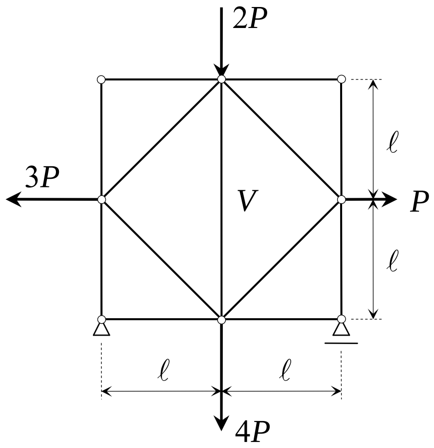
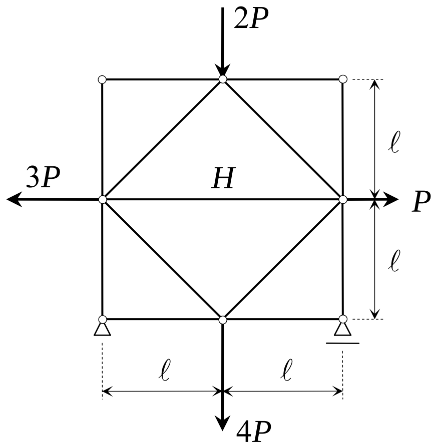
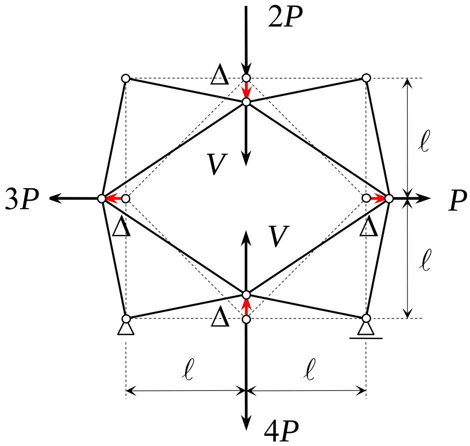
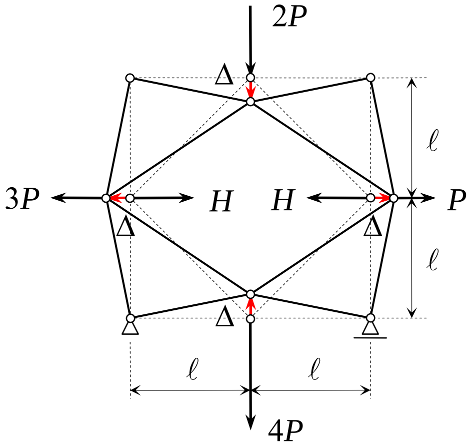
【問題 UD-T-3】下図のトラスの鉛直材 V，水平材 H の部材力を〝**仮想変位の原理**〟を用いて求めよ。





【解答】





変位の境界条件を満足する単位の仮想変位 Δ による変位性状は、上図のようになるから、

（左上図について）

$$P\times(\Delta)+2P\times(\Delta)+3P\times(\Delta)+4P\times(-\Delta)+V\times(\Delta)+V\times(\Delta)=0$$

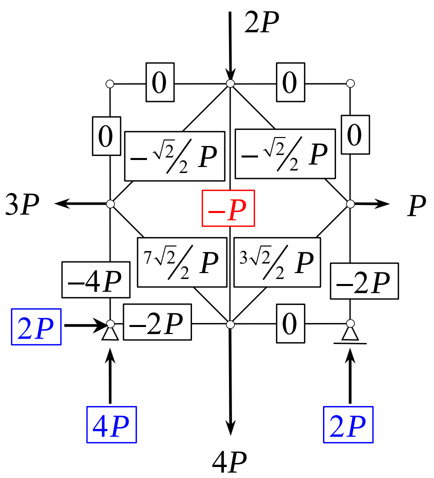
$$\therefore (P+2P+3P-4P+V+V)\times\Delta=0 \qquad \therefore 2P+2V=0 \qquad \therefore \boxed{V=-P}$$

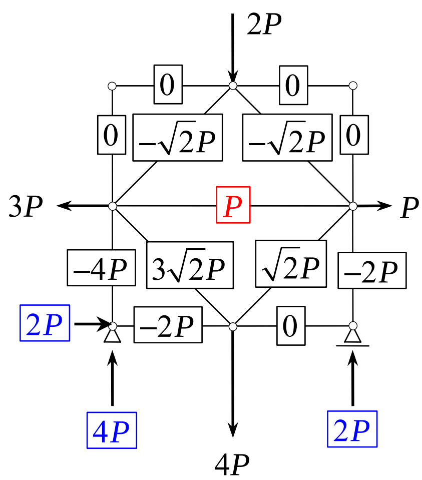
（右上図について）

$$P\times(\Delta)+2P\times(\Delta)+3P\times(\Delta)+4P\times(-\Delta)+H\times(-\Delta)+H\times(-\Delta)=0$$

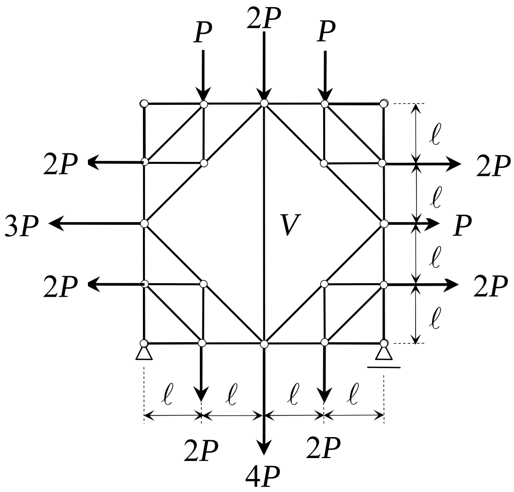
$$\therefore (P+2P+3P-4P-H-H)\times\Delta=0 \qquad \therefore 2P-2H=0 \qquad \therefore \boxed{H=P}$$

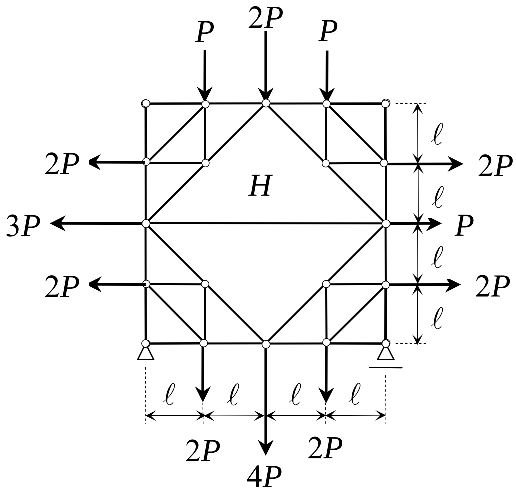
ちなみに、〝節点法〟によりすべての部材力を求めると、下図のようになる。





【問題 UD-T-3X】下図のトラスの鉛直材 V, 水平材 H の部材力を〝**仮想変位の原理**〟を用いて求めよ。





【解答】

変位の境界条件を満足する単位の仮想変位 Δ による変位性状は、【問題 UD-T-3】と同様になるから、

（左上図について）

上側： $P\times\left(\Delta/2\right)+2P\times(\Delta)+P\times\left(\Delta/2\right)$

左側： $+2P\times\left(\Delta/2\right)+3P\times(\Delta)+2P\times\left(\Delta/2\right)$

右側： $+2P\times\left(\Delta/2\right)+P\times(\Delta)+2P\times\left(\Delta/2\right)$

下側： $+2P\times\left(-\Delta/2\right)+4P\times(-\Delta)+2P\times\left(-\Delta/2\right)$

部材力： $+V\times(\Delta)+V\times(\Delta)=0$

➡

$3P\times(\Delta)$

$+5P\times(\Delta)$

$+3P\times(\Delta)$

$+6P\times(-\Delta)$

$+2V\times(\Delta)=0$

$\therefore (5P+2V)\times\Delta=0$　　$\therefore 5P+2V=0$　　$\therefore \boxed{V=-\dfrac{5}{2}P}$

（右上図について）

上側： $P\times\left(\Delta/2\right)+2P\times(\Delta)+P\times\left(\Delta/2\right)$

左側： $+2P\times\left(\Delta/2\right)+3P\times(\Delta)+2P\times\left(\Delta/2\right)$

右側： $+2P\times\left(\Delta/2\right)+P\times(\Delta)+2P\times\left(\Delta/2\right)$

下側： $+2P\times\left(-\Delta/2\right)+4P\times(-\Delta)+2P\times\left(-\Delta/2\right)$

部材力： $+H\times(-\Delta)+H\times(-\Delta)=0$

➡

$3P\times(\Delta)$

$+5P\times(\Delta)$

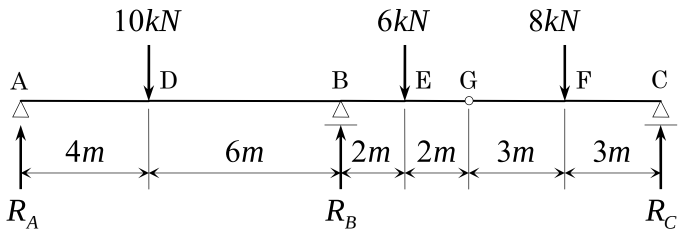
$+3P\times(\Delta)$

$+6P\times(-\Delta)$

$+2H\times(-\Delta)=0$

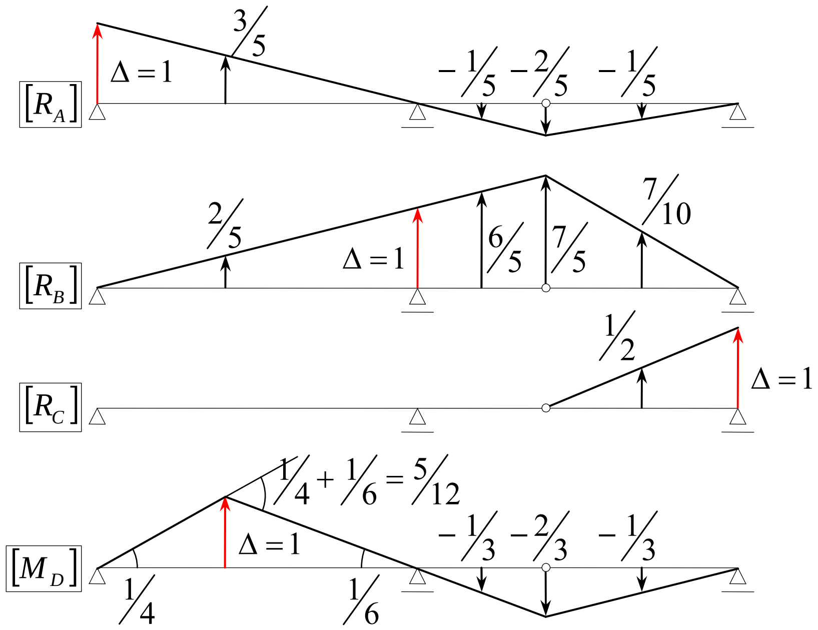
$\therefore (5P-2H)\times\Delta=0$　　$\therefore 5P-2H=0$　　$\therefore \boxed{H=\dfrac{5}{2}P}$

【問題 UD-G-2】下図に示すゲルバーばりの支点反力 R_A， R_B， R_C と D 点の曲げモーメント M_D を〝**仮想変位の原理**〟を用いて求めよ。



【解答】

境界条件を満足し、単位の仮想変位 $\Delta=1$ に対応する変位の性状は下図のようになる。



これを用いて、支点反力 R_A， R_B， R_C および曲げモーメント M_D を求める。

(1) 支点反力 R_A

$$R_A\times1+10kN\times\left(-\frac{3}{5}\right)+6kN\times\left\{-\left(-\frac{1}{5}\right)\right\}+8kN\times\left\{-\left(-\frac{1}{5}\right)\right\}=0$$

$\therefore\ R_A-6kN+1.2kN+1.6kN=0$ $\qquad\therefore \boxed{R_A=6-1.2-1.6=3.2\,kN}$

(2) 支点反力 R_B

$$R_B\times1+10kN\times\left(-\frac{2}{5}\right)+6kN\times\left(-\frac{6}{5}\right)+8kN\times\left(-\frac{7}{10}\right)=0$$

$\therefore\ R_B-4kN-7.2kN-5.6kN=0$ $\qquad\therefore \boxed{R_B=4+7.2+5.6=16.8\,kN}$

(3) 支点反力 R_C

$$R_C\times1+8kN\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \qquad\therefore \boxed{R_C=4\,kN}$$

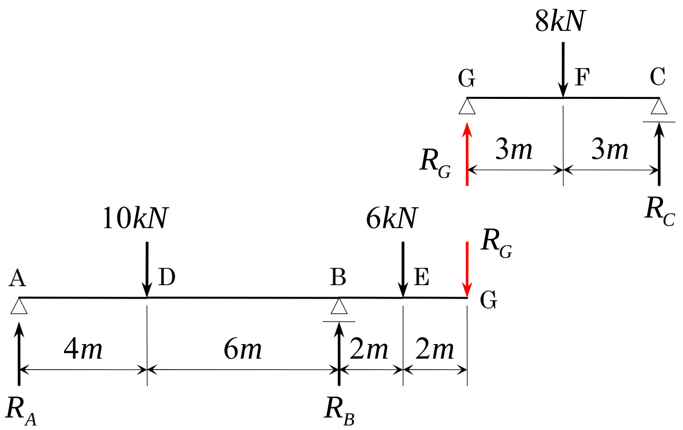
(4) 曲げモーメント M_D

$$M_D\times\frac{5}{12}+10kN\times(-1m)+6kN\times\left\{-\left(-\frac{1}{3}m\right)\right\}+8kN\times\left\{-\left(-\frac{1}{3}m\right)\right\}=0$$

$$\therefore\ \frac{5}{12}M_D-10kN\cdot m+2kN\cdot m+\frac{8}{3}kN\cdot m=0$$

$$\therefore\ \frac{5}{12}M_D=10-2-\frac{8}{3}=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}\,kN\cdot m \qquad\therefore \boxed{M_D=\frac{16}{3}\cdot\frac{12}{5}=\frac{64}{5}=12.8\,kN\cdot m}$$

〔***Check***〕



問題のゲルバーばりを分解すると、上図のようになる。
これを用いて、支点反力 R_A，R_B，R_C および曲げモーメント M_D を求める。

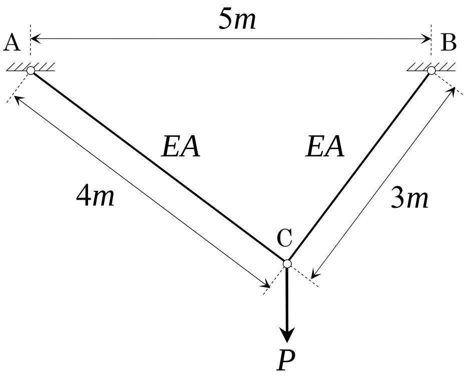
$R_C = R_G = 4kN$

$10R_B = 10\times 4 + 6\times 12 + R_G \times 14 = 40 + 72 + 56 = 168 \quad \therefore R_B = 16.8kN$

$R_A + R_B = 10 + 6 + R_G = 16 + 4 = 20 \quad \therefore R_A = 20 - 16.8 = 3.2kN$

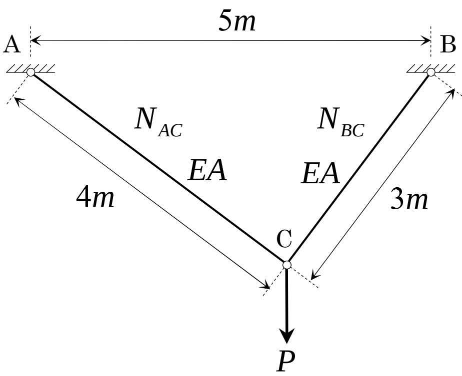
$M_D = R_A \times 4 = 3.2\times 4 = 12.8 \quad \therefore M_D = 12.8kN \cdot m$

【問題 UL-T-1】下図に示すトラスの載荷点 C の鉛直変位 v_C と水平変位 u_C を求めよ。ただし、各部材の引張剛性 EA は一定とする。



【解答】

右図のように、C 点に次の３つがそれぞれ作用するときの部材力 N_{AC}， N_{BC} を求めると、次のようになる。



1) 集中荷重 P

水平方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5}N_{AC} = \frac{3}{5}N_{BC} \quad \therefore N_{BC} = \frac{4}{3}N_{AC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

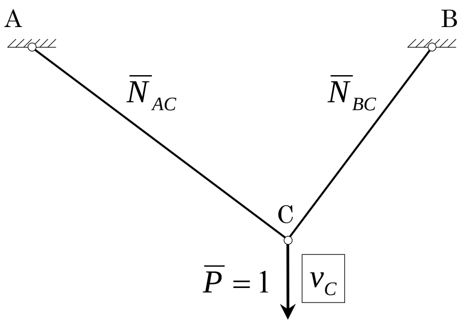
鉛直方向の力の釣合から、

$$\frac{3}{5}N_{AC} + \frac{4}{5}N_{BC} = P \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

①を②に代入すると、

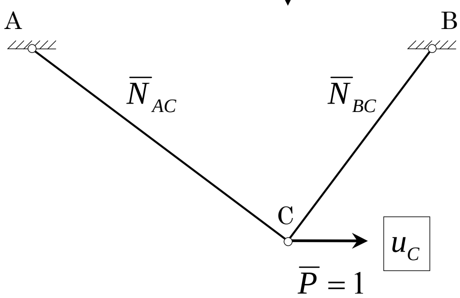
$$\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot N_{AC} = \frac{9+16}{15}N_{AC} = \frac{25}{15}N_{AC} = \frac{5}{3}N_{AC} = P$$

$$\therefore N_{AC} = \frac{3}{5}P,\quad N_{BC} = \frac{4}{5}P$$



2) 単位の鉛直方向集中荷重 $\overline{P} = 1$

上記 1)と同様にして、$\overline{N}_{AC} = \dfrac{3}{5}$，　$\overline{N}_{BC} = \dfrac{4}{5}$



3) 単位の水平方向集中荷重 $\overline{P} = 1$

水平方向の力の釣合から、

$$\frac{4}{5}\overline{N}_{AC} = \frac{2}{5}\overline{N}_{BC} + \overline{P} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①'$$

鉛直方向の力の釣合から、

$$\frac{3}{5}\overline{N}_{AC} + \frac{4}{5}\overline{N}_{BC} = 0$$

$$\therefore \overline{N}_{BC} = -\frac{3}{4}\overline{N}_{AC} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②'$$

②'を①'に代入すると、

$$\left\{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right\}\cdot\overline{N}_{AC} = \frac{16+9}{20}\overline{N}_{AC} = \frac{25}{20}\overline{N}_{AC} = \frac{5}{4}\overline{N}_{AC} = \overline{P} = 1$$

$$\therefore \overline{N}_{AC} = \frac{4}{5},\quad \overline{N}_{BC} = -\frac{3}{5}$$

以上より、〝単位荷重法〟を用いて、点 C の鉛直変位 v_C と水平変位 u_C を求めると、次のようになる。

$$1 \times v_C = \int_0^{\ell} \frac{N\overline{N}}{EA} dx = \frac{1}{EA}\left\{\frac{3}{5}P \cdot \frac{3}{5} \times 4m + \frac{4}{5}P \cdot \frac{4}{5} \times 3m\right\} = \frac{P}{EA}\left(\frac{36}{25} + \frac{48}{25}\right) = \frac{84}{25} \cdot \frac{P}{EA}$$

$$\therefore \boxed{v_C = \frac{84}{25} \cdot \frac{P}{EA} \quad (m)}$$

$$1 \times u_C = \int_0^{\ell} \frac{N\overline{N}}{EA} dx = \frac{1}{EA}\left\{\frac{3}{5}P \cdot \frac{4}{5} \times 4m + \frac{4}{5}P \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \times 3m\right\} = \frac{P}{EA}\left(\frac{48}{25} - \frac{26}{25}\right) = \frac{12}{25} \cdot \frac{P}{EA}$$

$$\therefore \boxed{u_C = \frac{12}{25} \cdot \frac{P}{EA} \quad (m)}$$