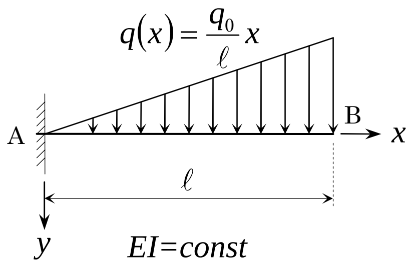
構造力学演習Ⅱ（2019-№.１） 2019/09/03

【問題 BD4-CL-2B】部材長 ℓ，曲げ剛性 EI を有する等断面“片持ばり”に下図に示すような等変分布荷重が載荷されたときのたわみ角 $\theta(x)$ とたわみ $y(x)$ の式を求めよ。また、最大たわみ $y_{\max}$ も求めよ。



【解答】

はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q(x)=\dfrac{q_0}{\ell}x$ を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=\frac{q_0}{2\ell}x^2+C_1$$

$$EIy''=\frac{q_0}{6\ell}x^3+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q_0}{24\ell}x^4+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q_0}{120\ell}x^5+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1， C_2， C_3， C_4 を求める。

(1) $x=0$ のとき、$y'=0$ より、 $C_3=0$

(2) $x=0$ のとき、$y=0$ より、 $C_4=0$

(3) $x=\ell$ のとき、$y'''=0$ より、 $\dfrac{q_0}{2\ell}\ell^2+C_1=0$ $\therefore C_1=-\dfrac{q_0\ell}{2}$

(4) $x=\ell$ のとき、$y''=0$ より、 $\dfrac{q_0}{6\ell}\ell^3+C_1\ell+C_2=0$ $\therefore C_2=-\dfrac{q_0\ell^2}{6}+\dfrac{q_0\ell^2}{2}=\dfrac{q_0\ell^2}{3}$

よって、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみ $y(x)$ の式は、次のようになる。

$$EIy'''=\frac{q_0}{2\ell}x^2-\frac{1}{2}q_0\ell$$

$$EIy''=\frac{q_0}{6\ell}x^3-\frac{1}{2}q_0\ell x+\frac{1}{3}q_0\ell^2$$

$$EIy'=\frac{q_0}{24\ell}x^4-\frac{1}{4}q_0\ell x^2+\frac{1}{3}q_0\ell^2x$$

$$EIy=\frac{q_0}{120\ell}x^5-\frac{1}{12}q_0\ell x^3+\frac{1}{6}q_0\ell^2x^2$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned}\theta(x)=y'(x)&=\frac{q_0}{24EI\ell}x^4-\frac{1}{4EI}q_0\ell x^2+\frac{1}{3EI}q_0\ell^2x\\&=\frac{q_0\ell^3}{24EI}\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^4-6\left(\frac{x}{\ell}\right)^2+8\left(\frac{x}{\ell}\right)\right\}=\frac{q_0\ell^3}{24EI}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)\cdot\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^3-6\left(\frac{x}{\ell}\right)+8\right\}\end{aligned}}$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} y(x) &= \frac{q_0}{120EI\ell}x^5 - \frac{1}{12EI}q_0\ell x^3 + \frac{1}{6EI}q_0\ell^2 x^2 \\ &= \frac{q_0\ell^4}{120EI}\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - 10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 20\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\} = \frac{q_0\ell^4}{120EI}\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\cdot\left\{\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 10\cdot\left(\frac{x}{\ell}\right) + 20\right\} \end{aligned}}$$

次に、最大たわみ $y_{\max}$ は、$x=\ell$ のときに生ずるから、以下のようになる。

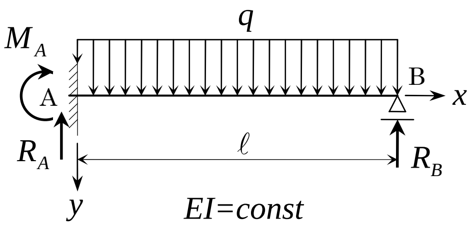
$$EIy_{\max} = \frac{q_0\ell^4}{120}(1-10+20) = \frac{11}{120}q_0\ell^4 \qquad \therefore \boxed{y_{\max} = \frac{11}{120}\cdot\frac{q_0\ell^4}{EI}}$$

【問題 BD4-B-1A】下図に示す曲げ剛性 EI が一定で、“A 点固定、B 点単純支持のはり”について、次の設問に答えよ。

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を用いて、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ を求めよ。

(2) 支点反力 M_A， R_A， R_B を求めよ。

(3) せん断力 $Q(x)$、曲げモーメント $M(x)$ の式を求め、次に、断面力図、すなわち、せん断力図（Q－図）、曲げモーメント図（M－図）を図示せよ。



【解答】

(1) はりのたわみと荷重の関係を表す 4 階の微分方程式 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=q$ を逐次積分すると、次のようになる。

$$EIy'''=qx+C_1$$

$$EIy''=\frac{q}{2}x^2+C_1x+C_2$$

$$EIy'=\frac{q}{6}x^3+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$$

$$EIy=\frac{q}{24}x^4+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$$

これに、以下のような境界条件を与えて、積分定数 C_1， C_2， C_3， C_4 を求める。

(a) $x=0$ のとき、 $y'=0$ より、　　$C_3=0$

(b) $x=0$ のとき、 $y=0$ より、　　$C_4=0$

(c) $x=\ell$ のとき、 $y''=0$ より、　　$\dfrac{q}{2}\ell^2+C_1\ell+C_2=0$ 　　………①

(d) $x=\ell$ のとき、 $y=0$ より、　　$\dfrac{q}{24}\ell^4+\dfrac{C_1}{6}\ell^3+\dfrac{C_2}{2}\ell^2=0$ 　　………②

①を変形すると、　　$C_1\ell+C_2=-\dfrac{q}{2}\ell^2$ 　　………①’

②を変形すると、　　$C_1\ell+3C_2=-\dfrac{q}{4}\ell^2$ 　　………②’

①’－②’より、　　$-2C_2=-\dfrac{q}{4}\ell^2$ 　　$\therefore C_2=\dfrac{1}{8}q\ell^2$

これを①’に代入すると、　$C_1\ell=-\dfrac{q}{2}\ell^2-\dfrac{1}{8}q\ell^2=-\dfrac{5}{8}q\ell^2$ 　　$\therefore C_1=-\dfrac{5}{8}q\ell$

よって、たわみ角 $\theta(x)$ とたわみの式 $y(x)$ は、次のようになる。

$$EIy''' = qx - \frac{5}{8}q\ell$$

$$EIy'' = \frac{q}{2}x^2 - \frac{5}{8}q\ell x + \frac{1}{8}q\ell^2$$

$$EIy' = \frac{q}{6}x^3 - \frac{5}{16}q\ell x^2 + \frac{1}{8}q\ell^2 x$$

$$EIy = \frac{q}{24}x^4 - \frac{5}{48}q\ell x^3 + \frac{1}{16}q\ell^2 x^2$$

$$\therefore \boxed{\begin{cases} \theta(x) = y'(x) = \dfrac{q}{6EI}x^3 - \dfrac{5}{16EI}q\ell x^2 + \dfrac{1}{8EI}q\ell^2 x \\ \qquad = \dfrac{q\ell^3}{48EI}\left\{8\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 - 15\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2 + 6\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)\right\} \\ y(x) = \dfrac{q}{24EI}x^4 - \dfrac{5}{48EI}q\ell x^3 + \dfrac{1}{16EI}q\ell^2 x^2 \\ \qquad = \dfrac{q\ell^4}{48EI}\left\{2\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^4 - 5\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^3 + 3\cdot\left(\dfrac{x}{\ell}\right)^2\right\} \end{cases}}$$

⑵ 次に、支点反力 M_A， R_A， R_B を求めると、以下のようになる。

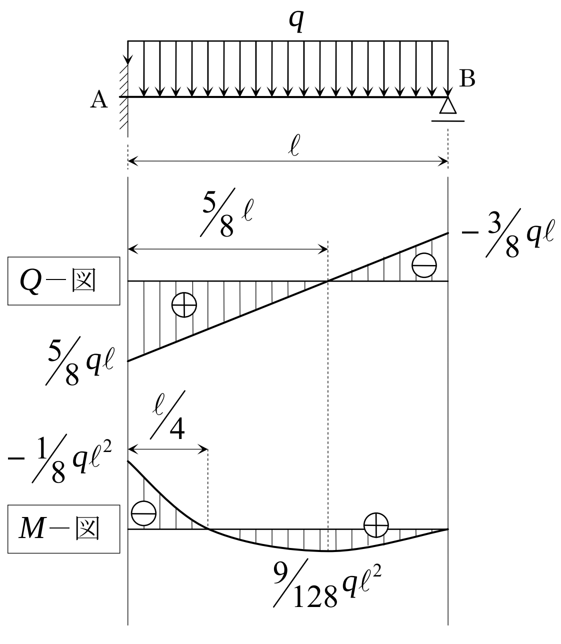
$M_A = -EIy''$ より、　　$M_A = -EIy''\big|_{x=0} = -\frac{1}{8}q\ell^2$

$Q = -EIy'''$ より、　　$R_A = Q_A = -EIy'''\big|_{x=0} = \frac{5}{8}q\ell$

また、　　$-R_B = Q_B = -EIy'''\big|_{x=\ell} = -q\ell + \frac{5}{8}q\ell = -\frac{3}{8}q\ell$

以上より、　$\boxed{M_A = -\frac{1}{8}q\ell^2}$　$\boxed{R_A = \frac{5}{8}q\ell}$　$\boxed{R_B = \frac{3}{8}q\ell}$

⑶ さらに、せん断力図（Q－図）、曲げモーメント図（M－図）を図示すると、下図のようになる。



曲げモーメントの最大値を求めると、

$$M_{\max} = -EIy''\big|_{x=\frac{5}{8}\ell}$$

$$= -\frac{q}{2}\cdot\frac{25}{64}\ell^2 + \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\ell - \frac{1}{8}q\ell^2$$

$$= \left(-\frac{25}{128} + \frac{25}{64} - \frac{1}{8}\right)\cdot q\ell^2$$

$$= \frac{-25+50-16}{128}q\ell^2$$

$$= \frac{9}{128}q\ell^2$$

$M = -EIy'' = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{5}{8}q\ell x - \frac{1}{8}q\ell^2 = 0$ を解くと、

$$-4x^2 + 5\ell x - \ell^2 = 0$$

$$\therefore 4x^2 - 5\ell x + \ell^2 = 0$$

$$\therefore (4x - \ell)(x - \ell) = 0$$

$$\therefore x = \frac{\ell}{4},\quad x = \ell$$