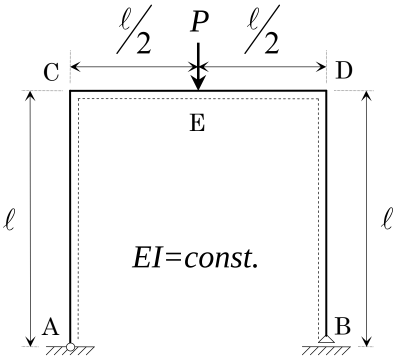
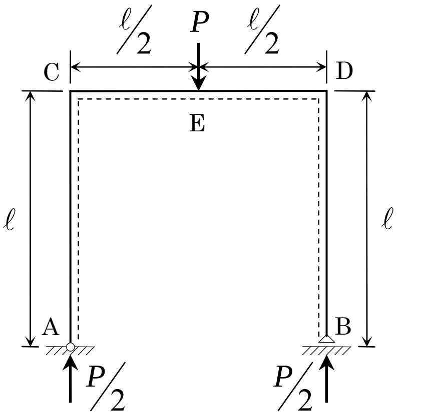
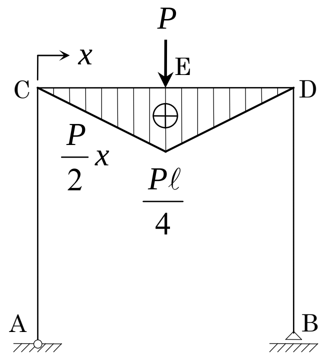
【問題 UL-R-4】下図に示す静定ラーメンの B 点の水平右方向の変位 Δ_B を〝**単位荷重法**〟を用いて求めよ。ただし、曲げ剛性 EI は一定とし、軸方向力・せん断力の影響は無視する。また、曲げモーメントは、点線側が〝引張〟となる曲げモーメントを〝正〟とする。



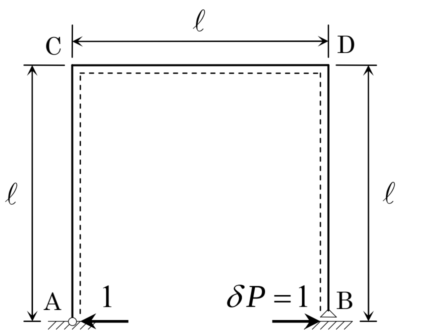
【解答】

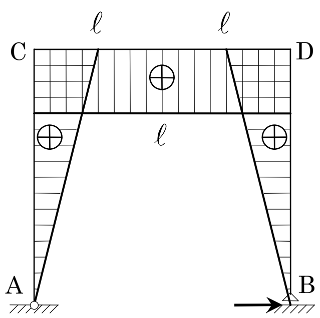
実系の曲げモーメント図（Mー図）を求めると、下左図より、下右図のようになる。





次に、下左図のような仮想系の曲げモーメント図（$\overline{M}$ー図）を求めると、下右図のようになる。



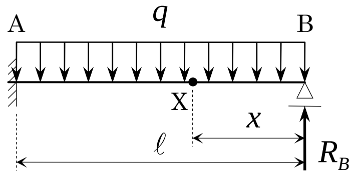


これに、〝単位荷重法〟を適用すれば、次のようになる。

$$1\times\Delta_B=\int\frac{M\overline{M}}{EI}dx=\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{P}{2}x\right)\cdot\ell dx=\frac{2}{EI}\cdot\frac{P\ell}{2}\int_0^{\frac{\ell}{2}}xdx=\frac{P\ell}{EI}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\ell}{2}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore\boxed{\Delta_B=\frac{1}{8}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

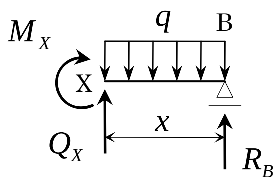
【問題 LW-B-4】下図に示すような曲げ剛性 EI が一定で、等分布荷重 q が作用する 1 次不静定ばりの B 点の支点反力 R_B を **〝最小仕事の原理〟** を用いて求めよ。なお、せん断力の影響は無視する。



$$EI = const.$$

【解答】

不静定力を R_B とし、支点 B の左側距離 x の点 X の曲げモーメント M_X を考えると、右図のようになるから、



$$M_X + qx \cdot \frac{x}{2} = R_B \cdot x \qquad \therefore M_X = R_B \cdot x - \frac{q}{2} x^2$$

したがって、ひずみエネルギーU は、以下のように表される。

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \frac{M_X^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI}\int_0^{\ell}\left(R_B \cdot x - \frac{q}{2}x^2\right)^2 dx$$

U を計算する際に、R_B での偏微分を先に行い、〝最小仕事の原理〟$\dfrac{\partial U}{\partial R_B} = 0$ より R_B を求めると、次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{1}{EI}\int_0^{\ell}\left(R_B \cdot x - \frac{q}{2}x^2\right)\cdot x dx = \frac{1}{EI}\left[R_B \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_0^{\ell} = 0$$

$$\therefore R_B \cdot \frac{\ell^3}{3} - \frac{q}{2}\cdot\frac{\ell^4}{4} = 0 \qquad \therefore \boxed{R_B = \frac{q\ell^4}{8}\cdot\frac{3}{\ell^3} = \frac{3}{8}q\ell}$$

《別解》

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\frac{M_X^2}{EI}dx = \frac{1}{2EI}\int_0^{\ell}\left(R_B \cdot x - \frac{q}{2}x^2\right)^2 dx = \frac{1}{2EI}\int_0^{\ell}\left(R_B^2 \cdot x^2 - R_B \cdot q \cdot x^3 + \frac{q^2}{4}x^4\right)dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\left[R_B^2 \cdot \frac{x^3}{3} - R_B \cdot q \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{q^2}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\right]_0^{\ell} = \frac{1}{2EI}\left[R_B^2 \cdot \frac{\ell^3}{3} - R_B \cdot q \cdot \frac{\ell^4}{4} + \frac{q^2}{4}\cdot\frac{\ell^5}{5}\right]$$

ここで、U を R_B で偏微分して、〝最小仕事の原理〟$\dfrac{\partial U}{\partial R_B} = 0$ より R_B を求めると、次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{1}{2EI}\left[\frac{2}{3}R_B \cdot \ell^3 - q \cdot \frac{\ell^4}{4}\right] = 0 \qquad \therefore \frac{2}{3}R_B \cdot \ell^3 - q \cdot \frac{\ell^4}{4} = 0 \qquad \therefore \boxed{R_B = \frac{q\ell^4}{4}\cdot\frac{3}{2\ell^3} = \frac{3}{8}q\ell}$$

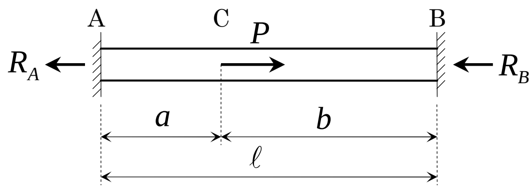
【問題 CA1-1】下図のような長さℓ，ヤング係数Eの真直な棒の両端A, Bを固定し、点Cに軸方向外力 P を作用させるとき、固定端に生じる反力R_A， R_Bを次の２通りの方法で求めよ。ただし、棒の断面積Aは一定とする。

①部分AC, BCの伸びをそれぞれΔ_1， Δ_2として、

力の釣合条件，フックの法則，変位の適合条件（$\Delta_1+\Delta_2=0$）

から求める方法。

②点 C の右向きの変位をΔとし、棒に蓄えられるひずみエネルギーUと〝カステリアーノの第１定理〟より求める方法。



【解答①】

力の釣合条件より、 $R_A+R_B-P=0$ …………①

また、部分AC, BCの軸方向力をそれぞれN_1， N_2とすると、

$N_1=R_A$ …………②

$N_2=-R_B$ …………③

次に、部分AC, BCの伸びをそれぞれΔ_1， Δ_2とすると、フックの法則と②，③式より、

$N_1=EA\dfrac{\Delta_1}{a}$ $\quad\therefore \Delta_1=\dfrac{N_1}{EA}a=\dfrac{R_A}{EA}a$ …………④

$N_2=EA\dfrac{\Delta_2}{b}$ $\quad\therefore \Delta_2=\dfrac{N_2}{EA}b=-\dfrac{R_B}{EA}b$ …………⑤

さらに、変位の適合条件を考えると、両端は固定されて棒の長さは不変だから、

$\Delta_1+\Delta_2=0$ …………⑥

よって、⑥式に④，⑤式を代入して、

$$\Delta_1+\Delta_2=\frac{1}{EA}\left(R_A\cdot a-R_B\cdot b\right)=0 \qquad \therefore R_A\cdot a-R_B\cdot b=0 \qquad \therefore R_B=\frac{a}{b}R_A$$

これを①式に代入すると、

$$R_A+\frac{a}{b}R_A-P=\frac{a+b}{b}R_A-P=\frac{\ell}{b}R_A-P=0 \qquad \therefore \boxed{R_A=\frac{b}{\ell}P,\quad R_B=\frac{a}{\ell}P}$$

【解答②】

点Cの右向きの変位をΔとし、部分AC, BCの軸方向力をそれぞれN_1， N_2とすると、

$$N_1^2=\left(EA\frac{\Delta}{a}\right)^2 \qquad N_2^2=\left(EA\frac{\Delta}{b}\right)^2$$

このとき、棒に蓄えられるひずみエネルギーUは、次のようになる。

$$U=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{N_1^2}{EA}dx+\frac{1}{2}\int_0^b\frac{N_2^2}{EA}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{EA}\cdot\left(EA\frac{\Delta}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{EA}\cdot\left(EA\frac{\Delta}{b}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{EA}{a}\Delta^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{EA}{b}\Delta^2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot EA\Delta^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{ab}\cdot EA\Delta^2=\frac{EA\ell}{2ab}\cdot\Delta^2$$

〝カステリアーノの第１定理〟より、$\dfrac{\partial U}{\partial\Delta}=P$すなわち、$\dfrac{\partial U}{\partial\Delta}=\dfrac{EA\ell}{ab}\Delta=P$ $\qquad\therefore \Delta=\dfrac{ab}{EA\ell}P$

したがって、$\boxed{R_A=EA\dfrac{\Delta}{a}=\dfrac{b}{\ell}P,\quad R_B=EA\dfrac{\Delta}{b}=\dfrac{a}{\ell}P}$