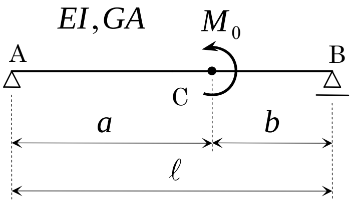
【問題 SE-B-2】下図に示す集中モーメント M_0 が作用する単純ばりのひずみエネルギー U を求めよ。
ただし、はりの曲げ剛性は EI，せん断弾性係数は G，断面積は A とする。



【解答】

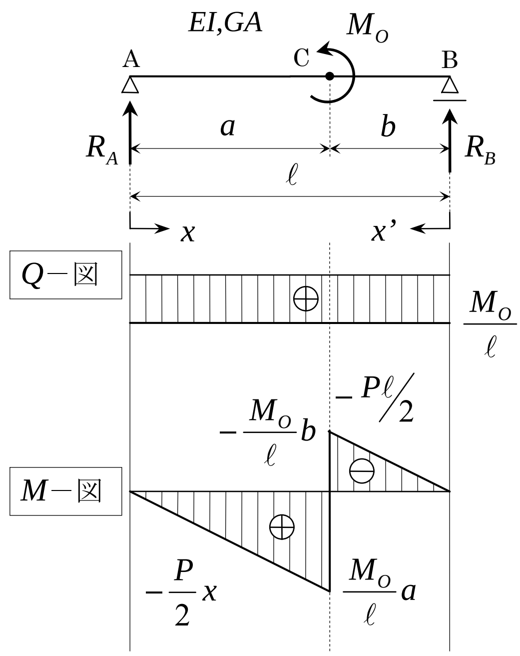
支点反力を R_A，R_B とすると、

$$R_A + R_B = P$$

$$R_B \cdot \ell = P \cdot \left(\ell + \frac{\ell}{2} \right)$$

$$\therefore R_B = \frac{3}{2}P \quad R_A = -\frac{1}{2}P$$

これより、断面力図は、右図のようになる。



したがって、ひずみエネルギー U は、次のようになる。

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \left(\frac{M^2}{EI} + \kappa \frac{Q^2}{GA} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{a} \left(\frac{1}{EI} \cdot \frac{M_O^2}{\ell^2} x^2 + \frac{\kappa}{GA} \cdot \frac{M_O^2}{\ell^2} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{b} \left(\frac{1}{EI} \cdot \frac{M_O^2}{\ell^2} x'^2 + \frac{\kappa}{GA} \cdot \frac{M_O^2}{\ell^2} \right) dx'$$

$$U = \frac{M_O{}^2}{2EI\ell^2}\int_0^a x^2 dx + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell^2} a$$

$$+ \frac{M_O{}^2}{2EI\ell^2}\int_0^b x'^2 dx' + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell^2} b$$

$$= \frac{M_O{}^2}{2EI\ell^2}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} \right) + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell^2}(a+b) = \frac{M_O{}^2 \left(a^3 + b^3 \right)}{6EI\ell^2} + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell}$$

$$= \frac{M_O{}^2}{6EI\ell^2}(a+b)\left(a^2 - ab + b^2 \right) + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell^2}(a+b)$$

$$= \frac{M_O{}^2}{6EI\ell}\left(a^2 - ab + b^2 \right) + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell}$$

$$= \frac{M_O{}^2}{6EI\ell}\left\{ (a+b)^2 - 3ab \right\} + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell}$$

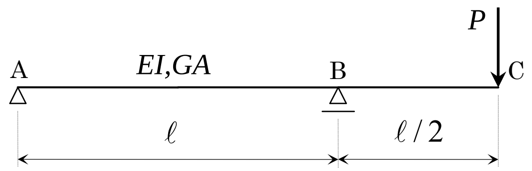
$$= \frac{M_O{}^2\ell}{6EI} - \frac{M_O{}^2}{2EI} \cdot \frac{ab}{\ell} + \frac{\kappa M_O{}^2}{2GA\ell}$$

$$\therefore \boxed{U = \frac{M_O^2}{6EI\ell}\left(a^2 - ab + b^2 \right) + \frac{\kappa M_O^2}{2GA\ell} = \frac{M_O^2\ell}{6EI} - \frac{M_O^2}{2EI} \cdot \frac{ab}{\ell} + \frac{\kappa M_O^2}{2GA\ell}}$$

ここで、U を M_O で偏微分すると、（カステリアーノの第 2 定理）

$$\frac{\partial U}{\partial M_O} = \frac{M_O}{3EI\ell}\left(a^2 - ab + b^2 \right) + \frac{\kappa M_O}{GA\ell} = \frac{M_O\ell}{3EI} - \frac{M_O}{EI} \cdot \frac{ab}{\ell} + \frac{\kappa M_O}{GA\ell}$$ ➡C 点の相対角

【問題 SE-B-1】下図に示す張出ばりのひずみエネルギーUを求めよ。ただし、はりの曲げ剛性はEI, せん断弾性係数はG, 断面積はAとする。



【解答】

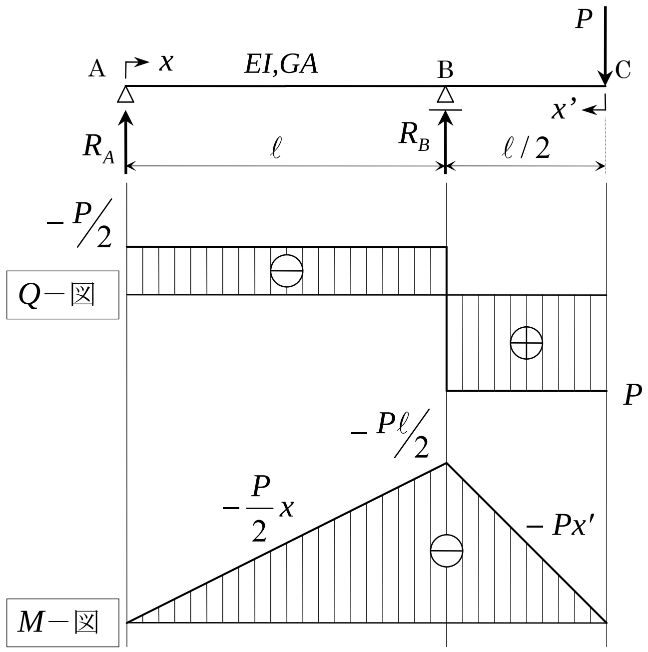
支点反力をR_A, R_Bとすると、

$$R_A + R_B = P$$

$$R_B \cdot \ell = P \cdot \left(\ell + \frac{\ell}{2}\right)$$

$$\therefore R_B = \frac{3}{2}P \quad R_A = -\frac{1}{2}P$$

これより、断面力図は、右図のようになる。



したがって、ひずみエネルギーUは、次のようになる。

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}\ell}\left(\frac{M^2}{EI} + \kappa\frac{Q^2}{GA}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{1}{EI}\cdot\frac{P^2}{4}x^2 + \frac{\kappa}{GA}\cdot\frac{P^2}{4}\right)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\ell}\left(\frac{1}{EI}\cdot P^2x'^2 + \frac{\kappa}{GA}\cdot P^2\right)dx'$$

$$U = \frac{P^2}{8EI}\int_0^{\ell}x^2dx + \frac{\kappa P^2}{8GA}\ell + \frac{P^2}{2EI}\int_0^{\frac{1}{2}\ell}x'^2dx' + \frac{\kappa P^2}{2GA}\cdot\frac{\ell}{2}$$

$$= \frac{P^2}{8EI}\cdot\frac{\ell^3}{3} + \frac{P^2}{2EI}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\ell^3}{8} + \frac{\kappa P^2}{8GA}\cdot(\ell + 2\ell)$$

$$= \frac{P^2\ell^3}{48EI}\cdot(2+1) + \frac{3}{8}\cdot\frac{\kappa P^2\ell}{GA} = \frac{P^2\ell^3}{16EI} + \frac{3}{8}\cdot\frac{\kappa P^2\ell}{GA}$$

$$\therefore \boxed{U = \frac{1}{16}\cdot\frac{P^2\ell^3}{EI} + \frac{3}{8}\cdot\frac{\kappa P^2\ell}{GA}}$$

ここで、UをPで偏微分すると、（カステリアーノの第 2 定理）

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{8}\cdot\frac{P\ell^3}{EI} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\kappa P\ell}{GA}$$ ➡C 点の変位