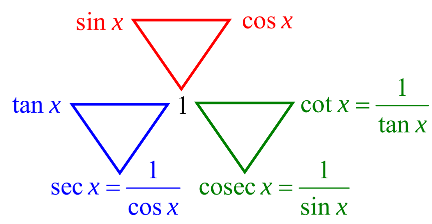
【三角関数の公式】

●基本公式

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\ \cot x=\frac{1}{\tan x},\ \sec x=\frac{1}{\cos x},\ \operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ 1+\tan^2 x=\sec^2 x,\ 1+\cot^2 x=\operatorname{cosec}^2 x$$

《基本公式の覚え方の例》



●倍角と半角の公式

ド・モアブル(de Moivre)の定理より、

$(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)^2=\cos 2\theta+i\cdot\sin 2\theta=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+i\cdot(2\sin\theta\cdot\cos\theta)$ だから、

倍角の公式

$$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$

半角の公式

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2},\ \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$

●加法定理

オイラー(Euler)の公式 $e^{i\cdot\theta}=\cos\theta+i\cdot\sin\theta$ より、

$$e^{i\cdot x}\cdot e^{i\cdot(\pm y)}=e^{i\cdot(x\pm y)}=\cos(x\pm y)+i\cdot\sin(x\pm y)$$

$$=(\cos x+i\cdot\sin x)\cdot(\cos y\pm i\cdot\sin y)=(\cos x\cdot\cos y\mp\sin x\cdot\sin y)+i\cdot(\sin x\cdot\cos y\pm\cos x\cdot\sin y)$$

だから、

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cdot\cos y\mp\sin x\cdot\sin y$$

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cdot\cos y\pm\cos x\cdot\sin y$$

加法定理を応用すると、

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

①＋②より、$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cdot\cos y$

よって、　$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\{\cos(x+y)+\cos(x-y)\}$ 　…………⑤

ここで、$x+y=X$，$x-y=Y$ とおくと、$x=\frac{X+Y}{2}$，$y=\frac{X-Y}{2}$ となるから、

$$\cos X+\cos Y=2\cos\left(\frac{X+Y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{X-Y}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤'$$

同様に、

①－②より、

$$\sin x\cdot\sin y=-\frac{1}{2}\{\cos(x+y)-\cos(x-y)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

$$\cos X-\cos Y=-2\sin\left(\frac{X+Y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{X-Y}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥'$$

③＋④より、

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\{\sin(x+y)+\sin(x-y)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

$$\sin X+\sin Y=2\sin\left(\frac{X+Y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{X-Y}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦'$$

③－④より、

$$\cos x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\{\sin(x+y)-\sin(x-y)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

$$\sin X-\sin Y=2\cos\left(\frac{X+Y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{X-Y}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧'$$

●三角関数の積の分解公式

⑤～⑧をまとめると、

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\{\cos(x+y)+\cos(x-y)\}$$

$$\sin x\cdot\sin y=-\frac{1}{2}\{\cos(x+y)-\cos(x-y)\}$$

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\{\sin(x+y)+\sin(x-y)\}$$

$$\cos x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\{\sin(x+y)-\sin(x-y)\}$$

●三角関数の和・差を積にする公式

⑤'～⑧'をまとめて、$X\Rightarrow x$, $Y\Rightarrow y$ と置き換えると、

$$\cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

【微分の基本公式】

(1) 和の微分公式：$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

(2) 積の微分公式：$\{f(x)\cdot g(x)\}'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

(3) 商の微分公式：$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

(4) 合成関数の微分：$y=f\{g(x)\}$ のとき、$g(x)=z$ とすると、$\dfrac{dy}{dx}=f'(z)\cdot g'(x)=\dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}$

(5) 逆関数の微分：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

【基本的関数の微分一覧表】

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C（定数）	0	x^{α}	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\sec^2 x$	$\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$	$-\mathrm{cosec}^2 x$
$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$	$\sec x\cdot\tan x$	$\mathrm{cosec}\, x=\dfrac{1}{\sin x}$	$-\mathrm{cosec}\, x\cdot\cot x$
$\sin^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$	$\cos^{-1} x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$
$\tan^{-1} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\cot^{-1} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sec^{-1} x$	$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $1<x<\infty$	$\mathrm{cosec}^{-1} x$	$-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $1<x<\infty$
e^x	e^x	$a^x=e^{x\log a}$	$a^x\cdot\log a$
$\log x$	$\dfrac{1}{x}$	$\log_a x=\dfrac{\log x}{\log a}$	$\dfrac{1}{x\log a}$
$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

【双曲線関数と三角関数】

≪双曲線関数≫

［定義］

$$\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$
$$\coth x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

［基本的な性質］

$$\sinh^2 x-\cosh^2 x=1$$
$$\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$$
$$\cosh 2x=\sinh^2 x+\cosh^2 x$$
$$=2\sinh^2 x-1=2\cosh^2 x+1$$
$$\sinh^2 x=\frac{\cosh 2x+1}{2}$$
$$\cosh^2 x=\frac{\cosh 2x-1}{2}$$
$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$1-\tanh^2 x=\frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$1-\coth^2 x=\frac{1}{\sinh^2 x}$$
$$\sinh(-x)=-\sinh x$$
$$\cosh(-x)=+\cosh x$$
$$\tanh(-x)=-\tanh x$$
$$\coth(-x)=-\coth x$$
$$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cdot\cosh y\pm\cosh x\cdot\sinh y$$
$$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cdot\cosh y\pm\sinh x\cdot\sinh y$$

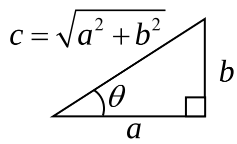
［微積分］（a は定数）

$$\frac{d}{dx}\sinh(ax)=a\cdot\cosh(ax)$$
$$\frac{d}{dx}\cosh(ax)=a\cdot\sinh(ax)$$
$$\frac{d}{dx}\tanh x=\frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$\frac{d}{dx}\coth x=-\frac{1}{\sinh^2 x}$$

≪三角関数≫

［定義］

$$\sin\theta=\frac{b}{c}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\cos\theta=\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{a}{b}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



［基本的な性質］

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$$
$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$
$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$$
$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=+\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sin(x\pm y)=\sin x\cdot\cos y\pm\cos x\cdot\sin y$$
$$\cos(x\pm y)=\cos x\cdot\cos y\mp\sin x\cdot\sin y$$

［微積分］（a は定数）

$$\frac{d}{dx}\sin(ax)=a\cdot\cos(ax)$$
$$\frac{d}{dx}\cos(ax)=-a\cdot\sin(ax)$$
$$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\frac{d}{dx}\cot x=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

【行列式の展開】

行列式の性質

［Ⅰ］行列式の行と列を入れ替えても行列式の値は同じ。
［Ⅱ］行列式の２つの列（または行）を入れ替えると符号が逆になる。
［Ⅲ］１つの列（または行）を定数倍した行列式の値は元の行列式の定数倍になる。
［Ⅳ］分配法則が成り立つ。
［Ⅴ］２つの列（または行）が一致すれば行列式の値は０。
［Ⅵ］１つの列（または行）を定数倍して他の列（または行）に加える（または引く）ことによって行列式の値は変わらない。

２次の行列式の展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

３次の行列式の展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

３次の行列式の展開

３次の行列式の列展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \times \left(b_2c_3 - b_3c_2\right) - a_2 \times \left(b_1c_3 - b_3c_1\right) + a_3 \times \left(b_1c_2 - b_2c_1\right)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

３次の行列式の行展開（性質［Ⅰ］より）

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \times \left(b_2c_3 - b_3c_2\right) - b_1 \times \left(a_2c_3 - a_3c_2\right) + c_1 \times \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

４次の行列式の展開

４次の行列式の列展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

４次の行列式の行展開（性質［Ⅰ］より）

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \times \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$