めよ。

(2) 直角二等辺三角形断面 ABC の y 軸と z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_z を求めよ。

(3) 直線 BC が中立軸になるときの荷重位置 $D\left(e_y, e_z\right)$ を求めよ。

(4) 直線 AC または AB が中立軸になるときの荷重位置 $E\left(e_y, e_z\right)$ または $F\left(e_y, e_z\right)$ を求めよ。

(5) 『断面の核』を斜線で図示せよ。



【解答】

(1) 上図より、直角二等辺三角形断面 ABC の面積 A は、次のようになる。

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12a \cdot 6a = 36a^2 \qquad \therefore \boxed{A = 36a^2}$$

(2) 直角二等辺三角形断面の y 軸と z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_z は次のようになる。

$$\frac{1}{2} I_y = \frac{(6a) \cdot (6a)^3}{36} + \frac{A}{2} \cdot (2a)^2 = 36a^4 + 18a^2 \cdot 4a^2 = (36 + 72)a^4 = 108a^4$$

$$I_z = \frac{(12a) \cdot (6a)^3}{36} = 72a^4$$

$$\therefore \boxed{I_y = 216a^4} \quad \boxed{I_z = 72a^4}$$

従って、直角二等辺三角形断面の y 軸と z 軸に関する断面半径は、次のようになる。

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{216a^4}{36a^2} = 6a^2 \qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{72a^4}{36a^2} = 2a^2$$

(3) 直線 BC が中立軸になるときの荷重位置 $D\left(e_y, e_z\right)$ を求める。

直線 BC の y 切片は $n_y = 2a$, z 切片は $n_z = \infty$ だから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{2a^2}{2a} = -a, \quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{6a^2}{\infty} = 0 \qquad \therefore \boxed{D\left(e_y, e_z\right) = (-a, 0)}$$

(4) 直線 AC または AB が中立軸になるときの荷重位置 $E\left(e_y, e_z\right)$ または $F\left(e_y, e_z\right)$ を求める。

直線 AC の y 切片は $n_y = -4a$, z 切片は $n_z = \pm 4a$ だから、

$$e_y=-\frac{r_z^2}{n_y}=-\frac{2a^2}{-4a}=\frac{1}{2}a\,,\quad e_z=-\frac{r_y^2}{n_z}=-\frac{6a^2}{\pm 4a}=\mp\frac{3}{2}a$$

$$\therefore \boxed{E\left(e_y,e_z\right)=\left(\frac{1}{2}a,-\frac{3}{2}a\right)}\quad \boxed{F\left(e_y,e_z\right)=\left(\frac{1}{2}a,\frac{3}{2}a\right)}$$

(5)『断面の核』を図示すると、塗りつぶし部分のようになる。