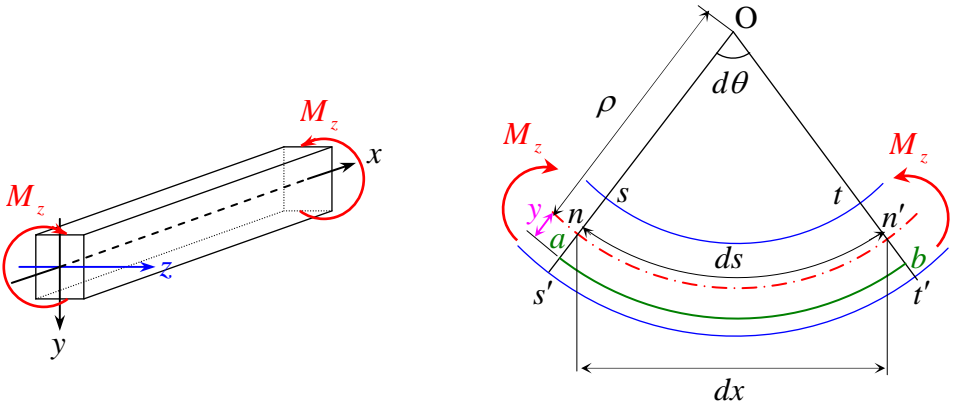


# はりの曲げ応力

(仮定)

- 1) はりの横断面は、はりの軸 (x 軸) を含む対称軸を有する。
- 2) 荷重作用面は上記 1)の対称軸と x 軸とを含む平面 (x-y 平面) とする。  
⇒ x-y 平面内でのみはり曲げられる。
- 3) はりの材料は、等方・等質性を有し、かつ、フックの法則に従う。  
また、引張および圧縮に対する弾性係数は同一とする。
- 4) 変形を受ける前に平面であったはりの横断面は、変形後も依然として平面を保ち、かつ、はりの軸と直交する。  
⇒ **平面保持の仮定(ベルヌーイの仮定)** ⇔ 変形後の部材軸は円弧



上図のような**純粋曲げ(pure bending)**の作用するはりについて考える。  
このとき、 $\rho$  : **曲率半径**とすると、 $ds = \rho \cdot d\theta$ であり、微小変形では、 $ds \cong dx$ と考えてよいから、

$$dx = \rho \cdot d\theta \quad \therefore \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} : \text{曲率} \quad \dots\dots(1)$$

次に、 $ab$  間の長さに着目すると、変形前は  $dx$ 、変形後は  $(\rho + y) \cdot d\theta$  であるから、 $ab$  間の伸び  $\Delta x$  は、式(1)から、

$$\Delta x = (\rho + y) \cdot d\theta - dx = \rho \cdot d\theta + y \cdot d\theta - dx = y \cdot d\theta \quad \dots\dots(2)$$

したがって、 $ab$  間のひずみ  $\epsilon_x$  は、式(1), (2)から、

$$\epsilon_x = \frac{\Delta x}{dx} = \frac{y \cdot d\theta}{dx} = \frac{y}{\rho} \quad \dots\dots(3)$$

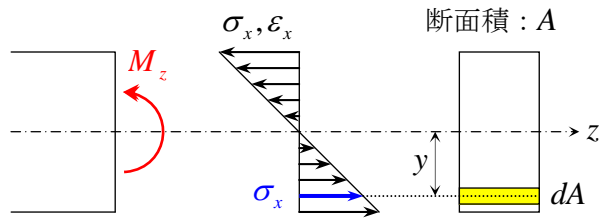
式(3)より、 $\epsilon_x$  は中立軸からの距離  $y$  に比例し、  
中立面より下側 ⇒ 引張 ⇔  $\epsilon_x > 0$   
中立面より上側 ⇒ 圧縮 ⇔  $\epsilon_x < 0$

また、 $ab$  間の応力  $\sigma_x$  は、フックの法則から、

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x = E \cdot \frac{y}{\rho} = \frac{E}{\rho} y \quad \dots\dots(4)$$

式(4)より、 $\sigma_x$  は中立軸からの距離  $y$  に比例し、  
中立面より下側 ⇒ 引張 ⇔  $\sigma_x > 0$   
中立面より上側 ⇒ 圧縮 ⇔  $\sigma_x < 0$

次に、下図のように中立軸がz軸と一致する場合について、外力（曲げモーメント）との力学的釣合を考える。



水平方向の力の釣合から、

$$\sum \sigma_x dA = \int_A \sigma_x dA = 0 \quad \dots\dots(5)$$

中立軸回りのモーメントの釣合から、

$$\sum (\sigma_x dA) \cdot y = \int_A (\sigma_x dA) \cdot y = \int_A \sigma_x y \cdot dA = M_z \quad \dots\dots(6)$$

式(6)に式(4)を代入すると、

$$M_z = \int_A \sigma_x y \cdot dA = \int_A \frac{E}{\rho} y \cdot y \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA$$

ここで、 $\int_A y^2 dA = I_z$  : 中立軸に関する断面2次モーメントとすると、

$$M_z = \frac{E}{\rho} I_z \quad \therefore \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \quad EI_z : \text{曲げ剛性} \quad \dots\dots(7)$$

式(7)と式(4)より、

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} y = \frac{1}{\rho} \cdot Ey = \frac{M_z}{EI_z} \cdot Ey = \frac{M_z}{I_z} y \quad \dots\dots(8)$$

軸方向力  $N_x$  が作用する場合は、

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y$$

以上まとめると、

曲げ剛性  $EI_z$  のはりに曲げモーメント  $M_z$  が作用するとき、変形後の曲率  $\frac{1}{\rho}$  (曲率半径 :  $\rho$ ) は、次の式で与えられる。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \quad \dots\dots(7)$$

また、中立面からの距離  $y$  の面の曲げ応力  $\sigma_x$  は、次のようになる。

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \quad \dots\dots(8)$$

## はりのたわみ

はりの弾性曲線 (elastic curve) またはたわみ曲線 (deflection curve) を未知関数  $y(x)$  とする微分方程式を誘導する。

右図において、曲率半径を  $\rho$  とすれば、

$$ds = \rho \cdot d\theta \quad \text{ゆえに、曲率: } \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

次に、 $\frac{d\theta}{ds}$  を  $x, y$  で表すことを考える。

まず、たわみは微小であるとして、 $\varepsilon$  を無視すると、

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad \text{ゆえに、} \theta = \tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

また、 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$  だから、

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

よって、
$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) \right\}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

ここで、 $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$  であり、 $\frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1} f(x) \right\} = \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{1+f(x)^2}$  だから、

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \doteq \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \left[ \because \left(\frac{dy}{dx}\right) \ll 1 \right]$$

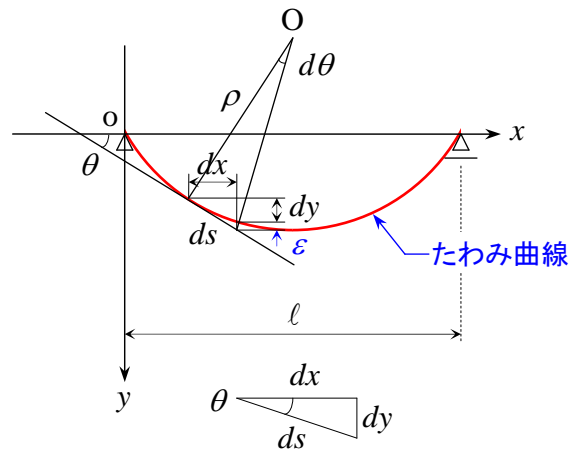
したがって、
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

一方、曲率と曲げモーメント  $M$ 、曲げ剛性  $EI$  の関係は、 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$  だから、 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$  である。

ここで、曲げモーメント  $M$  と曲率  $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$  の正負を考えると、

曲げモーメント  $M$  が正のとき、たわみは下に凸で、曲率は負  
 曲げモーメント  $M$  が負のとき、たわみは上に凸で、曲率は正  
 にならなければならないから、

はりのたわみの微分方程式は、
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$
 となる。



はりに作用する荷重強度  $q$  とせん断力  $Q$ ，曲げモーメント  $M$  の関係

右図のような分布荷重  $q(x)$  が作用するはりにおいて、その微小要素の釣合を考えると、次のようになる。  
鉛直方向の力の釣合より、

$$Q + dQ + q(x) \cdot dx = Q \quad \therefore dQ = -q(x) \cdot dx$$

$$\therefore \frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

P 点回りのモーメントの釣合より、

$$M + Q \cdot dx = q(x) \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + M + dM$$

ここで、 $q(x) \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} \cong 0$  と考えることができるので、

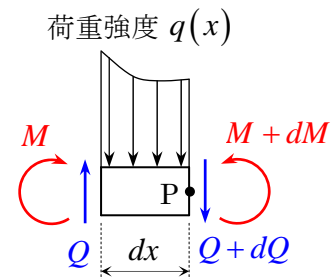
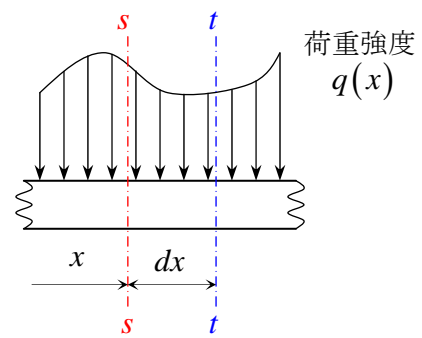
$$dM = Q \cdot dx \quad \therefore \frac{dM}{dx} = Q$$

また、 $\frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dM}{dx} \right) = \frac{d^2 M}{dx^2} = -q(x)$  だから、 $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q(x)$

したがって、曲げ剛性  $EI$  が一定なはりのたわみの微分方程式は、次のようにも書き表すことができる。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \text{ より、 } \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{M}{EI} \right) = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{dM}{dx} = -\frac{Q}{EI}, \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{Q}{EI} \right) = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{dQ}{dx} = \frac{q(x)}{EI}$$

$$\therefore EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x)$$



$\frac{d}{dx} (\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$  の証明

$$y = \tan^{-1} x \quad \left( -\infty < x < \infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right) \text{ とすると、 } x = \tan y, \quad \frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

$$\text{ここで、 } \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2 \text{ だから、 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = (\tan y)' = \left( \frac{\sin y}{\cos y} \right)' = \frac{(\sin y)' \cdot \cos y - \sin y \cdot (\cos y)'}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y$$

$\frac{d}{dx} \{ \tan^{-1} f(x) \} = \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{1+f(x)^2}$  の証明

$y = \tan^{-1} f(x)$  として、 $z = f(x)$  とおくと、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+z^2} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+\{f(x)\}^2} \cdot \frac{d}{dx} f(x) = \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{1+\{f(x)\}^2}$$

《はりの境界条件》

曲げ剛性  $EI$  が一定なはりのたわみ曲線  $y = f(x)$  を求めるには、微分方程式  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$  または、

$EI \frac{d^4y}{dx^4} = q(x)$  を解く必要がある。

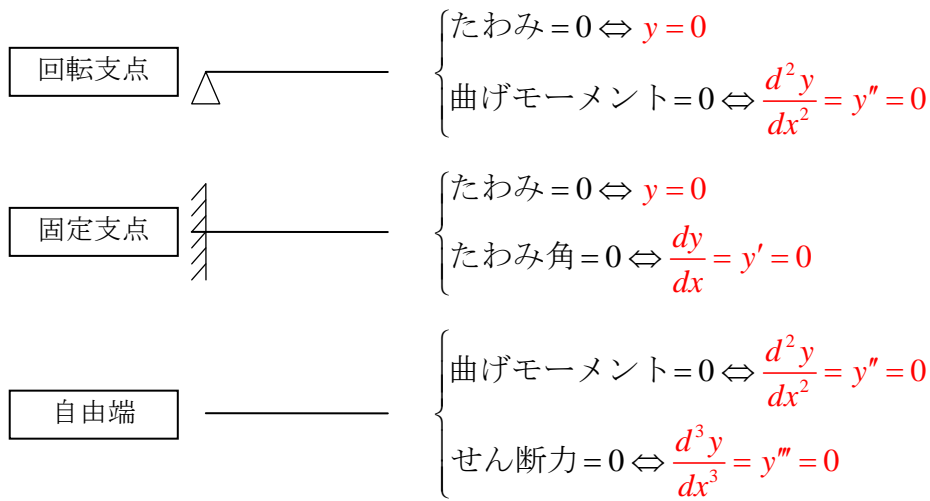
その前に、以下の事項を確認しておく。

たわみ曲線の傾き  $\theta = \frac{dy}{dx} = y'$  を、たわみ角という。

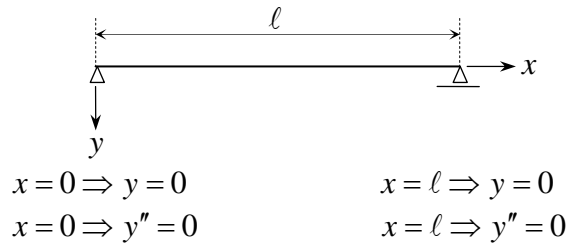
微分方程式  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$  を変形すると、 $M = -EI \frac{d^2y}{dx^2} = -EI y''$  (曲げモーメントの式)

次に、上の式と  $\frac{dM}{dx} = Q$  の関係より、 $Q = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} \left\{ -EI \frac{d^2y}{dx^2} \right\} = -EI \frac{d^3y}{dx^3} = -EI y'''$  (せん断力の式)

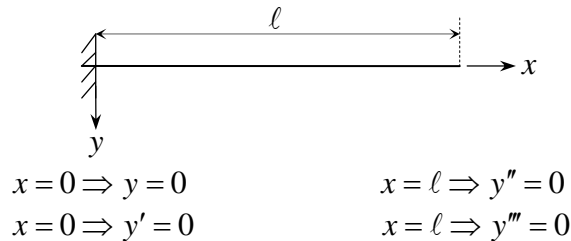
以上を踏まえて、微分方程式を解くための境界条件 (支持条件) を整理すると、次のようになる。



例えば、長さ  $l$  の単純ばりの場合は、両端が「回転支点」だから、

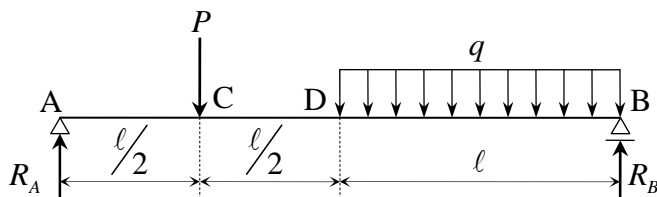


長さ  $l$  の片持ばりの場合は、「固定支点」と「自由端」だから、



《はりの断面力と断面力図》

下図に示す単純ばりの断面力と断面力図を求める。



剛体の釣合より、支点反力を求める。

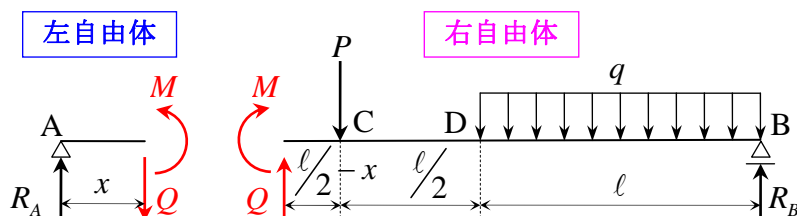
鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R_B = P + ql$

B点周りのモーメントの釣合から、 $R_A \times 2l = P \times \frac{3}{2}l + ql \times \frac{l}{2}$   $\therefore R_A = \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}ql$

A点周りのモーメントの釣合から、 $R_B \times 2l = P \times \frac{l}{2} + ql \times \frac{3}{2}l$   $\therefore R_B = \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}ql$

単純ばり AB をそれぞれ A~C 間、C~D 間、D~B 間の 3 箇所切断し、断面力を求める。

(1) A~C 間で切断する。



左自由体について、

鉛直方向の力の釣合から、 $Q = R_A$   $\therefore Q = \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}ql$

右端周りのモーメントの釣合から、 $M = R_A x$   $\therefore M = \left(\frac{3}{4}P + \frac{1}{4}ql\right)x$

右自由体について、

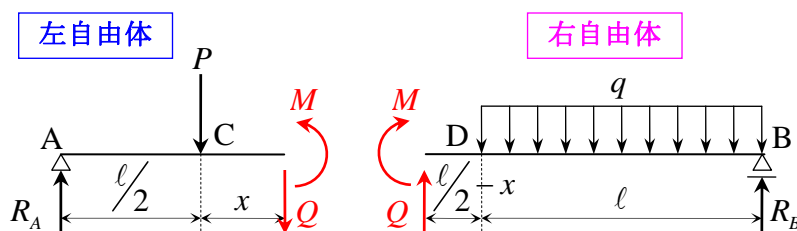
鉛直方向の力の釣合から、 $Q + R_B = P + ql$   $\therefore Q = P + ql - R_B$

$\therefore Q = P + ql - \left(\frac{1}{4}P + \frac{3}{4}ql\right) = \frac{3}{4}P + \frac{1}{4}ql = R_A$

左端周りのモーメントの釣合から、 $M + P\left(\frac{l}{2} - x\right) + ql\left\{\left(\frac{l}{2} - x\right) + \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\right\} = R_B\left\{\left(\frac{l}{2} - x\right) + \frac{l}{2} + l\right\}$

$\therefore M = \left(\frac{1}{4}P + \frac{3}{4}ql\right)(2l - x) - P\left(\frac{l}{2} - x\right) - ql\left(\frac{3}{2}l - x\right) = \frac{3}{4}Px + \frac{1}{4}qlx = \left(\frac{3}{4}P + \frac{1}{4}ql\right)x = R_A x$

(2) C~D 間で切断する。



左自由体について、

鉛直方向の力の釣合から、 $Q + P = R_A$   $\therefore Q = R_A - P = \left(\frac{3}{4}P + \frac{1}{4}ql\right) - P = -\frac{1}{4}P + \frac{1}{4}ql$

右端周りのモーメントの釣合から、 $M + Px = R_A\left(\frac{l}{2} + x\right)$

$$\therefore M = (R_A - P)x + R_A \frac{\ell}{2} = \left(\frac{3}{4}P + \frac{1}{4}q\ell - P\right)x + \left(\frac{3}{4}P + \frac{1}{4}q\ell\right)\frac{\ell}{2} = \left(-\frac{1}{4}P + \frac{1}{4}q\ell\right)x + \left(\frac{3}{8}P\ell + \frac{1}{8}q\ell^2\right)$$

右自由体について、

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、 } Q + R_B = q\ell \quad \therefore Q = q\ell - R_B = q\ell - \left(\frac{1}{4}P + \frac{3}{4}q\ell\right) = -\frac{1}{4}P + \frac{1}{4}q\ell$$

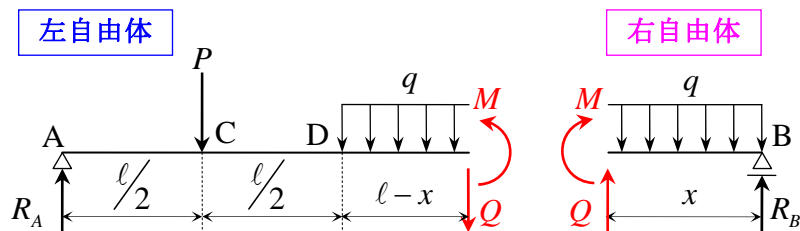
$$\text{左端周りのモーメントの釣合から、 } M + q\ell\left\{\left(\frac{\ell}{2} - x\right) + \frac{\ell}{2}\right\} = R_B\left\{\left(\frac{\ell}{2} - x\right) + \ell\right\}$$

$$M = R_B\left(\frac{3}{2}\ell - x\right) - q\ell(\ell - x) = \left(\frac{1}{4}P + \frac{3}{4}q\ell\right)\left(\frac{3}{2}\ell - x\right) - q\ell(\ell - x)$$

∴

$$= \frac{3}{8}P\ell - \frac{1}{4}Px + \frac{9-8}{8}q\ell^2 + \frac{-3+4}{4}q\ell x = \left(-\frac{1}{4}P + \frac{1}{4}q\ell\right)x + \left(\frac{3}{8}P\ell + \frac{1}{8}q\ell^2\right)$$

(3) D~B間で切断する。



右自由体について、

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、 } Q + R_B = qx \quad \therefore Q = qx - R_B = qx - \left(\frac{1}{4}P + \frac{3}{4}q\ell\right)$$

$$\text{左端周りのモーメントの釣合から、 } M + qx \cdot \frac{x}{2} = R_B x$$

$$\therefore M = -\frac{1}{2}qx^2 + R_B x = -\frac{1}{2}qx^2 + \left(\frac{1}{4}P + \frac{3}{4}q\ell\right)x$$

左自由体について、

$$\text{鉛直方向の力の釣合から、 } Q + P + q(\ell - x) = R_A$$

$$\therefore Q = R_A - P - q(\ell - x) = \left(\frac{3}{4}P + \frac{1}{4}q\ell\right) - P - q(\ell - x) = qx - \left(\frac{1}{4}P + \frac{3}{4}q\ell\right) = qx - R_B$$

$$\text{右端周りのモーメントの釣合から、 } M + P\left\{\frac{\ell}{2} + (\ell - x)\right\} + q(\ell - x) \cdot \frac{\ell - x}{2} = R_A\{\ell + (\ell - x)\}$$

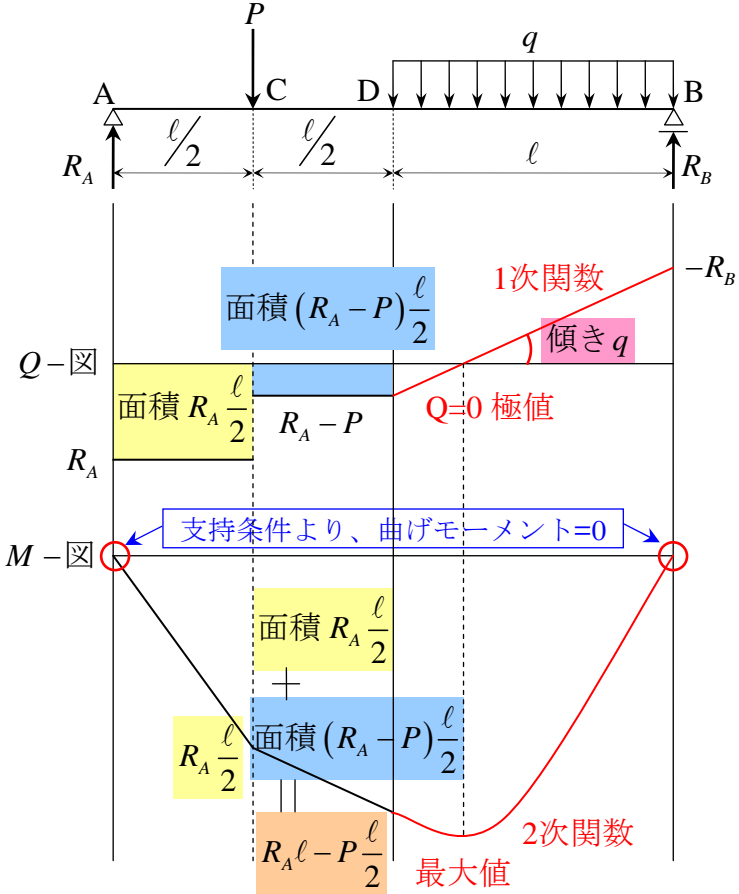
$$M = R_A(2\ell - x) - P\left(\frac{3}{2}\ell - x\right) - q \cdot \frac{(\ell - x)^2}{2} = \left(\frac{3}{4}P + \frac{1}{4}q\ell\right)(2\ell - x) - P\left(\frac{3}{2}\ell - x\right) - q \cdot \frac{(\ell - x)^2}{2}$$

$$\therefore = \frac{6-6}{4}P\ell + \frac{1}{2}q\ell^2 - \left(\frac{3}{4}P + \frac{1}{4}q\ell\right)x + Px - \frac{1}{2}q\ell^2 + q\ell x - q \frac{x^2}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}qx^2 + \left\{P + q\ell - \left(\frac{3}{4}P + \frac{1}{4}q\ell\right)\right\}x = -\frac{1}{2}qx^2 + \left(\frac{1}{4}P + \frac{3}{4}q\ell\right)x = -\frac{1}{2}qx^2 + R_B x$$

左自由体・右自由体のどちらで断面力を求めても一致する。

断面力図を描くと、以下のようになる。



曲げモーメント： $M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -EI y''$

せん断力： $Q = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} \left\{ -EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right\} = -EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -EI y'''$

曲げモーメントとせん断力の関係：

$\frac{dM}{dx} = Q \Leftrightarrow$  曲げモーメントの傾きがせん断力

$M = \int Q dx \Leftrightarrow$  せん断力を積分すると曲げモーメント

(せん断力図の面積を累積したものが曲げモーメント)



## “たわみに関するモールの定理、⇒ “弾性荷重法、によるたわみの計算

はりのたわみの基本式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

1 回積分 (たわみ角)

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\int \frac{M}{EI} dx + C_1$$

2 回積分 (たわみ)

$$y = -\iint \frac{M}{EI} dx + C_1 x + C_2$$

はりの荷重強度  $q$ , せん断力  $Q$ , 曲げモーメント  $M$  の関係

1 回積分 (せん断力)

$$Q = \frac{dM}{dx} = -\int q dx + D_1$$

2 回積分 (曲げモーメント)

$$M = -\iint q dx + D_1 x + D_2$$

$$\left( \frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{dQ}{dx} = -q \right)$$

以上の関係をみると、次のような対応関係がある。

荷重強度  $q \Leftrightarrow \frac{M}{EI}$  : “弾性荷重、(elastic load)

せん断力  $Q \Leftrightarrow \theta$  : たわみ角

曲げモーメント  $M \Leftrightarrow y$  : たわみ

ここで、“仮定の荷重強度、 $\tilde{q} = \frac{M}{EI}$  が載荷されるはりを考える。

このとき、荷重強度  $\tilde{q}$ , せん断力  $\tilde{Q}$ , 曲げモーメント  $\tilde{M}$  の関係は、次のようになる。

1 回積分 (せん断力)

$$\tilde{Q} = \frac{d\tilde{M}}{dx} = -\int \frac{M}{EI} dx + D_1$$

2 回積分 (曲げモーメント)

$$\tilde{M} = -\iint \frac{M}{EI} dx + D_1 x + D_2$$

$$\frac{d^2 \tilde{M}}{dx^2} = -\tilde{q} = -\frac{M}{EI}$$

$$\left( \frac{d\tilde{M}}{dx} = \tilde{Q}, \quad \frac{d\tilde{Q}}{dx} = -\tilde{q} = -\frac{M}{EI} \right)$$

したがって、

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\int \frac{M}{EI} dx + C_1 = \tilde{Q} = \frac{d\tilde{M}}{dx} = -\int \frac{M}{EI} dx + D_1$$

$$y = -\iint \frac{M}{EI} dx + C_1 x + C_2 = \tilde{M} = -\iint \frac{M}{EI} dx + D_1 x + D_2$$

となる。

以上をまとめると、

『はりのたわみ角  $\theta$ , たわみ  $y$  は、“仮定の荷重強度、 $\tilde{q} = \frac{M}{EI}$  (弾性荷重) が載荷されたはりのせ

ん断力  $\tilde{Q}$ , 曲げモーメント  $\tilde{M}$  を求めることにより得られる。』  
 ことがわかる。

ここで、問題となるのは、積分定数  $C_1, C_2$  と積分定数  $D_1, D_2$  の処理である。すなわち、“仮想の荷重強度、 $\tilde{q} = \frac{M}{EI}$  が載荷される「はり」は、「実際のはり」と同じで良いか？という問題である。

いま、たわみ角  $\theta$  とせん断力  $\tilde{Q}$  が、たわみ  $y$  と曲げモーメント  $\tilde{M}$  がそれぞれ対応してしていることから、「実際のはり」と「弾性荷重が載荷されるはり」の境界条件（境界点）の対応について考えてみると、下表のようになる。

実 際 の は り		共 役 ば り	
境界点	境界条件	境界条件	境界点
固定端	$y = 0, \theta = 0$	$\tilde{M} = 0, \tilde{Q} = 0$	自由端
ヒンジ端	$y = 0, \theta \neq 0$	$\tilde{M} = 0, \tilde{Q} \neq 0$	ヒンジ端
自由端	$y \neq 0, \theta \neq 0$	$\tilde{M} \neq 0, \tilde{Q} \neq 0$	固定端
中間支点	$y = 0, \theta_l = \theta_r$	$\tilde{M} = 0, \tilde{Q}_l = \tilde{Q}_r$	中間ヒンジ
中間ヒンジ	$y_l = y_r, \theta_l \neq \theta_r$	$\tilde{M}_l = \tilde{M}_r, \tilde{Q}_l \neq \tilde{Q}_r$	中間支点

この表のように、境界条件（境界点）を変更すれば、「実際のはり」と「弾性荷重が載荷されるはり」の境界条件は一致させることができる。

このとき、表のように境界条件（境界点）を変更し、弾性荷重を載荷するはりのことを“共役ばり、(conjugate beam)”という。

以上をまとめると、

『はりのたわみ角  $\theta$ 、たわみ  $y$  は、“共役ばり、に“弾性荷重、 $\tilde{q} = \frac{M}{EI}$  が載荷されたときの

せん断力  $\tilde{Q}$ 、曲げモーメント  $\tilde{M}$  を求めることにより得られる。』

ということになる。

以上のような考え方を、“たわみに関するモールの定理、(Mohr's theorem)といい、“弾性荷重法、によるたわみ角、たわみの計算法”という。

“弾性荷重法、によるたわみ角、たわみの計算手順をまとめると、次のようになる。

- I. 本来の荷重が載荷されたはりの曲げモーメント（曲げモーメント図、 $M$ -図）を求める。
  - ① 支点反力を求める。
  - ② 曲げモーメント図（ $M$ -図）を図示する。
- II. “弾性荷重、”を“共役ばり、”に載荷する。
  - ① 境界条件（境界点）を変更して“共役ばり、”を図示する。
  - ② I で求めた曲げモーメント図（ $M$ -図）より、“弾性荷重、”を載荷する。
- III. “共役ばり、”のせん断力  $\tilde{Q}$ 、曲げモーメント  $\tilde{M}$  を求める。
  - ① “共役ばり、”の支点反力を求める。
  - ② たわみ角、たわみを求めたい点のせん断力  $\tilde{Q}$ 、曲げモーメント  $\tilde{M}$  を求める。
  - ③ せん断力  $\tilde{Q} = \theta$ （たわみ角）、曲げモーメント  $\tilde{M} = y$ （たわみ）より、たわみ角  $\theta$ 、たわみ  $y$  を得る。

## せん断力による付加たわみ

右図のように、微小距離  $dx$  を隔てる 2 つの隣接断面にせん断力  $Q$  が作用するとき、せん断応力  $\tau_{xy}$  は、次のように表される。

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q}{I_z B} \int_y^{y_1} y B dy = \frac{Q}{I_z B} S_z(y) \quad \dots\dots(1)$$

$Q$  : 作用するせん断力,  
 $I_z$  : 中立軸に関する断面 2 次モーメント,  
 $B$  : せん断応力  $\tau_{xy}$  が作用する縦断面の幅,

$S_z(y) = \int_y^{y_1} y B dy$  : せん断応力  $\tau_{xy}$  が作用する縦断面より縁に至る間の横断面部分の中立軸に関する断面 1 次モーメント

ここで、中立面に作用するせん断応力度  $\tau_m$  を考えると、上式に  $y = 0$  を代入して、

$$\tau_m = \frac{Q}{I_z B} S_z(0) \quad \dots\dots(2)$$

と表される。ここに、 $S_z(0)$  は、中立軸から片側にある断面部分の中立軸に関する断面 1 次モーメントである。

ところで、せん断応力度は、次頁の下表のように断面内で分布し、

$$\text{平均せん断応力度} : \tau_{mean} = \frac{Q}{A} \quad (A : \text{断面積})$$

$$\text{最大せん断応力度と平均せん断応力度の比} : k = \frac{\tau_{max}}{\tau_{mean}}$$

を用いると、

$$\tau_m = \tau_{max} = k \cdot \tau_{mean} = k \frac{Q}{A} \quad \dots\dots(3)$$

と表される。

一方、中立軸の位置におけるせん断ひずみ  $\gamma_m$  は、次のように表される。

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G} \quad \dots\dots(4)$$

ここに、 $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  : せん断弾性係数,  $E$  : ヤング率,  $\mu$  : ポアソン比である。

この式(4)に式(3)を代入すると、次のようになる。

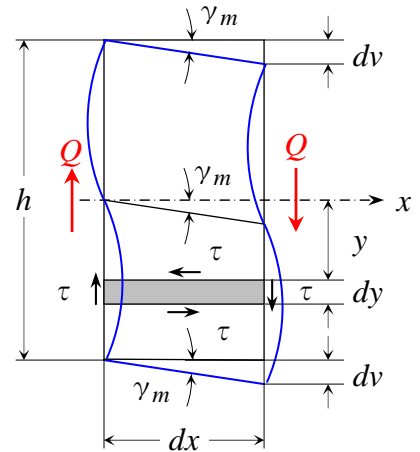
$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G} = \frac{kQ}{GA} \quad \dots\dots(5)$$

このせん断ひずみ  $\gamma_m$  のために、はりの部材軸は無応力時の部材軸 ( $x$  軸) より近似的に  $\gamma_m$  だけ傾くことになる。すなわち、座標  $x$  に位置する断面のせん断力  $Q$  によるたわみ角  $\frac{dv}{dx}$  は、近似的にこのせん断ひずみ  $\gamma_m$  に等しいと考えることができるので、次の式が成り立つ。

$$\frac{dv}{dx} = \gamma_m = \frac{kQ}{GA} \quad \dots\dots(6)$$

せん断力  $Q$  が部材軸方向に変化する場合には、たわみ角  $\frac{dv}{dx}$  も  $x$  の関数として変化するので、次式で与えられるような付加曲率を生ずる。

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{kQ}{GA} \right) \quad \dots\dots(7)$$



一般に、横荷重を受けるはりには曲げモーメント  $M$  とせん断力  $Q$  が作用するので、はりに生ずる曲率にも両者の影響が含まれる。曲げモーメント  $M$  による曲率は  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$  で与えられ、これに式(7)で与えられるせん断力による曲率  $\frac{d^2v}{dx^2}$  を加算すると、実際に生ずる全曲率  $\frac{d^2\eta}{dx^2}$  が次のように得られる。

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{d}{dx} \left( \frac{kQ}{GA} \right) \quad \dots\dots\dots(8)$$

特に、等断面ばりの場合には、次式のように簡単になる。

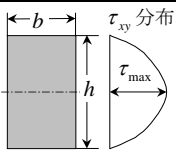
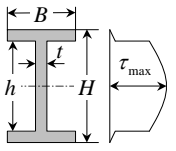
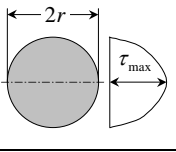
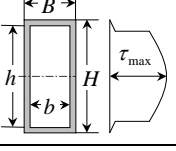
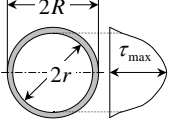
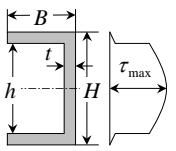
$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\left( \frac{M}{EI} + \frac{kq}{GA} \right) \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここに、 $q$  は、横分布荷重の着目点における荷重強度である。

式(8)あるいは式(9)は、せん断力の影響を含むたわみ  $\eta$  に関する基礎微分方程式であると見なすことができる。したがって、所定の境界条件のもとに、この微分方程式を解くことにより、せん断力による付加たわみを含む全たわみ  $\eta$  の分布を知ることができる。

支間長に比して、はりの高さがそれほど小さくない場合には、付加たわみが全たわみの中で無視できなくなるので、 $\eta$  の計算が重要となる。

各種断面のせん断応力度分布

断面形状	$\tau_{max}$	$k = \frac{\tau_{max}}{\tau_{mean}}$
	$\frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh}$	$\frac{3}{2}$
	$\frac{3}{2} \cdot \frac{BH^2 - (B-t)h^2}{t[BH^3 - (B-t)h^3]} \cdot Q$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{[BH^2 - (B-t)h^2] \cdot [BH - (B-t)h]}{t[BH^3 - (B-t)h^3]}$
	$\frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi r^2}$	$\frac{4}{3}$
	$\frac{3}{2} \cdot \frac{BH^2 - bh^2}{(B-b) \cdot (BH^3 - bh^3)} \cdot Q$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{(BH^2 - bh^2) \cdot (BH - bh)}{(B-b) \cdot (BH^3 - bh^3)}$
	$\frac{4}{3} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{\pi (R^4 - r^4)} \cdot Q$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{R^2 + r^2}$
	$\frac{3}{2} \cdot \frac{BH^2 - (B-t)h^2}{t[BH^3 - (B-t)h^3]} \cdot Q$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{[BH^2 - (B-t)h^2] \cdot [BH - (B-t)h]}{t[BH^3 - (B-t)h^3]}$

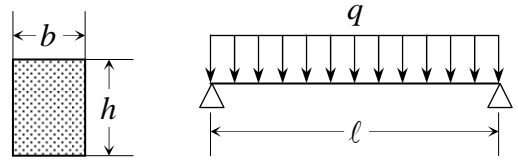
ここに、 $Q$  : せん断力,  $A$  : 断面積,  $\tau_{mean} = \frac{Q}{A}$  : 平均せん断応力度

※小松定夫：『構造解析学Ⅰ』, 丸善, p.172【表7・1】

《せん断力による付加たわみの影響》

右図に示すような長方形断面の単純ばりに等分布荷重が載荷された場合のスパン中央でのたわみについて、せん断力による付加たわみの影響を調べてみる。

このとき、全たわみに関する方程式は、次のように表される。



$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\left(\frac{M}{EI} + \kappa \frac{q}{GA}\right) \dots\dots\dots(9)$$

ここで、部材軸方向の任意の点  $x$  での曲げモーメントは、 $M + qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{q\ell}{2}x$ 、即ち、 $M = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{q\ell}{2}x$  と表されるから、上記の式は次のようになる。

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{q}{2EI}x^2 - \frac{q\ell}{2EI}x - \kappa \frac{q}{GA}$$

これを逐次積分すると、次のようになる。

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{q}{2EI} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q\ell}{2EI} \cdot \frac{x^2}{2} - \kappa \frac{q}{GA}x + C_1$$

$$\eta = \frac{q}{2EI} \cdot \frac{x^4}{12} - \frac{q\ell}{2EI} \cdot \frac{x^3}{6} - \kappa \frac{q}{GA} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

ここで、境界条件を考えると、

1)  $x=0$  のとき、たわみはゼロ、即ち、 $\eta=0$  だから、 $C_2=0$

2)  $x=\ell$  のとき、たわみはゼロ、即ち、 $\eta=0$  だから、 $\frac{q}{2EI} \cdot \frac{\ell^4}{12} - \frac{q\ell}{2EI} \cdot \frac{\ell^3}{6} - \kappa \frac{q}{GA} \cdot \frac{\ell^2}{2} + C_1\ell = 0$

$$\therefore C_1 = \frac{q\ell^3}{24EI} + \kappa \frac{q\ell}{2GA}$$

よって、全たわみの式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{q}{2EI} \cdot \frac{x^4}{12} - \frac{q\ell}{2EI} \cdot \frac{x^3}{6} - \kappa \frac{q}{GA} \cdot \frac{x^2}{2} + \left(\frac{q\ell^3}{24EI} + \kappa \frac{q\ell}{2GA}\right)x \\ &= \frac{q\ell^4}{24EI} \left\{ \left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{x}{\ell}\right) \right\} + \kappa \frac{q\ell^2}{2GA} \left\{ \left(\frac{x}{\ell}\right) - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right\} \\ &= y_m(x) + y_q(x) \end{aligned}$$

ここに、曲げモーメントによるたわみ： $y_m(x) = \frac{q\ell^4}{24EI} \left\{ \left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{x}{\ell}\right) \right\}$

せん断力による付加たわみ： $y_q(x) = \kappa \frac{q\ell^2}{2GA} \left\{ \left(\frac{x}{\ell}\right) - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right\}$  とする。

このとき、スパン中央でのたわみでのたわみは、次のようになる。

$$y_m\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{q\ell^4}{24EI} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right) \right\} = \frac{q\ell^4}{24EI} \cdot \frac{1-4+8}{16} = \frac{5}{16} \cdot \frac{q\ell^4}{24EI} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q\ell^4}{EI}$$

$$y_q\left(\frac{\ell}{2}\right) = \kappa \frac{q\ell^2}{2GA} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} = \kappa \frac{q\ell^2}{2GA} \cdot \frac{2-1}{4} = \kappa \frac{q\ell^2}{8GA}$$

これらより、せん断力による付加たわみと曲げモーメントによるたわみの比をとると、次のように表される。

$$\frac{y_q\left(\frac{\ell}{2}\right)}{y_m\left(\frac{\ell}{2}\right)} = \kappa \frac{q\ell^2}{8GA} / \frac{5}{384} \cdot \frac{q\ell^4}{EI} = \frac{\kappa q\ell^2}{8GA} \cdot \frac{384}{5} \cdot \frac{EI}{q\ell^4} = \frac{48}{5} \cdot \frac{\kappa}{\ell^2} \cdot \frac{EI}{GA}$$

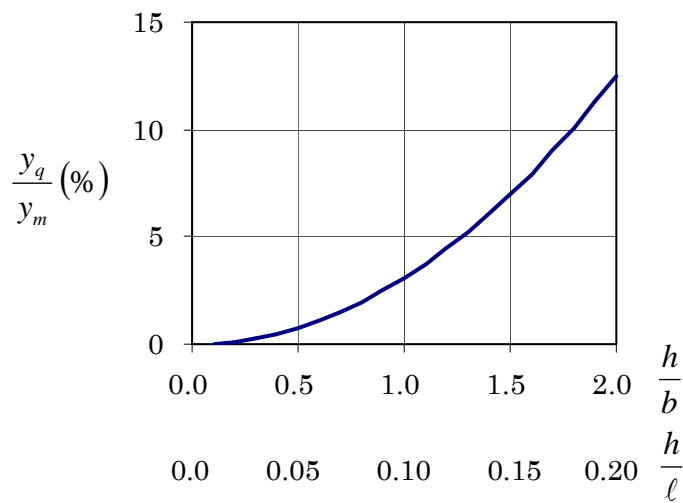
ここで、 $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ 、 $\kappa = \frac{3}{2}$ 、 $A = bh$ 、 $I = \frac{bh^3}{12}$ であるから、これらを上記の式に代入すると、次のようになる。

$$\frac{y_q}{y_m} = \frac{48}{5} \cdot \frac{3}{\ell^2} \cdot \frac{E \cdot \frac{bh^3}{12}}{\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot bh} = \frac{12}{5} \cdot \frac{h^2}{\ell^2} \cdot (1+\mu) = \frac{12}{5} \cdot (1+\mu) \cdot \left(\frac{h}{\ell}\right)^2$$

ここで、さらに、はりの材質として“鋼”を考えると、 $\mu = \frac{3}{10}$ であるから、次のようになる。

$$\frac{y_q}{y_m} = \frac{12}{5} \cdot \left(1 + \frac{3}{10}\right) \cdot \left(\frac{h}{\ell}\right)^2 = \frac{78}{25} \cdot \left(\frac{h}{\ell}\right)^2$$

これを図示すると、下図のようになる。



せん断力による付加たわみの影響

(なお、横軸は長方形断面の高さと幅の比  $\frac{h}{b}$  でも表している。)

この図から、 $\frac{h}{\ell}$  が 0.05 以下、即ち、 $\frac{h}{b}$  が 0.5 以下では、せん断力による付加たわみは、曲げモーメントによるたわみの 1% 以下でほとんど影響がないことがわかる。逆に、 $\frac{h}{\ell}$  が 0.10 以上、即ち、 $\frac{h}{b}$  が 1.0 以上では、せん断力による付加たわみは、曲げモーメントによるたわみの 3% 以上で影響を考慮しなければならない場合があることがわかる。