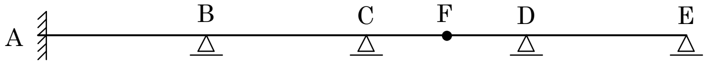
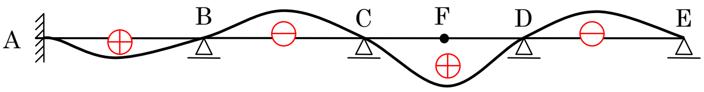
構造力学演習Ⅱ（2018-№11） 2018/11/27

【問題 MB-2】 **〝ミューラー・ブレスラウ(Müller-Breslau)の定理〟**を用いて、
下図に示す不静定ばりの F 点のたわみ v_F，せん断力 Q_F，曲げモーメント M_F と支点反力 R_A，R_B の影響線の概略を図示せよ。ただし、図中には、正負の符号を必ず明記すること。

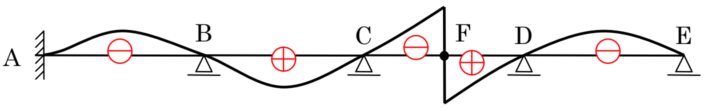


【解答】

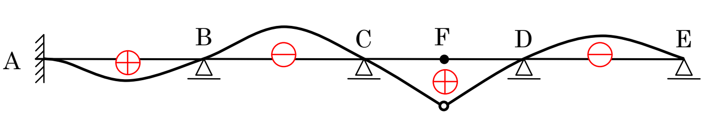
F 点のたわみ v_F



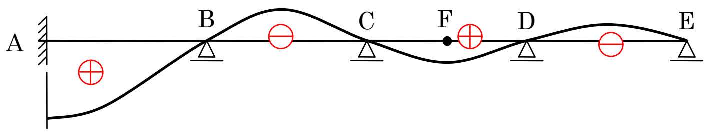
F 点のせん断力 Q_F



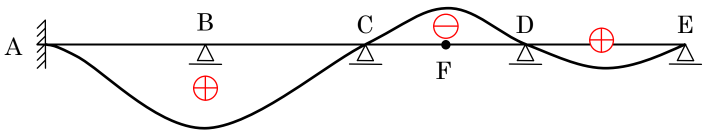
F 点の曲げモーメント M_F



支点反力 R_A



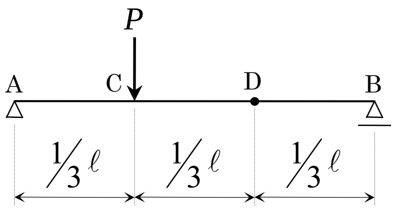
支点反力 R_B



【問題 CP-2】下図に示す単純ばりの C 点に集中荷重 P が載荷されるとき、D 点の鉛直方向変位 v_D を次の２通りの方法で求めよ。ただし、はりの曲げ剛性は EI で一定とし、せん断力の影響は無視する。

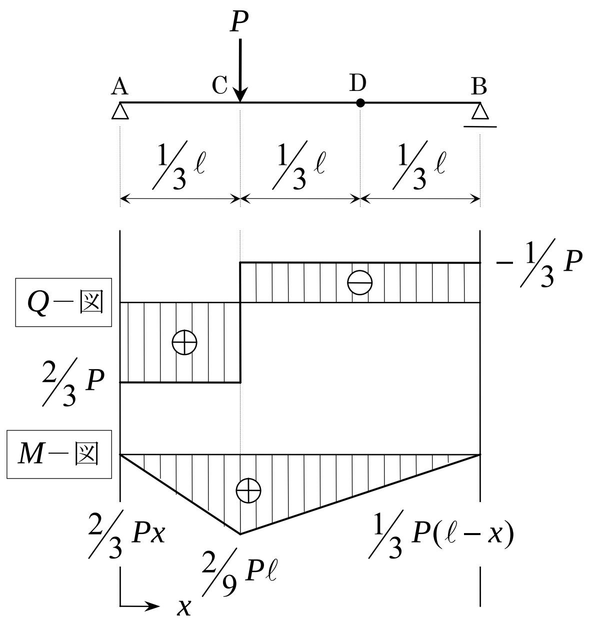
(1) **〝単位荷重法〟**

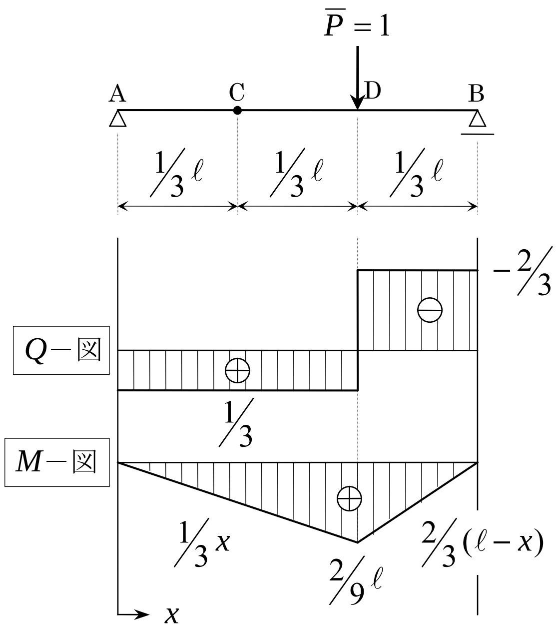
(2) **〝カステリアーノの第2定理〟**



【解答】(1) **〝単位荷重法〟**による解答

実系と仮想系の断面力図を図示すると、下左図と下右図のようになる。





よって、D 点の鉛直方向変位 v_D は、次のように求められる。

$$1\times v_D=\int_0^{\ell}\frac{M\delta M}{EI}dx$$

ここで、EI=*const* であるから、

$$EI\times v_D=\int_0^{\ell}M\delta M dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{3}\ell}\left(\frac{2}{3}Px\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)dx+\int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell}\left(\frac{1}{3}P(\ell-x)\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)dx+\int_{\frac{2}{3}\ell}^{\ell}\left(\frac{1}{3}P(\ell-x)\right)\cdot\left(\frac{2}{3}(\ell-x)\right)dx$$

$$=\frac{2}{9}P\cdot\int_0^{\frac{1}{3}\ell}x^2\,dx+\frac{1}{9}P\cdot\int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell}(\ell x-x^2)\,dx+\frac{2}{9}P\cdot\int_{\frac{2}{3}\ell}^{\ell}(\ell-x)^2\,dx$$

$$EI \times v_D = \frac{2}{9} P \cdot \frac{\frac{1}{27}\ell^3}{3} + \frac{1}{9} P \cdot \left\{ \ell \cdot \frac{\frac{4}{9}\ell^2}{2} - \frac{\frac{8}{27}\ell^3}{3} - \ell \cdot \frac{\frac{1}{9}\ell^2}{2} + \frac{\frac{1}{27}\ell^3}{3} \right\}$$

$$+ \frac{2}{9} P \cdot \left\{ \ell^2 \cdot \ell - \ell \cdot \ell^2 + \frac{\ell^3}{3} - \ell^2 \cdot \frac{2}{3}\ell + \ell \cdot \frac{4}{9}\ell^2 - \frac{\frac{8}{27}\ell^3}{3} \right\}$$

$$EI \times v_D = \frac{2}{729} P\ell^3 + \frac{1}{9} P\ell^3 \cdot \left\{ \frac{2}{9} - \frac{8}{81} - \frac{1}{18} + \frac{1}{81} \right\} + \frac{2}{9} P\ell^3 \cdot \left\{ \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{81} \right\}$$

$$= \frac{2}{729} P\ell^3 + \frac{1}{9} P\ell^3 \cdot \frac{36 - 16 - 9 + 2}{162} + \frac{2}{9} P\ell^3 \cdot \frac{27 - 54 + 36 - 8}{81}$$

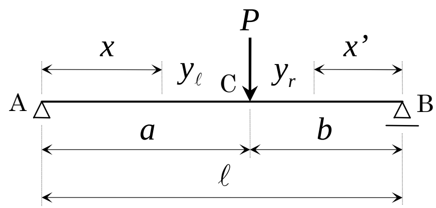
$$= \frac{2}{729} P\ell^3 + \frac{1}{9} P\ell^3 \cdot \frac{13}{162} + \frac{2}{9} P\ell^3 \cdot \frac{1}{81} = \frac{2}{729} P\ell^3 + \frac{13}{1458} P\ell^3 + \frac{2}{729} P\ell^3$$

$$= \frac{4 + 13 + 4}{1458} P\ell^3 = \frac{21}{1458} P\ell^3 = \frac{7}{486} P\ell^3$$

$$\therefore \boxed{v_D = \frac{7}{486} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}}$$

《たわみの公式による別解》

教科書 pp.194 表 8･1(b)によると、右図のような場合、そのたわみ曲線は次のように表される。



$$y_\ell = \frac{Pa^2b^2}{6EI\ell} \left(2\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2 b} \right)$$

$$y_r = \frac{Pa^2b^2}{6EI\ell} \left(2\frac{x'}{b} + \frac{x'}{a} - \frac{x'^3}{ab^2} \right)$$

この y_r の式に、$a = \frac{1}{3}\ell, b = \frac{2}{3}\ell, x' = \frac{1}{3}\ell$ を代入して、D 点のたわみ v_D を求めると次のようになる。

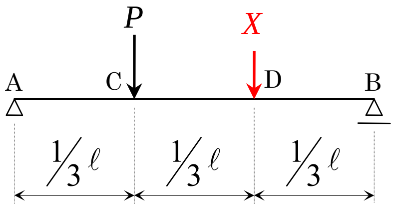
$$v_D = \frac{P\left(\frac{1}{3}\ell\right)^2 \left(\frac{2}{3}\ell\right)^2}{6EI\ell} \left(2\frac{\frac{1}{3}\ell}{\frac{2}{3}\ell} + \frac{\frac{1}{3}\ell}{\frac{1}{3}\ell} - \frac{\frac{1}{27}\ell^3}{\frac{1}{3}\ell \cdot \frac{4}{9}\ell^2} \right) = \frac{4}{486} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1 - \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 27} \right)$$

$$= \frac{2}{243} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} \left(1 + 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{243} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{486} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}$$

$$\therefore \boxed{v_D = \frac{7}{486} \cdot \frac{P\ell^3}{EI}}$$

【解答】 (2) 〝カステリアーノの第2定理〟による解答

右図のように、D 点にも仮想の集中荷重 X が載荷されていると考えたとき、曲げモーメント M は次のように表される。

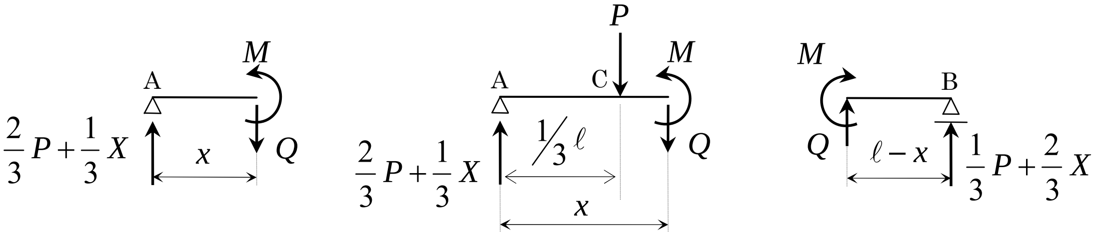


a) A～C 間　$M=\left(\dfrac{2}{3}P+\dfrac{1}{3}X\right)x$

b) C～D 間

$$M=\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}X\right)x-P\left(x-\frac{1}{3}\ell\right)=\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)x+\frac{1}{3}P\ell$$

c) D～B 間　$M=\left(\dfrac{1}{3}P+\dfrac{2}{3}X\right)(\ell-x)$



a) A～C 間　　b) C～D 間　　c) D～B 間

よって、このはりに蓄えられるひずみエネルギー U は、次のように表される。

$$U=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\frac{M^2}{EI}dx$$

ここで、EI=*const* であるから、

$$2EI\cdot U=\int_0^{\ell}M^2dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{3}\ell}\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}X\right)^2x^2dx+\int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell}\left\{\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)x+\frac{1}{3}P\ell\right\}^2dx+\int_{\frac{2}{3}\ell}^{\ell}\left(\frac{1}{3}P+\frac{2}{3}X\right)^2(\ell-x)^2dx$$

$$=\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}X\right)^2\int_0^{\frac{1}{3}\ell}x^2dx+\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)^2\int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell}x^2dx+\frac{2}{3}P\ell\cdot\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)\cdot\int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell}xdx$$

$$+\left(\frac{1}{3}P\ell\right)^2\int_{\frac{1}{3}\ell}^{\frac{2}{3}\ell}dx+\left(\frac{1}{3}P+\frac{2}{3}X\right)^2\int_{\frac{2}{3}\ell}^{\ell}(\ell-x)^2dx$$

$$2EI\cdot U=\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}X\right)^2\cdot\frac{1}{81}\ell^3+\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)^2\cdot\frac{7}{81}\ell^3+\frac{2}{3}P\ell\cdot\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)\cdot\frac{1}{6}\ell^2$$

$$+\left(\frac{1}{3}P\ell\right)^2\cdot\frac{1}{3}\ell+\left(\frac{1}{3}P+\frac{2}{3}X\right)^2\cdot\frac{1}{81}\ell^3$$

$$\therefore\frac{2EI}{\ell^3}\cdot U=\frac{1}{81}\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}X\right)^2+\frac{7}{81}\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)^2+\frac{1}{9}P\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)+\frac{1}{27}P^2+\frac{1}{81}\left(\frac{1}{3}P+\frac{2}{3}X\right)^2$$

これを X で偏微分すると、〝カステリアーノの第2定理〟により、次のようになる。

$$\frac{2EI}{\ell^3}\cdot\frac{\partial U}{\partial X}=\frac{2EI}{\ell^3}\cdot v_D=\frac{1}{81}\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}X\right)\frac{2}{3}+\frac{7}{81}\left(\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}P\right)\frac{2}{3}+\frac{1}{27}P+\frac{1}{81}\left(\frac{1}{3}P+\frac{2}{3}X\right)\frac{4}{3}$$

ここで、仮想の集中荷重 X は、X=0 だから、

$$\frac{2EI}{\ell^3}\cdot v_D=\frac{4}{729}P-\frac{14}{729}P+\frac{1}{27}P+\frac{4}{729}P=\frac{4-14+27+4}{729}P=\frac{21}{729}P=\frac{7}{243}P$$

$$\therefore\boxed{v_D=\frac{7}{243}P\cdot\frac{\ell^3}{2EI}=\frac{7}{486}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$