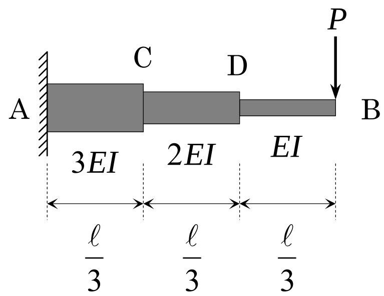
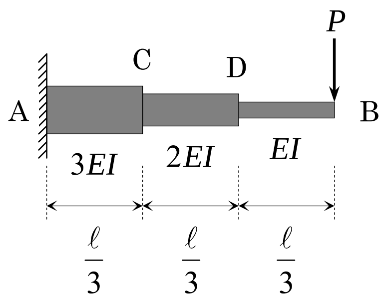
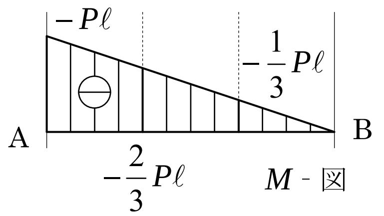
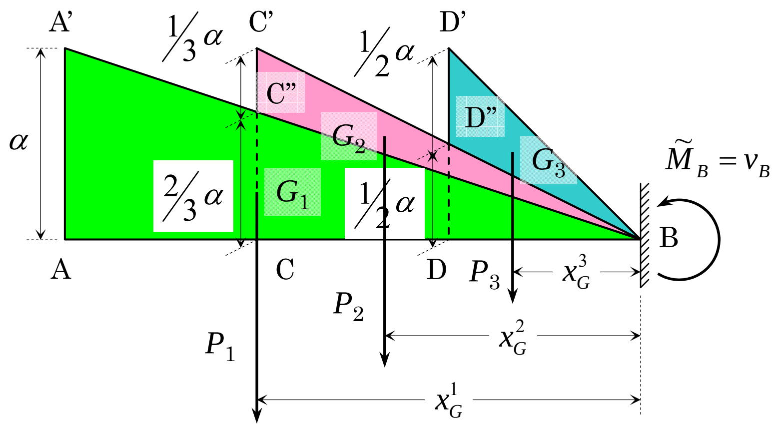
【問題 EL-HCL-2】〝弾性荷重法〟により、下図に示すような“変断面片持ばり AB”の自由端 B のたわみ v_B を求めよ。なお、“変断面片持ばり AB”の曲げ剛性は、A～C 間，C～D 間，D～B 間でそれぞれ $3EI$，$2EI$ ，EI である。



【解答】
まず、変断面片持ばりの曲げモーメント図は、下左図のようになる。
次に、〝モールの定理〟より、〝共役ばり〟に〝弾性荷重〟を載荷したものは下右図のようになり、これについて支点曲げモーメント $\tilde{M}_B = v_B$ を求めればよいことになる。なお、ここに $-\dfrac{P\ell}{3EI} = \alpha$ とする。







ここで、

$$P_1 = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad x_G^1 = \frac{2}{3}\ell$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{1}{9}\alpha\ell \qquad x_G^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{4}{9}\ell$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\ell}{3} = \frac{1}{12}\alpha\ell \qquad x_G^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\ell = \frac{2}{9}\ell$$

であるから、モーメントの釣合から、次のようになる。

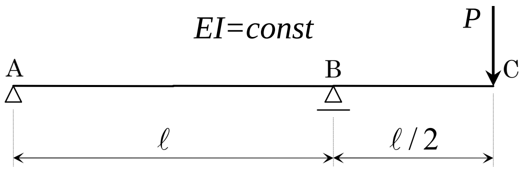
$$\tilde{M}_B + P_1\cdot x_G^1 + P_2\cdot x_G^2 + P_3\cdot x_G^3 = 0$$

$$\therefore -\tilde{M}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell\cdot\frac{2}{3}\ell + \frac{1}{9}\alpha\ell\cdot\frac{4}{9}\ell + \frac{1}{12}\alpha\ell\cdot\frac{2}{9}\ell = \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{81}+\frac{1}{54}\right)\cdot\alpha\ell^2 = \frac{54+8+3}{162}\alpha\ell^2 = \frac{65}{162}\alpha\ell^2$$

$$\therefore v_B = \tilde{M}_B = -\frac{65}{162}\alpha\ell = -\frac{65}{162}\cdot\left(-\frac{P\ell}{3EI}\right)\cdot\ell^2 = \frac{65}{486}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

よって、$\boxed{v_B = \dfrac{65}{486}\cdot\dfrac{P\ell^3}{EI}}$

【問題 EL-OB-1】下図に示す“張出ばり”の C 点のたわみ角 θ_C とたわみ y_C を求めよ。ただし、はりの曲げ剛性は EI で一定とする。



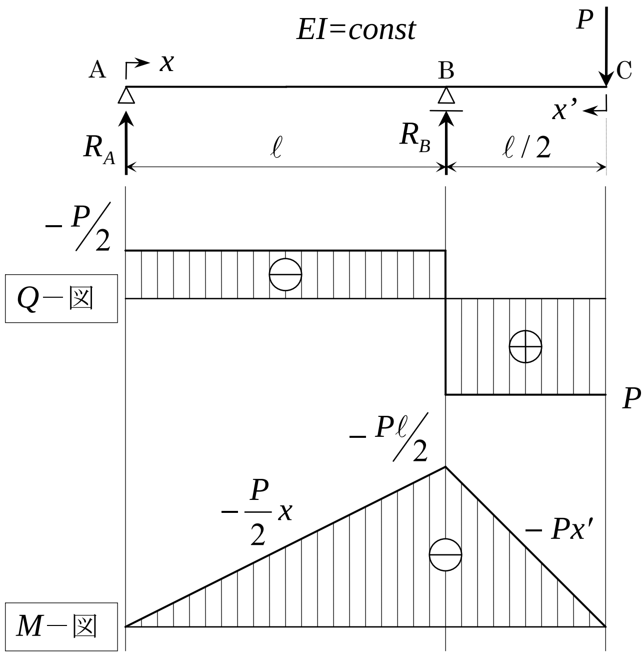
【解答】

支点反力を R_A, R_B とすると、

$$R_A + R_B = P$$

$$R_B \cdot \ell = P \cdot \left(\ell + \frac{\ell}{2} \right)$$

$$\therefore R_B = \frac{3}{2}P \quad R_A = -\frac{1}{2}P$$



これより、断面力図は、右図のようになる。

次に、〝弾性荷重〟（＝曲げモーメント／曲げ剛性）を求めると、

$$\alpha = -\frac{P\ell}{2EI}$$

また、「張出ばり」の〝共役ばり〟を考えると、

A 点…回転支点　→　回転支点

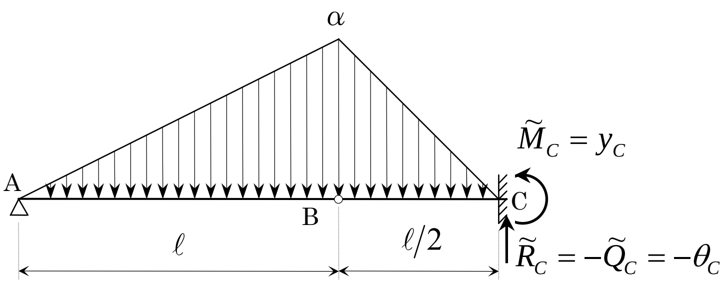
$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \widetilde{M} = 0 \\ \widetilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$

B 点…移動支点　→　ヒンジ

$$\begin{pmatrix} y = 0 \\ \theta_\ell = \theta_r \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \widetilde{M} = 0 \\ \widetilde{Q}_\ell = \widetilde{Q}_r \end{pmatrix}$$

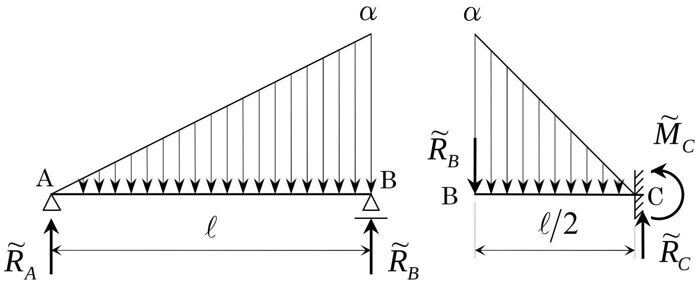
C 点…自由端　→　固定端

$$\begin{pmatrix} y \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \widetilde{M} \neq 0 \\ \widetilde{Q} \neq 0 \end{pmatrix}$$



となるから、〝弾性荷重〟を載荷した〝共役ばり〟は、右図のようになる。

これを下図のように「単純ばり」と「片持ばり」に分解して考える。



このとき、支点反力 $\widetilde{R}_A$, $\widetilde{R}_B$, $\widetilde{R}_C$, $\widetilde{M}_C$ は、「単純ばり」部分と「片持ばり」部分での釣合条件から次のように求まる。

「単純ばり」部分より、

$$\widetilde{R}_A + \widetilde{R}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad \widetilde{R}_B \cdot \ell = \frac{1}{2}\alpha\ell \cdot \frac{2}{3}\ell = \frac{1}{3}\alpha\ell^2 \qquad \therefore \widetilde{R}_B = \frac{1}{3}\alpha\ell, \quad \widetilde{R}_A = \frac{1}{6}\alpha\ell$$

「片持ばり」部分より、

$$\widetilde{R}_C = \widetilde{R}_B + \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}\alpha\ell + \frac{1}{4}\alpha\ell = \frac{7}{12}\alpha\ell \qquad \therefore \boxed{\theta_C = -\widetilde{R}_C = -\frac{7}{12}\cdot\left(-\frac{P\ell}{2EI}\right)\cdot\ell = \frac{7}{24}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}}$$

$$\widetilde{M}_C + \widetilde{R}_B \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\ell}{2}\cdot\left(\frac{\ell}{2}\cdot\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\therefore -\widetilde{M}_C = \frac{1}{3}\alpha\ell\cdot\frac{\ell}{2} + \frac{1}{12}\alpha\ell^2 = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)\cdot\alpha\ell^2 = \frac{1}{4}\alpha\ell^2$$

$$\therefore \boxed{y_C = \widetilde{M}_C = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{P\ell}{2EI}\right)\cdot\ell^2 = \frac{P\ell^3}{8EI}}$$