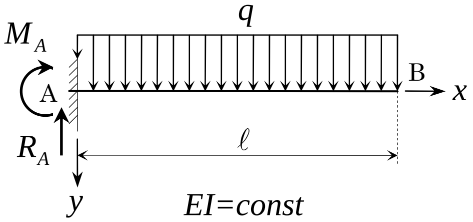
【問題 BD4-CL-1】下図に示す曲げ剛性 EI が一定で、A 点固定の“片持ばり”について、次の設問に答えよ。

(1) 支点反力 M_A，R_A を求めよ。

(2) せん断力 $Q(x)$、曲げモーメント $M(x)$ の式を求め、次に、断面力図、すなわち、せん断力図（Q−図）、曲げモーメント図（M−図）を図示せよ。

(3) はりの変形の基本式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$ を用いて、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ を求めよ。

(4) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を用いて、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ を求めよ。

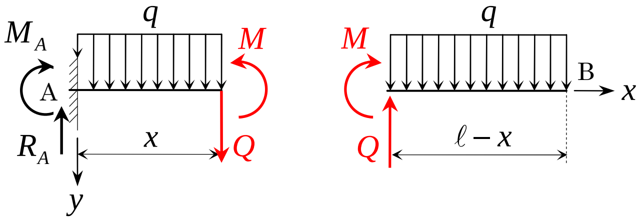


【解答】

(1) 鉛直方向の力の釣合より、$\boxed{R_A=q\ell}$

A 点回りのモーメントの釣合より、$M_A+q\ell\times\dfrac{\ell}{2}=0$　　$\therefore \boxed{M_A=-\dfrac{1}{2}q\ell^2}$

(2) A 点から距離 x の点ではりを切断すると、下図のようになる。



左自由体について、釣合を考えると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合より、$Q+q\cdot x=R_A$　　$\therefore Q(x)=q\cdot\ell-q\cdot x=q\cdot(\ell-x)$

切断点回りのモーメントの釣合より、

$$M+q\cdot x\cdot\frac{x}{2}=M_A+R_A\cdot x\ \therefore M(x)=-q\cdot\frac{x^2}{2}+q\ell\cdot x-\frac{1}{2}q\ell^2=-\frac{q}{2}(\ell-x)^2$$

右自由体について、釣合を考えると、次のようになる。

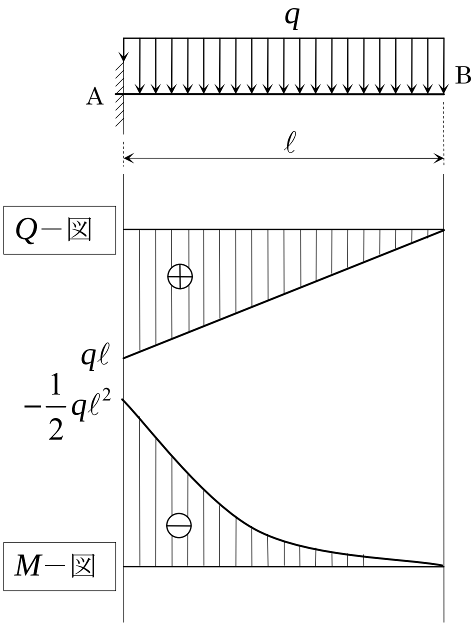
鉛直方向の力の釣合より、$Q=q\cdot(\ell-x)$　　$\therefore Q(x)=q\cdot(\ell-x)$

切断点回りのモーメントの釣合より、$M+q\cdot(\ell-x)\cdot\dfrac{\ell-x}{2}=0$　　$\therefore M(x)=-\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2$

よって、せん断力 $Q(x)$、曲げモーメント $M(x)$ の式は、次のようになる。

$\boxed{Q(x)=q\cdot(\ell-x)}$, $\boxed{M(x)=-\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2}$

次に、断面力図、即ち、せん断力図（Q−図）、曲げモーメント図（M−図）を図示すると、下図のようになる。



(3) はりの変形の基本式$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$を変形すると、$EI\dfrac{d^2y}{dx^2}=-M$となり、これに(2)の曲げモーメント$M(x)$の式を代入すると、$EI\dfrac{d^2y}{dx^2}=q\cdot\dfrac{x^2}{2}-q\ell\cdot x+\dfrac{1}{2}q\ell^2=\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2$となる。

《解法Ⅰ》

$EIy''=q\cdot\dfrac{x^2}{2}-q\ell\cdot x+\dfrac{1}{2}q\ell^2$を用いて、逐次積分すると、

$$EIy'=q\cdot\frac{x^3}{6}-q\ell\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{q\ell^2}{2}x+C_1 \qquad EIy=q\cdot\frac{x^4}{24}-q\ell\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{q\ell^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1, C_2を求める。

①$x=0$で、たわみがゼロ、即ち、$y=0$より、　$C_2=0$

②$x=0$で、たわみ角がゼロ、即ち、$y'=0$より、　$C_1=0$

よって、たわみ角$\theta(x)$とたわみの式$y(x)$は、次のようになる。

$$EIy'=q\cdot\frac{x^3}{6}-q\ell\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{q\ell^2}{2}x \qquad EIy=q\cdot\frac{x^4}{24}-q\ell\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{q\ell^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$\boxed{\therefore\begin{cases}\theta(x)=y'(x)=\dfrac{q}{6EI}x^3-\dfrac{q}{2EI}\ell x^2+\dfrac{q}{2EI}\ell^2x=\dfrac{q\ell^3}{6EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3-3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2+3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right\}\\[2ex] y(x)=\dfrac{q}{24EI}x^4-\dfrac{q}{6EI}\ell x^3+\dfrac{q}{4EI}\ell^2x^2=\dfrac{q\ell^4}{24EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^4-4\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3+6\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right\}\end{cases}}$$

《解法Ⅱ》

$EIy''=\dfrac{q}{2}(\ell-x)^2$を用いて、逐次積分すると、

$$EIy'=\frac{q}{2}\cdot\left\{-\frac{(\ell-x)^3}{3}\right\}+C_1 \qquad EIy=\frac{q}{2}\cdot\left\{\frac{(\ell-x)^4}{12}\right\}+C_1x+C_2$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1, C_2を求める。

①$x=0$で、たわみがゼロ、即ち、$y=0$より、　$\dfrac{q}{2}\cdot\dfrac{\ell^4}{12}+C_2=0$　　$\therefore C_2=-\dfrac{q\ell^4}{24}$

②$x=0$で、たわみ角がゼロ、即ち、$y'=0$より、　$-\dfrac{q}{2}\cdot\dfrac{\ell^3}{3}+C_1=0 \quad \therefore C_1=\dfrac{q\ell^3}{6}$

よって、たわみ角$\theta(x)$とたわみの式$y(x)$は、次のようになる。

$$EIy'=-\frac{q(\ell-x)^3}{6}+\frac{q\ell^3}{6}=\frac{q}{6}\cdot\left\{\ell^3-(\ell-x)^3\right\}=\frac{q\ell^3}{6}\cdot\left\{1-\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^3\right\}$$

$$EIy=\frac{q}{2}\cdot\left\{\frac{(\ell-x)^4}{12}\right\}+\frac{q\ell^3}{6}x-\frac{q\ell^4}{24}=\frac{q\ell^4}{24}\cdot\left\{\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^4+4\left(\frac{x}{\ell}\right)-1\right\}$$

$$\boxed{\therefore\begin{cases}\theta(x)=y'(x)=\dfrac{q\ell^3}{6EI}\left\{1-\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)^3\right\}\\[2ex] y(x)=\dfrac{q\ell^4}{24EI}\left\{\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)^4+4\left(\dfrac{x}{\ell}\right)-1\right\}\end{cases}}$$

(4) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式$EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=qx+C_1$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数C_1，C_2，C_3，C_4を求める。

①$x=0$で、たわみ角がゼロ、即ち、$y'=0$より、　$C_3=0$

②$x=0$で、たわみがゼロ、即ち、$y=0$より、　$C_4=0$

③$x=\ell$で、せん断力がゼロ、即ち、$y'''=0$より、　$q\ell+C_1=0 \quad \therefore C_1=-q\ell$

④$x=\ell$で、曲げモーメントがゼロ、即ち、$y''=0$より、$\dfrac{q}{2}\ell^2-q\ell^2+C_2=0 \quad \therefore C_2=\dfrac{q}{2}\ell^2$

よって、たわみ角$\theta(x)$とたわみの式$y(x)$は、次のようになる。

$$EIy'''=qx-q\ell$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2-q\ell x+\frac{q}{2}\ell^2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3-\frac{q}{2}\ell x^2+\frac{q}{2}\ell^2x$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4-\frac{q}{6}\ell x^3+\frac{q}{4}\ell^2x^2$$

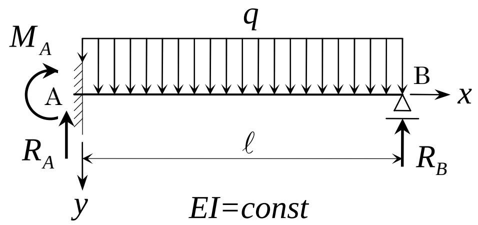
$$\boxed{\therefore\begin{cases}\theta(x)=y'(x)=\dfrac{q}{6EI}x^3-\dfrac{q}{2EI}\ell x^2+\dfrac{q}{2EI}\ell^2x\\[1ex] \qquad=\dfrac{q\ell^3}{6EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3-3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2+3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right\}\\[2ex] y(x)=\dfrac{q}{24EI}x^4-\dfrac{q}{6EI}\ell x^3+\dfrac{q}{4EI}\ell^2x^2\\[1ex] \qquad=\dfrac{q\ell^4}{24EI}\left\{\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^4-4\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3+6\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right\}\end{cases}}$$

【問題 BD4-B-1A】下図に示す曲げ剛性 EI が一定で、“A 点固定、B 点単純支持のはり”について、次の設問に答えよ。

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を用いて、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ を求めよ。

(2) 支点反力 M_A， R_A， R_B を求めよ。

(3) せん断力 $Q(x)$、曲げモーメント $M(x)$ の式を求め、次に、断面力図、すなわち、せん断力図（Q－図）、曲げモーメント図（M－図）を図示せよ。



【解答】

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=qx+C_1$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1， C_2， C_3， C_4 を求める。

(a) $x=0$ のとき、$y'=0$ より、　$C_3=0$

(b) $x=0$ のとき、$y=0$ より、　$C_4=0$

(c) $x=\ell$ のとき、$y''=0$ より、　$\dfrac{q}{2}\ell^2+C_1\ell+C_2=0$　………①

(d) $x=\ell$ のとき、$y=0$ より、　$\dfrac{q}{24}\ell^4+\dfrac{C_1}{6}\ell^3+\dfrac{C_2}{2}\ell^2=0$　………②

①を変形すると、　$C_1\ell+C_2=-\dfrac{q}{2}\ell^2$　………①'

②を変形すると、　$C_1\ell+3C_2=-\dfrac{q}{4}\ell^2$　………②'

①'－②'より、　$-2C_2=-\dfrac{q}{4}\ell^2$　　$\therefore C_2=\dfrac{1}{8}q\ell^2$

これを①'に代入すると、　$C_1\ell=-\dfrac{q}{2}\ell^2-\dfrac{1}{8}q\ell^2=-\dfrac{5}{8}q\ell^2$　　$\therefore C_1=-\dfrac{5}{8}q\ell$

よって、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ は、次のようになる。

$$EIy''' = qx - \frac{5}{8}q\ell$$

$$EIy'' = \frac{q}{2}x^2 - \frac{5}{8}q\ell x + \frac{1}{8}q\ell^2$$

$$EIy' = \frac{q}{6}x^3 - \frac{5}{16}q\ell x^2 + \frac{1}{8}q\ell^2 x$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 - \frac{5}{48}q\ell x^3 + \frac{1}{16}q\ell^2 x^2$$

$$\boxed{\therefore \begin{cases} \theta(x) = y'(x) = \dfrac{q}{6EI}x^3 - \dfrac{5}{16EI}q\ell x^2 + \dfrac{1}{8EI}q\ell^2 x \\ \qquad = \dfrac{q\ell^3}{48EI}\left\{8\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 - 15\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2 + 6\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right\} \\ y(x) = \dfrac{q}{24EI}x^4 - \dfrac{5}{48EI}q\ell x^3 + \dfrac{1}{16EI}q\ell^2 x^2 \\ \qquad = \dfrac{q\ell^4}{48EI}\left\{2\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^4 - 5\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 + 3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right\} \end{cases}}$$

(2) 次に、支点反力 M_A， R_A， R_B を求めると、以下のようになる。

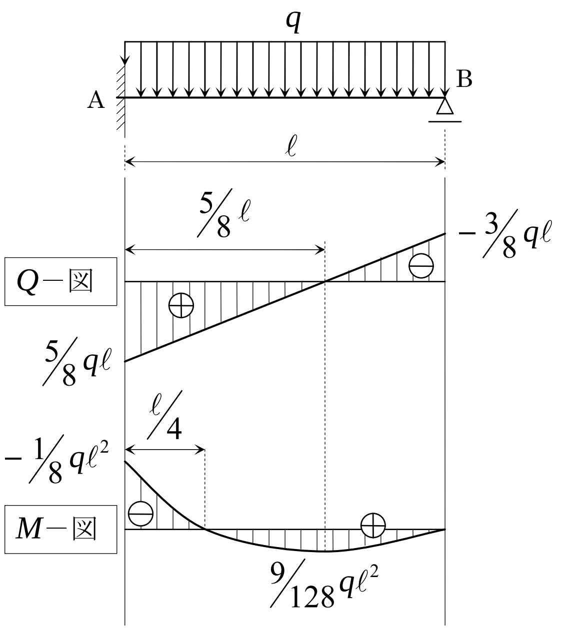
$M_A = -EIy''$ より、 $\qquad M_A = -EIy''\big|_{x=0} = -\dfrac{1}{8}q\ell^2$

$Q = -EIy'''$ より、 $\qquad R_A = Q_A = -EIy'''\big|_{x=0} = \dfrac{5}{8}q\ell$

また、 $\qquad -R_B = Q_B = -EIy'''\big|_{x=\ell} = -q\ell + \dfrac{5}{8}q\ell = -\dfrac{3}{8}q\ell$

以上より、 $\boxed{M_A = -\dfrac{1}{8}q\ell^2}$ $\boxed{R_A = \dfrac{5}{8}q\ell}$ $\boxed{R_B = \dfrac{3}{8}q\ell}$

(3) さらに、せん断力図（Q－図）、曲げモーメント図（M－図）を図示すると、下図のようになる。



曲げモーメントの最大値を求めると、

$$M_{\max} = -EIy''\big|_{x=\frac{5}{8}\ell}$$

$$= -\frac{q}{2}\cdot\frac{25}{64}\ell^2 + \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\ell - \frac{1}{8}q\ell^2$$

$$= \left(-\frac{25}{128} + \frac{25}{64} - \frac{1}{8}\right)\cdot q\ell^2$$

$$= \frac{-25+50-16}{128}q\ell^2$$

$$= \frac{9}{128}q\ell^2$$

$M = -EIy'' = -\dfrac{q}{2}x^2 + \dfrac{5}{8}q\ell x - \dfrac{1}{8}q\ell^2 = 0$ を解くと、

$$-4x^2 + 5\ell x - \ell^2 = 0$$

$$\therefore 4x^2 - 5\ell x + \ell^2 = 0$$

$$\therefore (4x - \ell)(x - \ell) = 0$$

$$\therefore x = \frac{\ell}{4}, \quad x = \ell$$