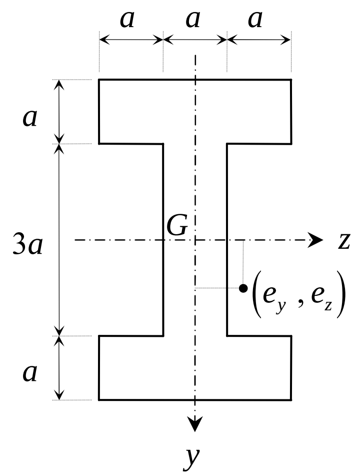
構造力学演習Ⅱ（2018-№.３） 2018/09/25

【問題 CM-CS-1a】下図に示す“Ｉ型断面”の〝断面の核〟を求め、図示せよ。



【解答】

図に示すように、重心 G を通る $y,\ z$ 軸は主軸となるから、$y,\ z$ 軸に関する断面２次モーメント I_y，I_z は、次のようになる。

$$I_y = \frac{3a\cdot a^3}{12} + \frac{a\cdot(3a)^3}{12}\times 2 = \left(\frac{1}{4}+\frac{9}{2}\right)\cdot a^4 = \frac{19}{4}a^4$$

$$I_z = \frac{a\cdot(3a)^3}{12} + 2\cdot 3a\cdot a\cdot\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{3a\cdot a^3}{12}\times 2$$

$$= \frac{9}{4}a^4 + 6\cdot 4a^4 + \frac{1}{2}a^4 = (\frac{9}{4}+24+\frac{1}{2})\cdot a^4 = \frac{9+96+2}{4}a^4 = \frac{107}{4}a^4$$

《別解》

$$I_z = \frac{3a\cdot(5a)^3}{12} - \frac{2a\cdot\left(3a\right)^3}{12} = \frac{125}{4}a^4 - \frac{9}{2}a^4 = \frac{125-18}{4}a^4 = \frac{107}{4}a^4$$

また、断面積 A は、$A = 3a^2\times 2 + 3a^2 = 9a^2$ だから、$y,\ z$ 軸に関する回転半径をそれぞれ r_y，r_z とすると、

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{19}{4}a^4}{9a^2} = \frac{19}{36}a^2 \qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{107}{4}a^4}{9a^2} = \frac{107}{36}a^2$$

ここで、載荷荷重の偏心位置を $\left(e_y\ ,e_z\right)$ とすると、中立軸は、$1+\dfrac{e_y}{r_z^2}y+\dfrac{e_z}{r_y^2}z=0$ と表され、中立軸が $y,\ z$ 軸と交わる点すなわち切片 n_y，n_z は、次のようになる。

$$n_y = -\frac{r_z^2}{e_y},\quad n_z = -\frac{r_y^2}{e_z} \qquad \text{逆に、}\qquad e_y = -\frac{r_z^2}{n_y},\quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z}$$

よって、〝断面の核〟の端の位置を決めるためには、中立軸が次の２通り（４通り）の限界位置にある場合について、載荷荷重の偏心位置を $\left(e_y\ ,e_z\right)$ を求めればよい。

(1)中立軸が $y=\pm\dfrac{5}{2}a$ となるとき、切片は、$n_y=\pm\dfrac{5}{2}a$，$n_z=\pm\infty$ となるから、

$$e_y=-\frac{r_z^2}{n_y}=-\frac{\frac{107}{36}a^2}{\pm\frac{5}{2}a}=\mp\frac{107}{36}\cdot\frac{2}{5}=\mp\frac{107}{90}a$$

$$e_z=-\frac{r_y^2}{n_z}=-\frac{\frac{19}{36}a^2}{\pm\infty}=0$$

$$\therefore\left(e_y\ ,e_z\right)=\left(\mp\frac{107}{90}a\ ,0\right)$$

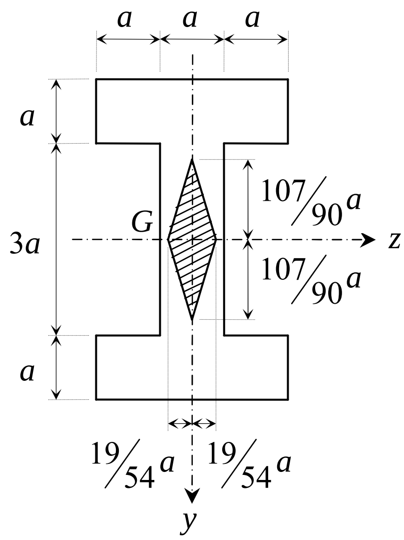
(2)中立軸が $z=\pm\dfrac{3}{2}a$ となるとき、切片は、$n_y=\pm\infty$，$n_z=\pm\dfrac{3}{2}a$ となるから、

$$e_y=-\frac{r_z^2}{n_y}=-\frac{\frac{107}{36}a^2}{\pm\infty}=0$$

$$e_z=-\frac{r_y^2}{n_z}=-\frac{\frac{19}{36}a^2}{\pm\frac{3}{2}a}=\mp\frac{19}{36}\cdot\frac{2}{3}a=\mp\frac{19}{54}a$$

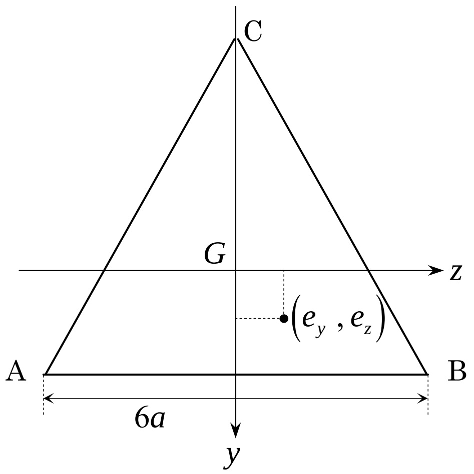
$$\therefore\left(e_y\ ,e_z\right)=\left(0\ ,\mp\frac{19}{54}a\right)$$

以上をまとめて、〝断面の核〟を斜線で図示すると下図のようになる。



【問題 CM-CS-3】

下図に示す一辺の長さが $6a$ の“正三角形断面”ABC の〝断面の核〟を求め、図示せよ。



【解答】

図に示す重心 G を通る y, z 軸は主軸となるから、z 軸に関する断面２次モーメント I_y, I_z は、次のようになる。

$$\frac{1}{2}I_y = \frac{3\sqrt{3}a\cdot(3a)^3}{36} + \left(\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}a\times 3a\right)\times(a)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^4 + \frac{9\sqrt{3}}{2}a^4 = \frac{27\sqrt{3}}{4}a^4 \qquad \therefore I_y = \frac{27\sqrt{3}}{2}a^4$$

$$I_z = \frac{6a\cdot\left(3\sqrt{3}a\right)^3}{36} = \frac{27\cdot 3\sqrt{3}}{6}a^4 = \frac{27\sqrt{3}}{2}a^4$$

また、断面積 A は、$A = \frac{1}{2}\times 6a\times 3\sqrt{3}a = 9\sqrt{3}a^2$ だから、y, z 軸に関する回転半径をそれぞれ r_y, r_z とすると、

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{27\sqrt{3}}{2}a^4}{9\sqrt{3}a^2} = \frac{3}{2}a^2 \qquad\qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{27\sqrt{3}}{2}a^4}{9\sqrt{3}a^2} = \frac{3}{2}a^2$$

ここで、載荷荷重の偏心位置を (e_y, e_z) とすると、中立軸は、$1 + \frac{e_y}{r_z^2}y + \frac{e_z}{r_y^2}z = 0$ と表され、

中立軸が y, z 軸と交わる点すなわち切片 n_y, n_z は、次のようになる。

$$n_y = -\frac{r_z^2}{e_y},\quad n_z = -\frac{r_y^2}{e_z} \qquad 逆に、\quad e_y = -\frac{r_z^2}{n_y},\quad e_z = -\frac{r_y^2}{n_z}$$

よって、〝断面の核〟の端の位置を決めるためには、中立軸が次の２通り（3 通り）の限界位置にある場合について、載荷荷重の偏心位置を (e_y, e_z) を求めればよい。

(1) 中立軸が AB となるとき、切片は、$n_y = \sqrt{3}a$, $n_z = \pm\infty$ となるから、

$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{\sqrt{3}a} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}a = -\frac{\sqrt{3}}{2}a \qquad \therefore (e_y, e_z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0\right)$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{\pm\infty} = 0$$

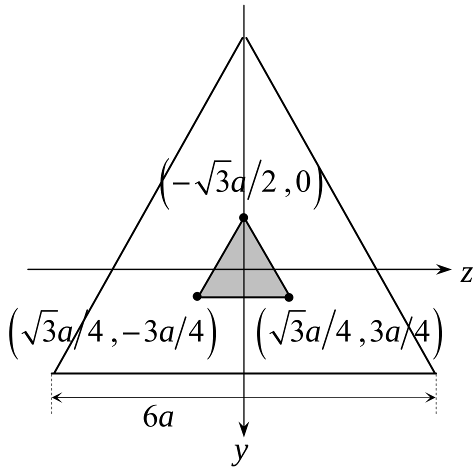
(2) 中立軸が BC または AC となるとき、切片は、$n_y = -2\sqrt{3}a$， $n_z = \pm 2a$ となるから、

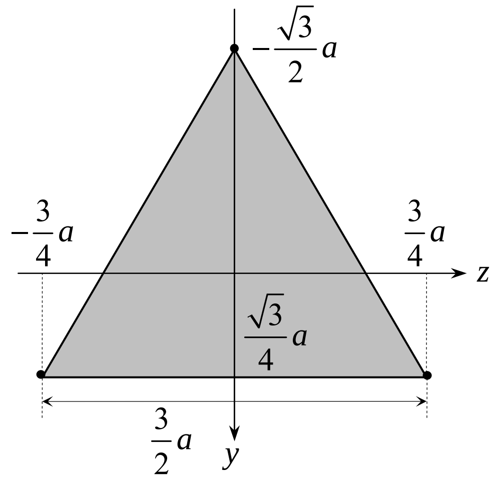
$$e_y = -\frac{r_z^2}{n_y} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{-2\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

$$e_z = -\frac{r_y^2}{n_z} = -\frac{\frac{3}{2}a^2}{\pm 2a} = \mp\frac{3}{4}a$$

$$\therefore \left(e_y, e_z\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a,\ \mp\frac{3}{4}a\right)$$

以上をまとめて、〝断面の核〟を塗りつぶしで図示すると下図のようになる。





『断面の核』拡大図

（一辺 $\frac{3}{2}a$ の正三角形）