構造力学演習Ⅱ（2018-№.５）　　2018/10/09

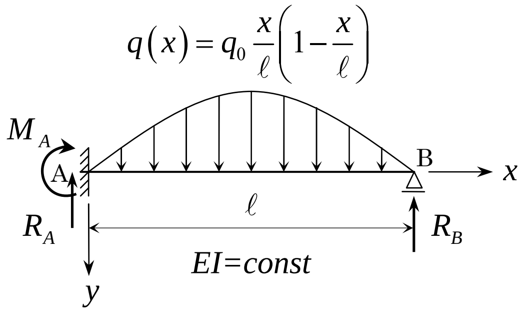
【１】右図に示すような一端固定・他端単純支持ばりに分布荷重 $q(x)=q_0\dfrac{x}{\ell}\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)$ が作用するとき、

(1) たわみ： $y\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

(2) たわみ角： $\theta\left(\dfrac{x}{\ell}\right)=y'\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

(3) 曲げモーメント： $M\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$

(4) せん断力： $Q\left(\dfrac{x}{\ell}\right)$



の式を求めよ。また、

(5) 支点反力 R_A， R_B と支点曲げモーメント M_A を求めよ。

ただし、はりの曲げ剛性は、EI で一定とする。

【解答】

(1)(2)はりのたわみと荷重の関係を表す４階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q(x)=q_0\dfrac{x}{\ell}\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)=\dfrac{q_0}{\ell}x-\dfrac{q_0}{\ell^2}x^2$

を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^3}{3}+C_1$$

$$EIy''=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^5}{60}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120}-\frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^6}{360}+C_1\frac{x^3}{6}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1， C_2， C_3， C_4 を求める。

1) $x=0$ のとき、$y'=0$ より、　　$C_3=0$

2) $x=0$ のとき、$y=0$ より、　　$C_4=0$

3) $x=\ell$ のとき、$y''=0$ より、　　$\dfrac{q_0}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^3}{6}-\dfrac{q_0}{\ell^2}\dfrac{\ell^4}{12}+C_1\ell+C_2=0$

$$\therefore C_1\ell+C_2=q_0\ell^2\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}q_0\ell^2 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

4) $x=\ell$ のとき、$y=0$ より、　　$\dfrac{q_0}{\ell}\cdot\dfrac{\ell^5}{120}-\dfrac{q_0}{\ell^2}\cdot\dfrac{\ell^6}{360}+C_1\dfrac{\ell^3}{6}+C_2\dfrac{\ell^2}{2}=0$

$$\therefore C_1\frac{\ell^3}{6}+C_2\frac{\ell^2}{2}=q_0\ell^4\left(\frac{1}{360}-\frac{1}{120}\right)=-\frac{2}{360}q_0\ell^4=-\frac{1}{180}q_0\ell^4$$

$$\therefore C_1\ell+3C_2=-\frac{1}{30}q_0\ell^2 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

②－①より、$2C_2=\left(-\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{12}\right)q_0\ell^2=\dfrac{-2+5}{60}q_0\ell^2=\dfrac{3}{60}q_0\ell^2=\dfrac{1}{20}q_0\ell^2$　　　$\therefore C_2=\dfrac{1}{40}q_0\ell^2$

これを①に代入して、$C_1\ell=-\dfrac{1}{12}q_0\ell^2-\dfrac{1}{40}q_0\ell^2=-\dfrac{10+3}{120}q_0\ell^2=-\dfrac{13}{120}q_0\ell^2$　　$\therefore C_1=-\dfrac{13}{120}q_0\ell$

よって、

$$EIy''' = \frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{13}{120}q_0\ell$$

$$EIy'' = \frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^3}{6} - \frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^4}{12} - \frac{13}{120}q_0\ell x + \frac{1}{40}q_0\ell^2$$

$$EIy' = \frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^4}{24} - \frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^5}{60} - \frac{13}{120}q_0\ell\frac{x^2}{2} + \frac{1}{40}q_0\ell^2 x$$

$$EIy = \frac{q_0}{\ell}\cdot\frac{x^5}{120} - \frac{q_0}{\ell^2}\cdot\frac{x^6}{360} - \frac{13}{120}q_0\ell\frac{x^3}{6} + \frac{1}{40}q_0\ell^2\frac{x^2}{2}$$

したがって、はりのたわみ $y\left(\frac{x}{\ell}\right)$ とたわみ角 $\theta\left(\frac{x}{\ell}\right) = y'\left(\frac{x}{\ell}\right)$ の式は、次のようになる。

$$EIy' = q_0\ell^3\left\{\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \frac{1}{60}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \frac{13}{240}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{40}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}$$

$$EIy = q_0\ell^4\left\{\frac{1}{120}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \frac{1}{360}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 - \frac{13}{720}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{1}{80}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\theta\left(\frac{x}{\ell}\right) = y'\left(\frac{x}{\ell}\right) &= \frac{q_0\ell^3}{EI}\left\{\frac{1}{24}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \frac{1}{60}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \frac{13}{240}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{40}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{240}\cdot\frac{q_0\ell^3}{EI}\left\{10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 4\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - 13\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 6\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}y\left(\frac{x}{\ell}\right) &= \frac{q_0\ell^4}{EI}\left\{\frac{1}{120}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \frac{1}{360}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 - \frac{13}{720}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{1}{80}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}\\ &= \frac{1}{720}\cdot\frac{q_0\ell^4}{EI}\left\{6\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - 2\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 - 13\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 9\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}\end{aligned}}$$

(3)(4)(5)上記(1)(2)より、せん断力 $Q = -EIy'''$，曲げモーメント $M = -EIy''$ は、次の式で表される。

$$\boxed{Q\left(\frac{x}{\ell}\right) = -EIy''' = -q_0\ell\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \frac{13}{120}\right\} = -\frac{q_0\ell}{120}\left\{60\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 40\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 13\right\}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}M\left(\frac{x}{\ell}\right) = -EIy'' &= -q_0\ell^2\left\{\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \frac{13}{120}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + \frac{1}{40}\right\}\\ &= -\frac{q_0\ell^2}{120}\left\{20\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 13\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + 3\right\}\end{aligned}}$$

したがって、A 点，B 点それぞれの支点反力 R_A，R_B と支点曲げモーメント M_A は、次のようになる。

$$R_A = Q_A = \left[-EIy'''\right]_{x=0} = -\left[EIy'''\right]_{x=0} = -\left(-\frac{13}{120}q_0\ell\right) = \frac{13}{120}q_0\ell$$

$$R_B = -Q_B = -\left[-EIy'''\right]_{x=\ell} = \left[EIy'''\right]_{x=\ell} = q_0\ell\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{13}{120}\right) = \frac{60-40-13}{120}q_0\ell = \frac{7}{120}q_0\ell$$

$$M_A = \left[-EIy''\right]_{x=0} = -\left[EIy''\right]_{x=0} = -\frac{1}{40}q_0\ell^2$$

$$\therefore\ \boxed{R_A = \frac{13}{120}q_0\ell},\ \boxed{R_B = \frac{7}{120}q_0\ell},\ \boxed{M_A = -\frac{1}{40}q_0\ell^2}$$