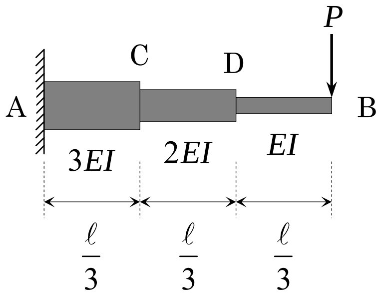
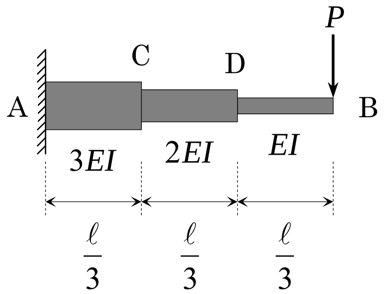
【問題 EL-HCL-2】〝弾性荷重法〟により、下図に示すような“変断面片持ばり AB”の自由端 B のたわみ v_B を求めよ。なお、“変断面片持ばり AB”の曲げ剛性は、A～C 間，C～D 間，D～B 間でそれぞれ $3EI$，$2EI$ ，EI である。

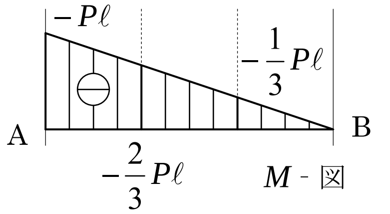


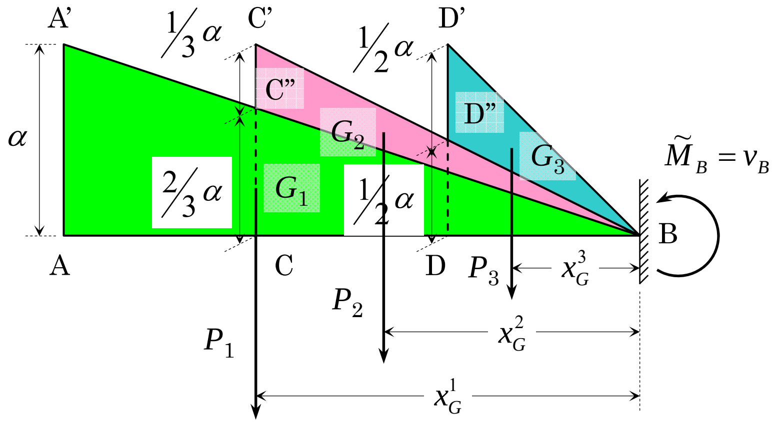
【解答】

まず、変断面片持ばりの曲げモーメント図は、下左図のようになる。

次に、〝モールの定理〟より、〝共役ばり〟に〝弾性荷重〟を載荷したものは下右図のようになり、これについて支点曲げモーメント $\tilde{M}_B = v_B$ を求めればよいことになる。なお、ここに $-\dfrac{P\ell}{3EI} = \alpha$ とする。







ここで、

$$P_1 = \frac{1}{2}\alpha\ell \qquad x_G^1 = \frac{2}{3}\ell$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{1}{9}\alpha\ell \qquad x_G^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\ell = \frac{4}{9}\ell$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\ell}{3} = \frac{1}{12}\alpha\ell \qquad x_G^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\ell = \frac{2}{9}\ell$$

であるから、モーメントの釣合から、次のようになる。

$$\tilde{M}_B + P_1\cdot x_G^1 + P_2\cdot x_G^2 + P_3\cdot x_G^3 = 0$$

$$\therefore -\tilde{M}_B = \frac{1}{2}\alpha\ell\cdot\frac{2}{3}\ell + \frac{1}{9}\alpha\ell\cdot\frac{4}{9}\ell + \frac{1}{12}\alpha\ell\cdot\frac{2}{9}\ell = \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{81}+\frac{1}{54}\right)\cdot\alpha\ell^2 = \frac{54+8+3}{162}\alpha\ell^2 = \frac{65}{162}\alpha\ell^2$$

$$\therefore v_B = \tilde{M}_B = -\frac{65}{162}\alpha\ell = -\frac{65}{162}\cdot\left(-\frac{P\ell}{3EI}\right)\cdot\ell^2 = \frac{65}{486}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}$$

よって、$\boxed{v_B = \dfrac{65}{486}\cdot\dfrac{P\ell^3}{EI}}$

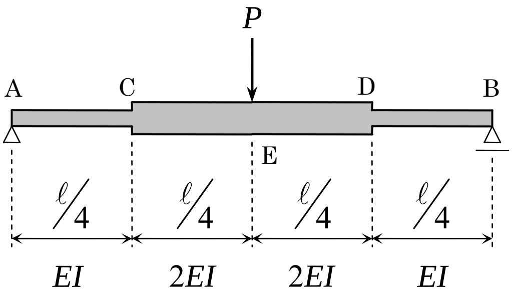
【問題 EL-HSB-1A】〝弾性荷重法〟により、下図のような“変断面単純ばり”について、

A 点のたわみ角 θ_A

C 点のたわみ角 θ_C とたわみ y_C

E 点のたわみ y_E

を求めよ。ただし、曲げ剛性は、A～C, D～B 間を EI, C～D 間を $2EI$ とする。



【解答】

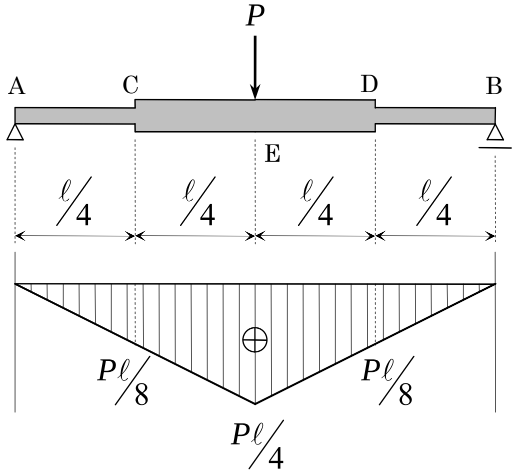
この問題には、以下のように〝モールの定理〟を利用する。

①問題の単純ばりに作用する曲げモーメント（M－図）を求める。

②前記で求めた曲げモーメントを〝弾性荷重〟（＝曲げモーメント／曲げ剛性）に換算し、境界条件を考慮して〝共役ばり〟に載荷する。

③〝共役ばり〟のせん断力（＝たわみ角と等価）と曲げモーメント（＝たわみと等価）を求めることによって、各点のたわみ角とたわみを算定する。

まず、問題の単純ばりに作用する曲げモーメント（M－図）を求めると、右図のようになる。



次に、〝弾性荷重〟（＝曲げモーメント／曲げ剛性）を求めると、

$$\alpha = \frac{P\ell}{8EI}$$

また、「単純ばり」の〝共役ばり〟は、『単純ばり』であるから、〝弾性荷重〟を載荷した〝共役ばり〟は、右下図のようになる。

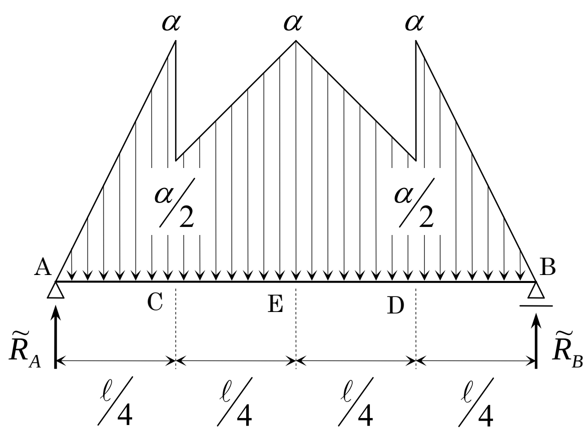
このとき、〝共役ばり〟の支点反力 $\tilde{R}_A$, $\tilde{R}_B$ は、

$$\tilde{R}_A = \tilde{R}_B = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\ell}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha\right)\cdot\frac{\ell}{4}$$

$$= \frac{1}{8}\alpha\ell + \frac{3}{16}\alpha\ell = \frac{5}{16}\alpha\ell$$

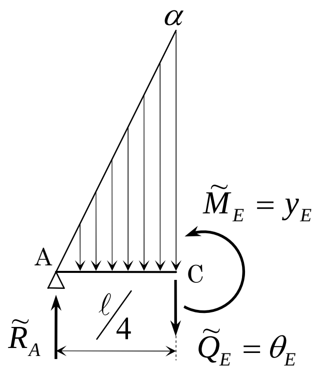
となるから、A 点のたわみ角 θ_A は、次のようになる。

$$\boxed{\theta_A = \tilde{Q}_A = \tilde{R}_A = \frac{5}{16}\alpha\ell = \frac{5}{128}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}}$$



次に、C 点のたわみ角 θ_C とたわみ y_C を求めると、

〝共役ばり〟の C 点でのせん断力 $\tilde{Q}_C$ と曲げモーメント $\tilde{M}_C$ となるから、右上図のような釣合条件から、



$$\tilde{Q}_C + \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\ell}{4} = \tilde{R}_A \qquad \therefore \tilde{Q}_C = \frac{5}{16}\alpha\ell - \frac{1}{8}\alpha\ell = \frac{3}{16}\alpha\ell$$

$$\therefore \boxed{\theta_C = \frac{3}{128}\cdot\frac{P\ell^2}{EI}}$$

$$\tilde{M}_C + \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\ell}{4}\cdot\left(\frac{\ell}{4}\cdot\frac{1}{3}\right) = \tilde{R}_A\cdot\frac{\ell}{4}$$

$$\therefore \tilde{M}_C = \frac{5}{16}\alpha\ell\cdot\frac{\ell}{4} - \frac{1}{96}\alpha\ell^2 = \left(\frac{5}{64} - \frac{1}{96}\right)\cdot\alpha\ell^2$$

$$= \frac{15-2}{192}\alpha\ell^2 = \frac{13}{192}\alpha\ell^2$$

$$\therefore \boxed{y_C = \frac{13}{1536}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$

さらに、E 点のたわみ y_E を求めると、

〝共役ばり〟の E 点での曲げモーメント $\tilde{M}_E$ となるから、右下図のような釣合条件から、

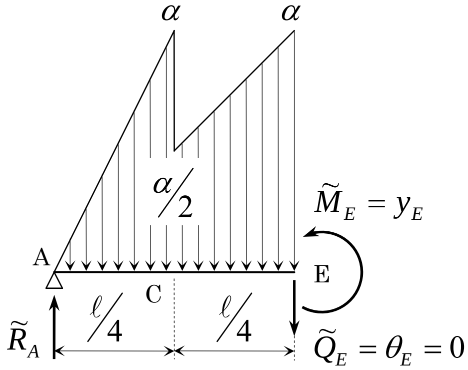
$$\tilde{M}_E + \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\ell}{4}\cdot\left(\frac{\ell}{4} + \frac{\ell}{4}\cdot\frac{1}{3}\right) + \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\ell}{4}\cdot\left(\frac{\ell}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\ell}{4}\cdot\left(\frac{\ell}{4}\cdot\frac{1}{3}\right) = \tilde{R}_A\cdot\frac{\ell}{2}$$

$$\therefore \tilde{M}_E = \frac{5}{16}\alpha\ell\cdot\frac{\ell}{2} - \frac{1}{8}\alpha\ell\cdot\left(\frac{\ell}{3}\right) - \frac{1}{8}\alpha\ell\cdot\left(\frac{\ell}{8}\right) - \frac{1}{16}\alpha\ell\cdot\left(\frac{\ell}{12}\right)$$

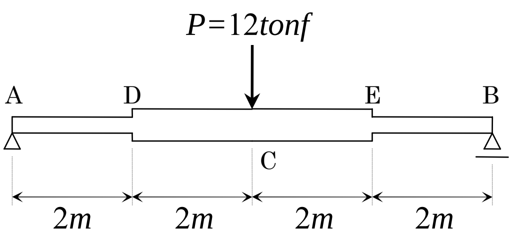
$$\therefore \tilde{M}_E = \frac{5}{32}\alpha\ell^2 - \frac{1}{24}\alpha\ell^2 - \frac{1}{64}\alpha\ell^2 - \frac{1}{192}\alpha\ell^2$$

$$\therefore \tilde{M}_E = \frac{30-8-3-1}{192}\alpha\ell^2 = \frac{18}{192}\alpha\ell^2 = \frac{3}{32}\alpha\ell^2$$

$$\therefore \boxed{y_E = \frac{3}{256}\cdot\frac{P\ell^3}{EI}}$$



【問題 EL-HSB-1B】下図のような“変断面単純ばり”の C 点のたわみ y_C を〝弾性荷重法〟により求めよ。ただし、ヤング係数 $E=2\times10^6\ kgf/cm^2$，また、D〜E 間の断面 2 次モーメント I_{DE} は、$I_{DE}=1.2\times10^5\,cm^4$、$A$〜$D$, E〜B 間の断面 2 次モーメント I_{AD}, I_{EB} は、$I_{AD}=I_{EB}=6\times10^4\,cm^4$ とする。



【解答】

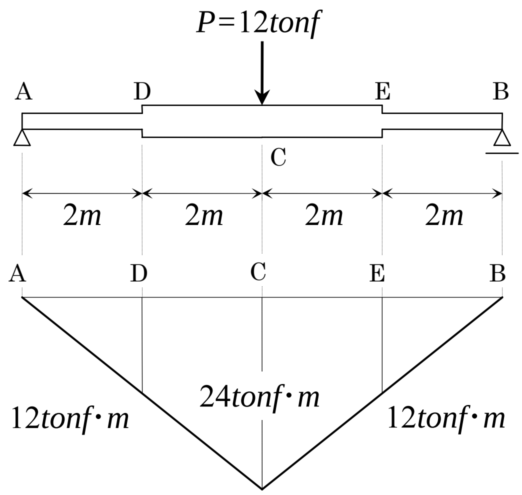
この問題には、以下のように〝モールの定理〟を利用する。

①問題の単純ばりに作用する曲げモーメント（M−図）を求める。

②前記で求めた曲げモーメントを〝弾性荷重〟（＝曲げモーメント／曲げ剛性）に換算し、境界条件を考慮して〝共役ばり〟に載荷する。

③〝共役ばり〟のせん断力（＝たわみ角と等価）と曲げモーメント（＝たわみと等価）を求めることによって、C 点のたわみを算定する。

まず、問題の単純ばりに作用する曲げモーメント（M−図）を求めると、右図のようになる。



ここで、はりのヤング係数 $E=2\times10^6\ kgf/cm^2$ であり、D〜E 間の断面２次モーメント I_{DE} は、

$$I_{DE}=1.2\times10^5\,cm^4$$

A〜D, E〜B 間の断面２次モーメント I_{AD}, I_{EB} は、

$$I_{AD}=I_{EB}=6\times10^4\,cm^4$$

であるから、

$I_{AD}=I_{EB}=I_O$ とおくと、曲げ剛性は次のようになる。

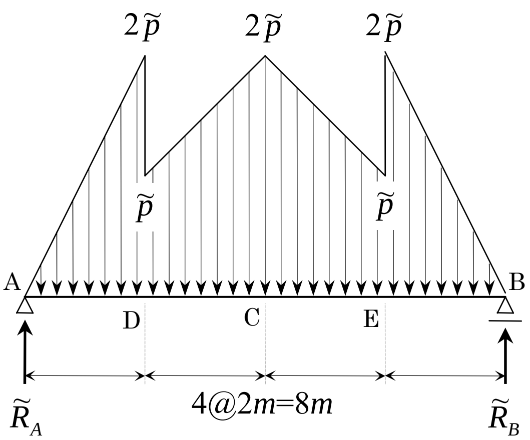
$$EI_O=12\times10^{10}\,kgf\cdot cm^2$$

$$EI_{DE}=2.4\times10^{11}=24\times10^{10}\,kgf\cdot cm^2=2EI_O$$

次に、〝弾性荷重〟（＝曲げモーメント／曲げ剛性）を求めると、

$$\tilde{p}=\frac{12tonf\cdot m}{2EI_O}=\frac{12\times10^5\,kgf\cdot cm}{24\times10^{10}\,kgf\cdot cm^2}$$

$$=0.5\times10^{-5}\,cm^{-1}$$



また、「単純ばり」の〝共役ばり〟は、『単純ばり』であるから、〝弾性荷重〟を載荷した〝共役ばり〟は、右図のようになる。

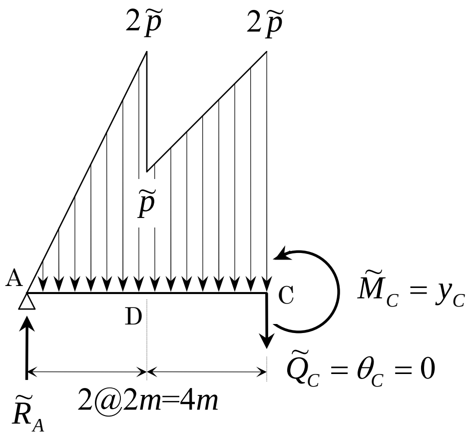
このとき、〝共役ばり〟の支点反力 $\tilde{R}_A$, $\tilde{R}_B$ は、

$$\tilde{R}_A=\tilde{R}_B=\frac{1}{2}\cdot2\tilde{p}\cdot2m+\frac{1}{2}\left(2\tilde{p}+\tilde{p}\right)\cdot2m=2m\cdot\tilde{p}+3m\cdot\tilde{p}=5m\cdot\tilde{p}$$

$$=500cm\times0.5\times10^{-5}\,cm^{-1}=250\times10^{-5}=2.5\times10^{-3}$$

となる。

さらに、〝共役ばり〟の C 点での曲げモーメント $\tilde{M}_C$ は、右図のような釣合条件から、



$$\begin{aligned}
\tilde{M}_C &= \tilde{R}_A \cdot 4m - \frac{1}{2}\cdot 2\tilde{p}\cdot 2m \cdot\left(2m + \frac{2}{3}m\right) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\tilde{p}\cdot 2m \cdot \frac{2}{3}m - \tilde{p}\cdot 2m\cdot 1m \\
&= 20m^2\cdot\tilde{p} - \frac{16}{3}m^2\cdot\tilde{p} - \frac{2}{3}m^2\cdot\tilde{p} - 2m^2\cdot\tilde{p} \\
&= \frac{1}{3}\tilde{p}\left(60m^2 - 16m^2 - 2m^2 - 6m^2\right) = \frac{36}{3}m^2\cdot\tilde{p} \\
&= 12m^2\cdot\tilde{p}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{y_C = \tilde{M}_C = 12m^2\cdot\tilde{p} = 12\times10^4\,cm^2\times 0.5\times10^{-5}\,cm^{-1} = 6\times10^{-1}\,cm = 0.6cm}$$

前問【問題 EL-HSB-1A】を用いると、y_C は y_E に相当するので、

$$y_C \equiv y_E = \frac{3}{256}\cdot\frac{P\ell^3}{EI} = \frac{3}{256}\cdot\frac{\left(12\times10^3\right)\times\left(8\times10^2\right)^3}{\left(2\times10^6\right)\times\left(6\times10^4\right)} = \frac{3\times12\times8^3}{256\times2\times6\times10} = 0.6\,cm$$

ただし、単位を kgf，cm に揃えることに注意する。