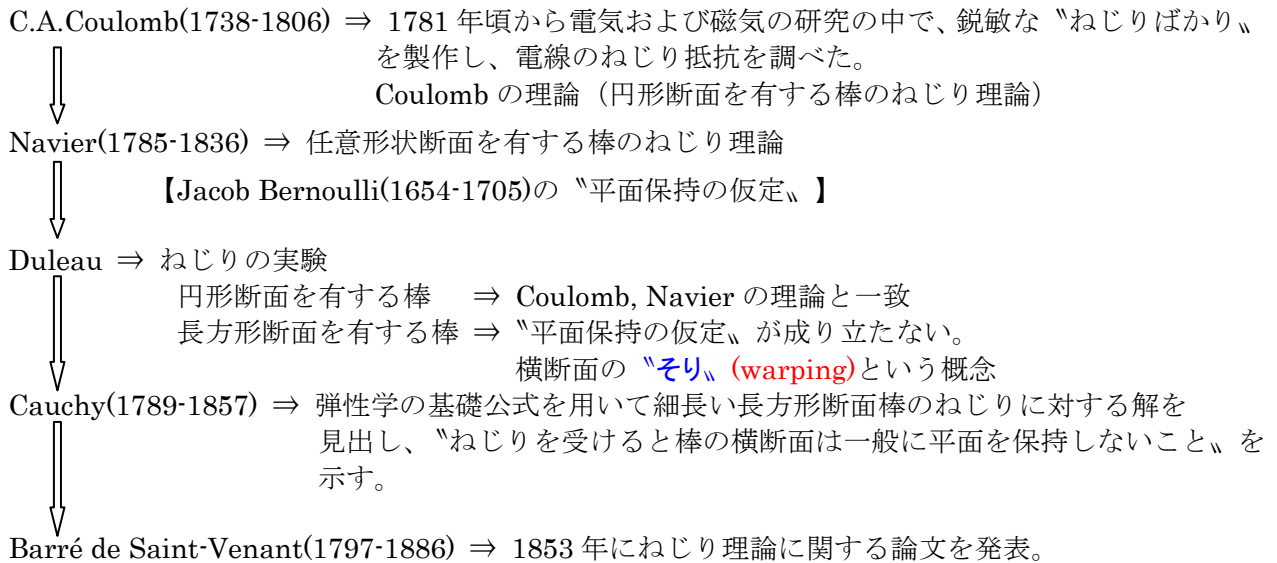


## 単純ねじりを受ける直線材

### 「ねじり」に関する研究の歴史的経緯



### 平面そり型断面と曲面そり型断面

棒にねじり応力が作用すると、棒の各横断面はねじり中心の回りに角  $\varphi$  だけ回転するほかに、一般に、棒の部材軸方向にも変位する。

いま、部材軸を  $x$  軸、それに直交する任意の直交座標軸を  $y, z$  軸とすると、棒の部材軸方向の変位（そり）  $u$  は、変形に際して棒が何ら拘束を受けない場合には、一般に  $y$  および  $z$  の関数として  $u = f(y, z)$  で表される。そのとき、横断面の形状によって、次のようになる。

- ①  $u = 0$  ならば、変形前の横断面と変形後の横断面とは一致する。
- ②  $u = f(y, z)$  が  $y$  および  $z$  の 1 次関数として与えられるならば、

ねじりを受けた後でも平面を保持するが、変形後の横断面は変形前の横断面とは一致しない。

⇒ **平面そり型断面** … 円形断面，円管断面，T型断面など

- ③  $u = f(y, z)$  が  $y$  および  $z$  の 1 次関数で表されない場合には、

棒の横断面はねじりを受けた後ではもはや平面でなくなる。

⇒ **曲面そり型断面** … 正方形断面，三角形断面，I型断面など

### 単純ねじりとそり拘束ねじり

棒がねじりを受けたときに生ずる部材軸方向の変位は、棒の支持方法や載荷方法によって、拘束されない場合と拘束される場合がある。

拘束されない場合 ⇒ **単純ねじり**(pure torsion, uniform torsion)  
= **サンブナンのねじり**(St. Venant's torsion)

拘束される場合 ⇒ **そり拘束ねじり**(warping torsion, non-uniform torsion)

## 丸棒の単純ねじり ⇒ 中実円断面部材

図 I に示す半径  $R$  の等断面丸棒の両端に外力ねじりモーメント  $T$  (external torsional moment) が作用し、単純ねじりの状態にあるとき、丸棒に生ずる変形および応力について考える。

単純ねじりを受けるとき、丸棒の任意断面はその中心  $O$  の回りに  $\varphi$  だけ回転する。この回転角  $\varphi$  をねじり角 (angle of torsion) という。このとき、断面形状が中心  $O$  の回りに軸対称であるので、同一円周上にあるすべての点は円周に沿って同じ量だけ変位し、軸方向変位は生じ得ない。すなわち、変形前に平面であった横断面は、ねじれた後も平面を保持する。これは円形断面を有する直線材の単純ねじりにおける特性である。

さて、図 I に示すように、微小距離  $dx$  を隔てる外周上の隣接 2 断面 (ad 断面, bc 断面) のねじり角を  $\varphi$  および  $\varphi + d\varphi$  とする。これら 2 断面の円周と部材軸  $OO'$  に平行な 2 本の縦繊維で囲まれる微小長方形要素  $abcd$  は、図 II に示すように、ねじりにより平行四辺形  $a'b'c'd'$  に変形しながら移動する。このとき、辺  $a'd'$  および  $b'c'$  は円周に沿って、それぞれ  $R\varphi$  および  $R(\varphi + d\varphi)$  だけ変位することになる。そのため、図 II あるいは図 III から明らかなように微小要素  $abcd$  には次のようなせん断ひずみ  $\gamma$  を生ずる。

$$\gamma = R \frac{d\varphi}{dx} \quad \dots\dots(1)$$

このせん断ひずみ  $\gamma$  に付随して生ずるせん断応力度  $\tau$  は、次式で表される。

$$\tau = G\gamma = GR \frac{d\varphi}{dx} \quad \dots\dots(2)$$

一般に丸棒の内部において、半径  $r (< R)$  の円周上にある同じような微小長方形要素についても同様に  $r \frac{d\varphi}{dx}$  なるせん断ひずみを生ずることは明白である。すなわち、半径  $r$  の円周に沿って、次式で示される一定のせん断応力度  $\tau$  が作用する。

$$\tau = Gr \frac{d\varphi}{dx} \quad \dots\dots(3)$$

式(3)から、単純ねじりを受ける丸棒の横断面には、図 III に示すように、円周方向せん断応力が生じ、その大きさは中心  $O$  からの距離  $r$  に比例する。そのため、外周上において、次式に示す最大せん断応力度をとる。

$$\tau_{\max} = GR \frac{d\varphi}{dx} \quad \dots\dots(2)'$$

さて、ねじりせん断応力  $\tau$  が中心  $O$  の回りにもつモーメントが断面力としてねじりモーメント  $T$  (torsional moment) となって作用する。そこで、図 IV からわかるように、ねじりモーメント  $T$  は次式で計算される。

$$T = \int_0^R \int_0^{2\pi} \tau \cdot (r \cdot d\theta \cdot dr) \cdot r = \int_0^R \int_0^{2\pi} \tau \cdot r^2 d\theta \cdot dr$$

上式に式(3)を代入し積分を実行すると、

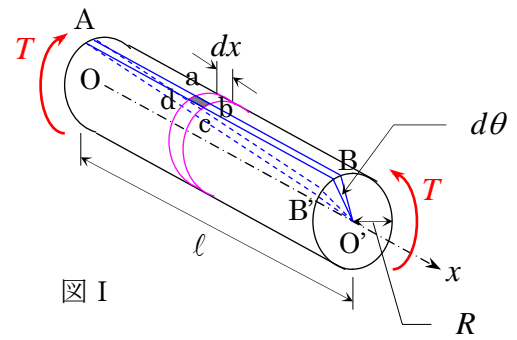


図 I

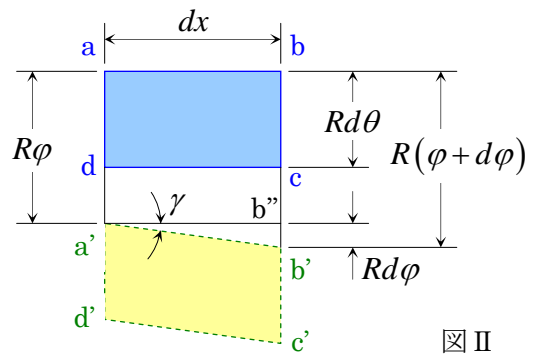


図 II

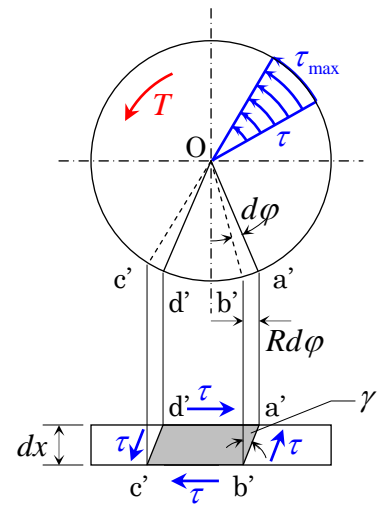


図 III

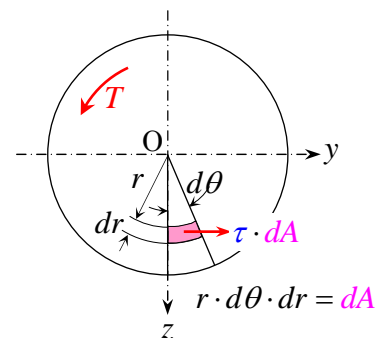


図 IV

$$T = \int_0^R \int_0^{2\pi} Gr \frac{d\varphi}{dx} \cdot r^2 d\theta \cdot dr = G \frac{d\varphi}{dx} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 d\theta \cdot dr = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A r^2 dA = GI_p \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\therefore T = GI_p \frac{d\varphi}{dx} \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 $dA$  は、 $dA = r \cdot d\theta \cdot dr$  で定義される微小面積要素であり、 $I_p$  は、図IVにおいて  $I_p = \int_A r^2 dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_y + I_z$  で定義される断面 2 次極モーメントで、丸棒については次式で与えられる。

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} \quad \dots\dots\dots(5)$$

式(4)に含まれる変形量  $\frac{d\varphi}{dx} = \vartheta$  をねじり率といい、単位長あたりのねじり角にほかならない。したがって、ねじり率の単位は  $rad/cm$  である。

また、 $GI_p$  をねじり剛性(torsional rigidity)といい、その単位は  $kg \cdot cm^2$  である。ねじり率およびねじり剛性は、それぞれ曲げを受ける部材の曲率および曲げ剛性に相当する力学量である。

一般の等断面部材が単純ねじりを受ける場合には、式(4)と同型の式

$$T = GJ \frac{d\varphi}{dx} = GJ\vartheta \quad \dots\dots\dots(6)$$

が成り立つ。ここで、 $GJ$  は、やはりねじり剛性である。

式(4)の丸棒のねじり剛性  $GI_p$  は、一般断面を有する部材のねじり剛性  $GJ$  の特別な場合である。式(4)及び式(6)から明らかなように、ねじり剛性は、単位ねじり率を生じさせるのに要するねじりモーメントにほかならない。

単純ねじりを受ける棒部材については、いずれの断面においても、断面力としてのねじりモーメントは、常に外力ねじりモーメントに等しく、ねじりモーメント  $T$  は部材軸方向に一定である。ところが、等断面材ならば、ねじり剛性  $GJ$  (丸棒の場合には  $GI_p$ ) が一定である。よって、式(6)あるいは式(4)

からわかるように、ねじり率  $\frac{d\varphi}{dx} = \vartheta$  も部材軸 ( $x$  軸) 方向に一定となる。そこで、丸棒の両端 A と B の相対回転角  $\Psi$  は式(2)'より次式で与えられる。

$$\Psi = \vartheta \ell = \frac{\tau_{\max}}{GR} \ell \quad \dots\dots\dots(7)$$

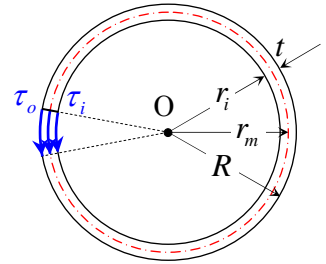
さらに式(4)と式(2)'から  $\frac{d\varphi}{dx}$  を消去すると、丸棒断面の外周に沿う最大せん断応力度  $\tau_{\max}$  がねじりモーメント  $T$  の関数として次のように与えられる。

$$T = GI_p \frac{d\varphi}{dx} = GI_p \cdot \frac{\tau_{\max}}{GR} = \frac{I_p}{R} \cdot \tau_{\max} \quad \therefore \tau_{\max} = \frac{T \cdot R}{I_p} \quad \dots\dots\dots(8)$$

## 円筒体の単純ねじり ⇒ 薄肉閉円断面部材

右図に示すような外半径  $R$ 、内半径  $r_i$ （管厚 or 肉厚  $t$ ）の中空円断面筒体の単純ねじりについて考える。

まず、横断面において半径  $r$  の円周上にある点に作用するせん断応力度  $\tau$  は、丸棒の場合と同様な理由により式(3)で与えられ、右図に示すように、中心  $O$  からの距離  $r$  に比例し、外縁において  $\tau_o$ （ $=\tau_{\max}$ ）、内縁において  $\tau_i$  であって、その間は直線的に変化している。このせん断応力により生ずるねじりモーメント  $T$  は次式で与えられる。



$$T = \int_{r_i}^R \int_0^{2\pi} \tau \cdot r^2 d\theta \cdot dr$$

この式に式(3)を代入し、積分を実行すれば、式(4)と同型の次式を得る。

$$T = GI_p \frac{d\phi}{dx} \quad \dots\dots\dots(4)'$$

ここに、 $I_p = \frac{1}{2} \pi (R^4 - r_i^4)$  : 中空円断面の断面 2 次極モーメント  $\dots\dots\dots(9)$

また、最大せん断応力度  $\tau_{\max}$  も式(8)により、ねじりモーメント  $T$  から直接計算される。ただし、 $I_p$  としては式(9)を用いる。

鋼管のように、管厚  $t$  が半径に比して充分小さい薄肉円筒体の場合は、式(3)から明らかなように、外縁と内縁におけるせん断応力度の差異がほとんどない。したがって、管厚の中心線方向の半径  $r_m \left( = \frac{R+r_i}{2} \right)$  におけるせん断応力度  $\tau_m \left( = \frac{\tau_o + \tau_i}{2} \right)$  を用いて、次式より近似的にねじりモーメントを与えることができる。

$$T = \int_{r_i}^R \int_0^{2\pi} \tau \cdot r^2 d\theta \cdot dr = \tau_m t \cdot r_m \cdot 2\pi r_m = 2\pi r_m^2 \cdot t \cdot \tau_m \quad \dots\dots\dots(10)$$

《 別 解 》

$$\begin{aligned} T &= \int_{r_i}^R \int_0^{2\pi} \tau \cdot r^2 d\theta \cdot dr = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{r_i}^R \tau r^2 dr = 2\pi \cdot \int_{r_i}^R Gr\vartheta \cdot r^2 dr \\ &= 2\pi G\vartheta \cdot \int_{r_i}^R r^3 dr = 2\pi G\vartheta \cdot \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{r_i}^R = \frac{\pi G\vartheta}{2} (R^4 - r_i^4) = \frac{\pi G\vartheta}{2} \cdot (R-r_i) \cdot (R+r_i) \cdot (R^2 + r_i^2) \\ &\cong \frac{\pi G\vartheta}{2} \cdot t \cdot 2r_m \cdot 2r_m^2 = 2\pi t \cdot Gr_m\vartheta \cdot r_m^2 = 2\pi t \cdot \tau_m \cdot r_m^2 = 2\pi r_m^2 \cdot t \cdot \tau_m \end{aligned}$$

よって、逆に外力ねじりモーメント  $T$  を受けて単純ねじりの状態にある円筒体に作用するせん断応力度  $\tau_m$  は、次のように表される。

$$\tau_m = \frac{T}{2 \cdot t \cdot \pi r_m^2} = \frac{T}{2 \cdot t \cdot F_m} \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここに、 $F_m = \pi r_m^2$  は、管厚の中心線で囲まれる円の面積である。

最後に、式(9)において  $R^2 + r_i^2 \cong 2r_m^2$  とおけるので、ねじり率  $\vartheta$  は、次の式で与えられる。

$$I_p = \frac{1}{2} \pi (R^4 - r_i^4) = \frac{1}{2} \pi (R-r_i) \cdot (R+r_i) \cdot (R^2 + r_i^2) \cong \frac{1}{2} \pi \cdot t \cdot 2r_m \cdot 2r_m^2 = 2\pi r_m^3 \cdot t$$

$$\therefore \vartheta = \frac{T}{GI_p} = \frac{T}{2\pi r_m^3 \cdot t \cdot G} \quad \dots\dots\dots(12)$$

### 任意形状の薄肉筒体の単純ねじり ⇒ 薄肉閉断面部材

図 A に示すような任意の断面形状を有する薄肉筒体の単純ねじりについて考える。

このような筒体の両端に大きさ相等しく、方向逆の外力ねじりモーメント  $T$  が作用する場合、図 B に示すように、任意断面には断面力としてのねじりモーメント  $T$  が生じ、外力ねじりモーメントと釣り合っている。このとき、横断面には図示のように、薄肉板厚の中心線の方法にせん断応力が分布して作用している。

いま、図 A において、微小距離  $dx$  を隔てる 2 つの横断面と、微小距離  $ds$  を隔てる 2 つの縦断面で切り取られる微小長方形要素  $abcd$  に作用する応力間の釣合について考える。単純ねじりの状態においては、曲げモーメントおよび軸方向力は作用しないので、垂直応力は存在しない。そこで図 C に示すように、自由片  $abcd$  の 4 つの断面  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  および  $da$  には、それぞれ  $(\tau t)_{s_1} dx$ ,  $(\tau t)_{x_2} ds$ ,  $(\tau t)_{s_2} dx$  および  $(\tau t)_{x_1} ds$  なるせん断応力が作用している。

この自由片について、薄肉中心線に沿って設けた曲線座標  $s$  の方向の力の釣合条件から次のようになる。

$$(\tau t)_{x_1} ds - (\tau t)_{x_2} ds = 0 \quad \therefore (\tau t)_{x_1} = (\tau t)_{x_2} \equiv (\tau t)_x$$

これより横断面の位置  $x$  の如何に関わらず  $\tau t$  の値は一定である。

次に  $x$  軸方向 (薄肉筒体の部材軸方向) の力の釣合条件から以下のようなになる。

$$(\tau t)_{s_1} dx - (\tau t)_{s_2} dx = 0 \quad \therefore (\tau t)_{s_1} = (\tau t)_{s_2} \equiv (\tau t)_s$$

これより縦断面の位置  $s$  の如何に関わらず  $\tau t$  の値は一定である。

さらに自由片  $abcd$  の隅角点 A の回りのモーメントの釣合条件から次のようになる。

$$(\tau t)_s dx \cdot ds - (\tau t)_x ds \cdot dx = 0 \quad \therefore (\tau t)_s = (\tau t)_x \equiv (\tau t) = q \quad \dots\dots(13)$$

したがって、式(13)より、任意の横断面並びに任意の横断面において  $\tau t = q$  の値は相等しく一定値をとる。この力学量  $q$  は、せん断流 (shear flow) と呼ばれる。定義から明らかなように、せん断流は、『薄肉筒体の板厚中心線に沿う単位長あたりに作用するせん断応力の合力』であり、せん断流  $q$  の単位は、 $kg/cm$  (あるいは  $N/mm$ ) である。また、式(13)は、『単純ねじりを受ける薄肉筒体のいかなる横断面上のいかなる点においても、せん断流  $q$  は一定値をとる。』と表現することができる。

次に、せん断流  $q$  とねじりモーメント  $T$  の関係について考える。上記のように、単純ねじり状態にある薄肉筒体の任意の横断面には、図 B に示すように、一定のせん断流  $q$  が横断面を一巡するように作用している。このせん断流と他端に作用する外力ねじりモーメント  $T$  とが部材軸 ( $x$  軸) 回りのモーメントの釣合を保持している。この釣合条件より、

$$T = \oint q r_s ds \quad \dots\dots(14)$$

ここに、 $\oint ds$  は薄肉中心線に沿って一周する  $s$  座標方向の線積分を意味し、 $r_s$  は図 D に示すように、ねじり中心 (断面の回転中心)  $O$  から薄肉中心線の接線  $bce$  に下した垂線の長さである。

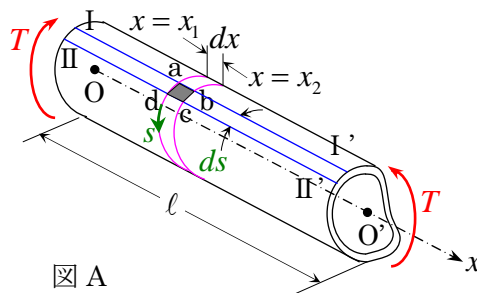


図 A

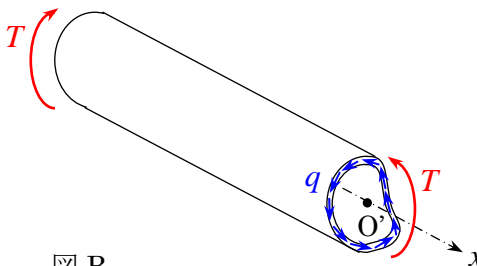


図 B

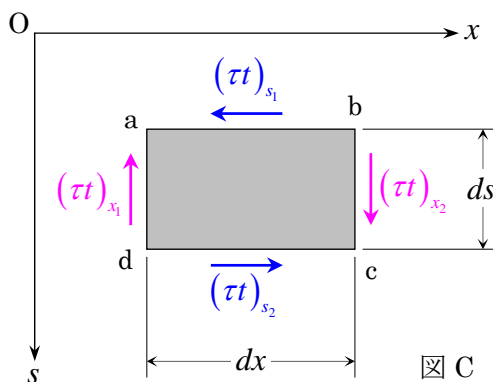


図 C

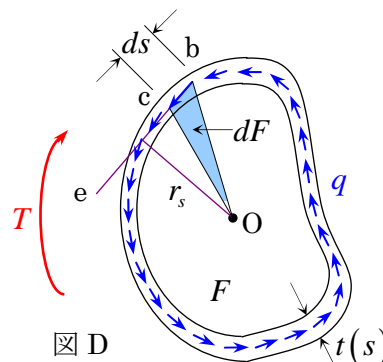


図 D

ところが、図 D からわかるように、式(14)に含まれる  $r_s ds$  は、微小要素 bc とねじり中心 O を結んでできる細長い三角形 Obc (塗りつぶし部分) の面積  $dF$  の 2 倍に等しい。また、せん断流  $q$  は座標  $s$  に無関係に一定であるから、式(14)の線積分は次のようになる。

$$T = 2q \oint dF$$

上記の式において、曲線座標  $s$  に沿う一周積分  $\oint dF$  は、薄肉中心線で作られる閉曲線によって囲まれる面積  $F$  を与える。すなわち、 $\oint dF = F$  である。よって、外力ねじりモーメントを受ける薄肉筒体に生ずるは次式で与えられる。

$$q = \frac{T}{2F} \quad \dots\dots\dots(15)$$

前頁の図 A に示す微小距離  $ds$  だけ隔たる 2 つの縦断面 I I', II II' で切り取られる長さ  $l$  の帯状要素 I II II' I' について考える。この帯状要素の辺 I' II' の端面と辺 I II の端面の間に相対ねじり角  $\Psi$  が生じており、ねじり率  $\vartheta$  は一定であるから、 $\Psi$  は、 $\Psi = \vartheta \cdot l$  で表される。すると、辺 I' II' は辺 I II に対して、図 E(a) に示すように、 $r_s \Psi = r_s \vartheta \cdot l$  だけ、その辺の接線方向 ( $s$  方向) に変位する。

結局、帯状要素 I II II' I' には、次の 2 つの現象による変位が生ずることになる。

① 剛体回転

図 E(a) に示すように、相対ねじり角  $\Psi$  の影響により、点 I を中心として角  $r_s \vartheta$  だけ剛体回転する。

② せん断変形

図 E(b) に示すように、せん断応力  $\tau$  が作用するので、せん断ひずみ  $\gamma = \frac{\tau}{G}$  が生ずる。

実際には、2 つの現象①, ②が同時に生じて、図 E(c) に示すように、帯状要素は剛体回転とせん断ひずみを共にもつことになる。

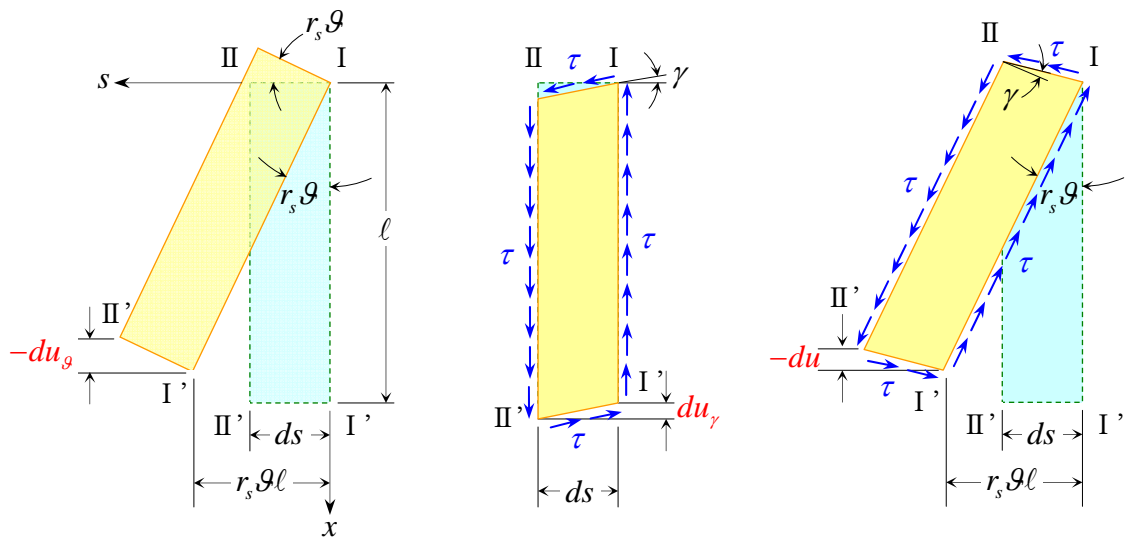


図 E (a) 剛体回転 (b) せん断変形 (c) 両現象の重ね合せ

現象①により、点 II' は点 I' に対して相対的に、 $du_g = -r_s \vartheta ds$  だけ  $x$  軸方向に変位する。【図 E(a)】

現象②により、点 II' は点 I' に対して相対的に、 $du_\gamma = \frac{\tau}{G} ds$  だけ  $x$  軸方向に変位する。【図 E(b)】

したがって、図 E(c) に示すように、点 II' の点 I' に対する相対変位  $du$  は、両現象の重ね合せによって、 $du = du_g + du_\gamma$  と表されるから、次のようになる。

$$du = -\left(r_s \vartheta - \frac{\tau}{G}\right) \cdot ds$$



ところが、点 I' を始点として薄肉中心線に沿い曲線座標  $s$  方向に  $du_g$  を一周積分した値は、図 F(a) に示すように、帯状要素の回転による相対変位  $du_g$  を順次加算したもので、一周後のギャップを  $u_g$  とすると、次式で与えられる。

$$u_g = \oint du_g = -\oint r_s \vartheta ds$$

一方、 $du_y$  を一周積分した値は、図 F(b) に示すように、せん断ひずみによる影響を  $s$  方向に順次加算したもので、一周後のギャップを  $u_y$  とすると、次式で与えられる。

$$u_y = \oint du_y = \oint \frac{\tau}{G} ds$$

実際には、両現象が同時に生じ、かつ I I' にはいかなるギャップもなく連続性が保持されなければならない。すなわち、 $u_g + u_y = 0$  の連続条件式が成立しなければならない。

したがって、連続条件式に上記 2 式を代入すれば、次の式が得られる。

$$u_g + u_y = \oint du_g + \oint du_y = -\oint r_s \vartheta ds + \oint \frac{\tau}{G} ds = 0$$

ここで、ねじり率  $\vartheta$  およびせん断流  $q = \tau t$  は、座標  $s$  に無関係な一定値をとるので、積分記号の外に取り出し、かつ  $\oint r_s ds = 2F$  なることを考慮すると、ねじり率  $\vartheta$  について次式を得る。

$$-\oint r_s \vartheta ds + \oint \frac{\tau}{G} ds = -\vartheta \cdot \oint r_s ds + \frac{q}{G} \oint \frac{ds}{t} = -\vartheta \cdot 2F + \frac{q}{G} \oint \frac{ds}{t} = 0$$

$$\therefore \vartheta = \frac{q}{2FG} \oint \frac{ds}{t} = \frac{q}{2FG_s} \oint \frac{n_g}{t} ds \quad \dots\dots(16)$$

ここに、 $G_s$  は標準材料のせん断弾性係数、 $n_g = \frac{G}{G_s}$  は材料のせん断弾性係数比である。

さらに、式(15)を式(16)に代入すると、次のようになる。

$$\vartheta = \frac{T}{4F^2 G_s} \oint \frac{n_g}{t} ds \quad \dots\dots(17)$$

式(16)および式(17)を **ブレッド・バソ(Bredt-Batho)の公式** という。

次に、断面上で座標  $s$  なる点の  $x$  軸方向変位、すなわち **そり(warping)**  $u$  は、 $du = du_g + du_y$  の式に対して、 $s=0$  から  $s=s$  まで線積分を施すことにより以下のように得られる。

$$u = u_0 + \int_0^s du = u_0 - \vartheta \int_0^s r_s ds + \frac{q}{G_s} \int_0^s \frac{n_g}{t} ds \quad \dots\dots(18)$$

ここに、 $u_0$  は曲線座標  $s$  の原点 ( $s=0$ ) におけるそりを表す。

もし、薄肉筒体が同一材料・同一板厚からなる場合には、せん断弾性係数  $G$ 、板厚  $t$  は座標  $s$  に無関係な一定値をとるので、積分記号外に取り出すことができ、式(16)~(18)は、次のようになる。

$$\vartheta = \frac{qS}{2FGt} \quad \vartheta = \frac{TS}{4F^2 Gt} \quad u = u_0 - \vartheta \int_0^s r_s ds + \frac{qs}{Gt} \quad \dots\dots(16)', (17)', (18)'$$

ここに、 $S$  は薄肉中心線の全周長、 $s$  は  $s=0$  から  $s=s$  までの薄肉中心線の周長である。

一般に単純ねじりを受ける等断面材のねじり剛性  $GJ$  は、式(6)から  $GJ = \frac{T}{\vartheta}$  で与えられる。この式に  $G = G_s$  および式(17)を代入すれば、**薄肉筒体のねじり定数  $J$**  は次のようになる。

$$J = \frac{T}{G_s \vartheta} = \frac{T}{G_s \frac{T}{4F^2 G_s} \oint \frac{n_g}{t} ds} = \frac{4F^2}{\oint \frac{n_g}{t} ds} \quad \therefore J = \frac{4F^2}{\oint \frac{n_g}{t} ds} \quad \dots\dots(19)$$

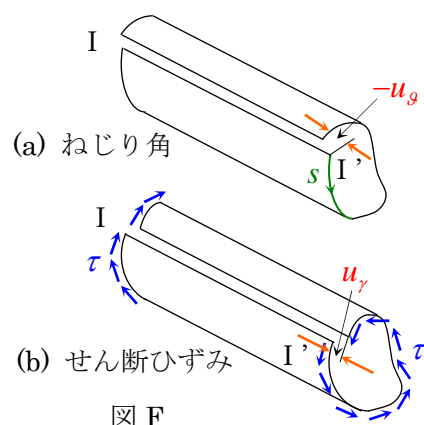


図 F

特別な場合として、図 G に示すような各区間ごとに同一材料・同一板厚からなる薄板を接合した薄肉多角形断面材においては、ブレッダーバソの公式は次のような総和の形で与えられる。

$$g = \frac{T}{4F^2 G_s} \sum_j \frac{n_{gj} S_j}{t_j} \quad \dots\dots\dots(20)$$

ここに、 $S_j$  は各直線区間の辺長、 $\sum_j$  は断面を構成するすべての辺  $j$  について総和することを意味する。添字  $j$  は辺  $j$  に関する量を意味する。

この式(20)を  $GJ = \frac{T}{g}$  に代入すれば、次式により薄肉多角形断面材のねじり定数  $J$  が得られる。

$$J = \frac{4F^2}{\sum_j \frac{n_{gj} S_j}{t_j}} \quad \dots\dots\dots(21)$$

次に隅角点  $i$  におけるそり  $u_i$  は、式(18)から次のように得られる。

$$u_i = u_0 - 2gF_i + \frac{q}{G_s} \sum_{j=1}^i \frac{n_{gj} S_j}{t_j} \quad \dots\dots\dots(22)$$

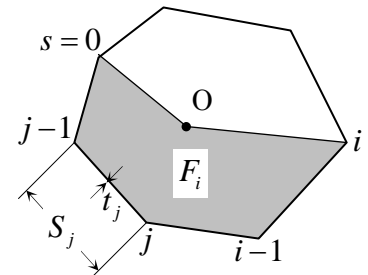


図 G

ここに、 $F_i$  は図 G に示すように、ねじれ中心  $O$  と隅角点  $s=0$  および隅角点  $i$  を結ぶ 2 つの線分と薄肉中心線で囲まれる部分すなわち塗りつぶし部分の面積を表す。 $\sum_{j=1}^i$  は隅角点  $s=0$  から隅角点  $i$  に至るすべての区間にわたり総和することを意味する。

なお、2 軸対称断面の場合には、ねじり中心と重心とは一致する。そこで、図 H(a) に示すような、全断面にわたり同一材料からなる 2 軸対称箱型断面の場合には、ねじり率  $g$  は式(20)の特別な場合として次のように具体的に与えられる。

$$g = \frac{T}{2Ga^2 b^2 \left( \frac{a}{t_a} + \frac{b}{t_b} \right)} = \frac{q}{Gab \left( \frac{a}{t_a} + \frac{b}{t_b} \right)} \quad \dots\dots\dots(23)$$

断面の 2 軸対称性を考慮すると、直交する 2 つの対称軸と薄肉中心線の交点すなわち図 H(b) に示す辺の中点 A, B, C, D でそりが 0 となることがわかる。

そこで、式(22)において  $u_i = u_A = 0$  とおくと、

$$u_A = 0 = u_0 - 2g \frac{ab}{8} + \frac{q}{G} \cdot \frac{a}{2t_a}$$

この式に式(23)を代入し、 $u_0$  について解けば、

$$u_0 = \frac{q}{4G} \left( \frac{b}{t_b} - \frac{a}{t_a} \right) \quad \dots\dots\dots(24)_1$$

よって、他の隅角点 1, 2 および 3 におけるそりは、式(22)に式(24)<sub>1</sub> を代入して次のように求められる。

$$u_1 = -u_0 \quad \dots\dots\dots(24)_2$$

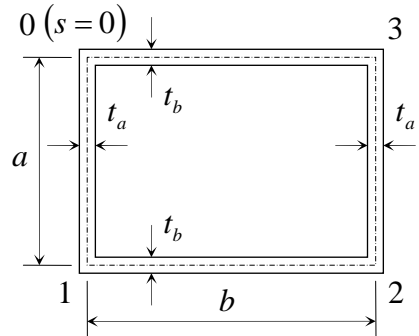
$$u_2 = u_0 \quad \dots\dots\dots(24)_3$$

$$u_3 = -u_0 \quad \dots\dots\dots(24)_4$$

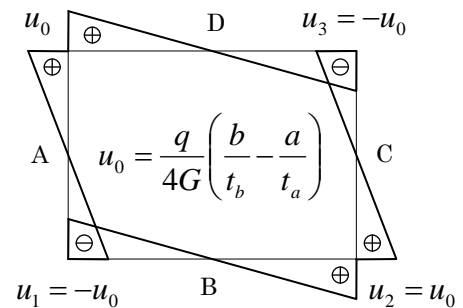
式(18)からわかるように、薄肉多角形断面については、隅角点間の各区間において、 $r_s$  および  $Gt$  が一定であるから、そり  $u$  は  $s$  の 1 次関数である。したがって  $u$  は  $s$  方向に直線変化する。

以上を総合して、そりの箱型断面内分布は図 H(b) に示すように逆対称分布になる。

特に、 $\frac{a}{t_a} = \frac{b}{t_b}$  なる関係が成立つような箱型断面においては  $u_0 = 0$ ，したがって断面上のあらゆる点において  $u = 0$  となる。このような箱型断面材は単純ねじりにより、そりを生じないわけである。



(a)寸法



(b)そり分布

図 H 2 軸対称箱型断面

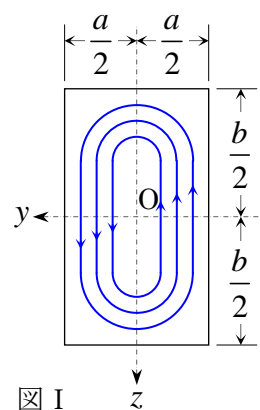


## 長方形断面を有する中実直線材の単純ねじり ⇒ 中実長方形断面部材

右図 I に示すような短辺  $a$ 、長辺  $b$  の長方形断面を有する中実直線材に単純ねじりが作用したときの断面内任意点  $(y, z)$  における  $y$  軸方向せん断応力  $\tau_{xy}$ 、 $z$  軸方向せん断応力  $\tau_{xz}$  は次式で与えられる。【小松定夫：構造解析学Ⅲ－弾性連続体の解析－，丸善，第 16 章参照】

$$\tau_{xy} = \frac{8G\vartheta a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} (-1)^n \left\{ \frac{\sinh \frac{(2n-1)\pi}{a} z}{\cosh \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \right\} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{a} \dots\dots\dots(23)$$

$$\tau_{xz} = \frac{8G\vartheta a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} (-1)^{n-1} \left\{ 1 - \frac{\cosh \frac{(2n-1)\pi}{a} z}{\cosh \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \right\} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{a} \dots\dots\dots(24)$$



$\tau_{xy}$  と  $\tau_{xz}$  の合せん断応力  $\tau_{xr} = \sqrt{(\tau_{xy})^2 + (\tau_{xz})^2}$  の等高線と作用方向の模式図を図 I に示す。

$b > a$  なる場合、式(24)において、 $y = \pm a/2$ 、 $z = 0$  とおけば、そのときの  $|\tau_{xz}|$  が最大せん断応力度  $\tau_{\max}$  にほかならない。

$$\tau_{\max} = |\tau_{xz}| = \frac{8G\vartheta a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} |(-1)^{n-1}| \left\{ 1 - \frac{1}{\cosh \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \right\} \left| \sin \pm \frac{(2n-1)\pi}{2} \right| = \frac{8G\vartheta a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\cosh \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \right\}$$

ところで、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$  だから、

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{8G\vartheta a}{\pi^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \right\} = \frac{8G\vartheta a}{\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{8} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \right\} \\ &= \frac{8G\vartheta a}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \right\} = G\vartheta a \cdot \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \right\} \\ \therefore \tau_{\max} &= G\vartheta a \cdot \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 \cosh \frac{(2n-1)\pi}{2a} b} \right\} \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

となり、右辺の級数は急速に収束する。

一方、ねじりモーメント  $T$  とねじり率  $\vartheta$  の関係は次式で与えられる。

$$T = G\vartheta \cdot \frac{1}{3} ba^3 \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \tanh \frac{(2n-1)\pi b}{2a} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

式(6)'に式(26)を代入すると、長方形断面を有する部材のねじり剛性  $GJ$  として次式が得られる。

$$GJ = G \cdot \frac{1}{3} ba^3 \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \tanh \frac{(2n-1)\pi b}{2a} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

薄板のような細長い長方形断面を有する部材で  $b \gg a$  の場合には、

$$\tanh \frac{(2n-1)\pi b}{2a} \cong 1 \quad \text{また、} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} = \frac{\pi^4}{96}$$

であるから、ねじり剛性  $GJ$  の式(27)は、簡単化されて次のようになる。

$$GJ \cong G \cdot \frac{1}{3} ba^3 \cdot \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{\pi^4}{96} \cdot \frac{a}{b} \right) = G \cdot \frac{1}{3} ba^3 \cdot \left( 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{a}{b} \right) \cong G \cdot \frac{1}{3} ba^3 \cdot \left( 1 - 0.63 \cdot \frac{a}{b} \right)$$

$$\therefore \boxed{GJ = G \cdot \frac{1}{3} ba^3 \cdot \left( 1 - 0.63 \cdot \frac{a}{b} \right)} \dots\dots\dots(27)'$$

一般長方形断面材の単純ねじりに関して、式(25), (26)に、係数  $k, k_1, k_2$  を導入すると、ねじり率  $\vartheta$  および最大せん断応力度  $\tau_{max}$  が次のように与えられる。

$$\tau_{max} = G\vartheta a \cdot \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 \cosh \frac{(2n-1)\pi b}{2a}} \right\} = kG\vartheta a \quad \dots(25)'$$

$$\vartheta = \frac{T}{Gba^3 \cdot \frac{1}{3} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{a}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5 \tanh \frac{(2n-1)\pi b}{2a}} \right\}} = \frac{T}{k_1 Gba^3} \quad \dots(26)'$$

$b/a$	$k$	$k_1$	$k_2$
1.0	0.675	0.1406	0.208
1.2	0.759	0.166	0.219
1.5	0.848	0.195	0.231
2.0	0.930	0.229	0.246
2.5	0.968	0.249	0.258
3.0	0.985	0.263	0.267
4.0	0.997	0.281	0.282
5.0	0.999	0.291	0.291
10.0	1.000	0.312	0.312
$\infty$	1.000	0.333	0.333

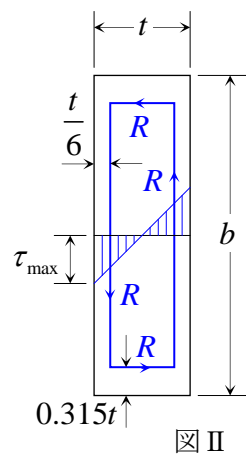
式(25)'と式(26)'から  $G\vartheta$  を消去すると、

$$\tau_{max} = kG \cdot \frac{T}{k_1 Gba^3} \cdot a = \frac{kT}{k_1 ba^2} = \frac{T}{\frac{k_1}{k} ba^2} = \frac{T}{k_2 ba^2} \quad \dots\dots\dots(25)''$$

式(25)',(26)',(25)''に含まれる係数  $k, k_1, k_2$  は右上表に示すように辺長比  $b/a$  の関数として変化する。

短辺  $a (=t)$  が長辺  $b$  に比して充分小さい細長い長方形断面では、合せん断応力  $\tau_{xr}$  は、上下縁付近を除く板幅中間部で図Ⅱに示すように、長辺に平行に作用する。そして中間部分に作用する合せん断応力  $\tau_{xr}$  ( $=\tau_{xz}$ ) の板厚方向分布は図示のように三角形分布であり、 $z$  軸を含む板中央面の左右で逆向きに作用している。そこで同一方向の片側三角形部分のせん断応力の合力を  $R$  とすると、

$$R = \frac{1}{4} \cdot \tau_{max} \cdot t \text{ と表される。ここで、} R \text{ の単位は } kg/cm \text{ であって、} R \text{ は三角形部分の重心位置すなわち板の縁から } \frac{1}{3} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t}{6} \text{ だけ離れた所に、左右で逆向きに作用している。ただし、上下縁付近では、合せん断応力 } \tau_{xr} \text{ は一般に、図Ⅰに示すように滑らかな曲線を描いて方向転換するので、合力 } R \text{ も同様に滑らかに方向転換する。これを近似的に図Ⅱのように理想化する。具体的に述べると、合力 } R \text{ は、上下縁付近で直角に方向転換するものと見なす。} b \text{ が } t \text{ より充分大きい長方形断面においては、この理想化による近似度は実用的である。そして上下縁に平行な合力 } R \text{ の位置は縁から } 0.315t \text{ の所であると考えられる。すると合力 } R \text{ は、図Ⅱに示すように、一種の閉じたせん断流 } R \text{ となって断面力としてのねじりモーメント } T \text{ を生じさせる。このねじりモーメント } T \text{ は、式(15)において } q \text{ を } R \text{ と置き換えて、} T = 2RF \text{ と表される。ただし、} F \text{ は } R \text{ の閉じた作用線で囲まれる面積であり、} F = \frac{2}{3}t(b - 0.63t) \text{ と表される。}$$



と表される。

そこで、合力  $R$  と  $F$  の式を  $T = 2RF$  に代入すると、次のようにねじりモーメント  $T$  と最大せん断応力度  $\tau_{max}$  の関係式が得られる。

$$T = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \tau_{max} \cdot t \cdot \frac{2}{3}t(b - 0.63t) = \frac{1}{3}t^2(b - 0.63t) \cdot \tau_{max} = \frac{1}{3}bt^2 \cdot \left(1 - 0.63\frac{t}{b}\right) \cdot \tau_{max} \quad \dots\dots\dots(28)$$

$\frac{b}{t} \geq 10$  なる場合には、右上表から  $k \cong 1$ 、かつ式(25)'において  $a = t$  とおけば、 $\tau_{max} = G\vartheta t \quad \dots(25)'''$

さらに、 $\frac{b}{t} \geq 15$  程度の薄板断面になると、式(27)', (28)の ( ) 内の第 2 項が充分小さくなり省略できるので、次の簡易式が成立する。

ねじり剛性： $GJ = \frac{1}{3}bt^3 \cdot G$  .....(27)''

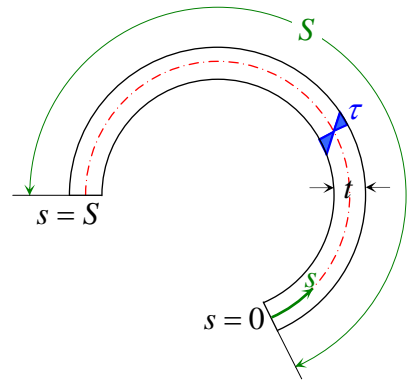
最大せん断応力度： $\tau_{max} = \frac{3T}{bt^2}$  .....(28)'

式(25)''と式(28)'から  $\tau_{max}$  を消去すると、

ねじり率： $\vartheta = \frac{3T}{Gbt^3}$  .....(26)''

## 薄肉開断面材の単純ねじり

右図に示すように、断面の広がりに対して板厚  $t$  が十分に小さく、かつ中空でない薄肉部材を **薄肉開断面材 (thin-walled member with open section)** という。断面の薄肉中央線の展開長を  $S$  と記すと、 $S \gg t$  であるような開断面材にはかならない。すると、せん断応力度の板厚方向の分布は、細長い長方形断面材の場合と同様、右図に塗りつぶして示すように、薄肉中央線上で 0、両側の縁で  $\tau_{\max}$  をとる三角形分布となる。そこで、式(27)'を参照して、次のようなねじり剛性  $GJ$  の式が得られる。



$$GJ = \frac{1}{3} \int_0^S \{t(s)\}^3 ds \cdot G \quad \dots\dots\dots(29)$$

特に、板厚  $t$  が一定の場合には、

$$GJ = \frac{1}{3} S t^3 \cdot G \quad \dots\dots\dots(29)'$$

また、ねじり率  $\vartheta$  および最大せん断応力度  $\tau_{\max}$  は、それぞれ式(26)'および式(28)'において、 $b = S$  とおくことによって、薄肉開断面材のねじり率および最大せん断応力度の公式が次のように得られる。

$$\vartheta = \frac{3T}{Gt^3S} \quad \dots\dots\dots(30)$$

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{t^2S} \quad \dots\dots\dots(31)$$

### 【閉じた円管とスリット入りの円管】

いま、右図(a)に示すような板厚  $t = 1$ 、薄肉中央線の半径  $R = 15$  の円管と全く同一寸法で縦方向にスリットを入れた右図(b)に示す薄肉開断面材が単純ねじりを受けた場合について比較する。

さて、図(a)の円管に外力ねじりモーメント  $T_I$  が、図(b)のスリット入り円管に外力ねじりモーメント  $T_{II}$  が作用するものとする。以下、添字 I および II はそれぞれ閉断面材および開断面材に関する力学量を意味する。

まず、閉断面材については、

$$\text{式(11)より、} T_I = 2\pi R^2 t \tau \quad \text{式(12)より、} \vartheta_I = \frac{T_I}{2\pi R^3 G t}$$

一方、開断面材については、

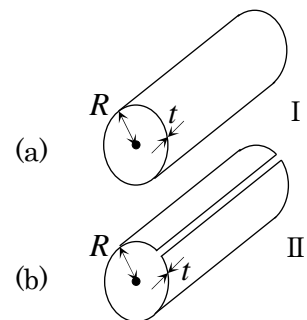
$$\text{式(31)より、} T_{II} = \frac{1}{3} t^2 \cdot 2\pi R \tau \quad \text{式(30)より、} \vartheta_{II} = \frac{3T_{II}}{Gt^3 \cdot 2\pi R}$$

したがって、ねじり剛性比は、
$$\frac{GJ_I}{GJ_{II}} = \frac{2\pi R^3 G t}{\frac{1}{3} G t^3 \cdot 2\pi R} = 3 \cdot \left(\frac{R}{t}\right)^2 = 3 \cdot 15^2 = 3 \cdot 225 = 675$$

よって、両者の最大せん断応力度が  $\tau_I = \tau_{II} = \tau$  となる外力ねじりモーメント比は、
$$\frac{T_I}{T_{II}} = \frac{2\pi R^2 t \tau}{\frac{1}{3} t^2 \cdot 2\pi R \tau} = \frac{3R}{t} = 45$$

また、両者の外力ねじりモーメントが  $T_I = T_{II} = T$  のときのねじり率比は、
$$\frac{\vartheta_I}{\vartheta_{II}} = \frac{\frac{T}{2\pi R^3 G t}}{\frac{3T}{Gt^3 \cdot 2\pi R}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{t}{R}\right)^2 = \frac{1}{675}$$

以上の例からもわかるように、一般に、薄肉閉断面材は単純ねじりに対して、同一形状寸法の薄肉開断面材に比して、はるかに大きいねじり剛性を有する。



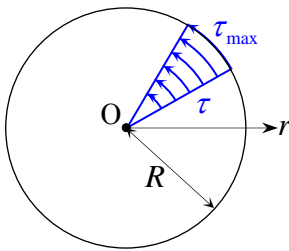
# 単純ねじりを受ける直線材【まとめ】

単純ねじり(pure torsion) or サンプナンのねじり(St. Venant's Torsion)の基本式

$$T = GJ \frac{d\varphi}{dx} = GJ\vartheta$$

$T$ : ねじりモーメント(torsional moment)  
 $G$ : せん断弾性係数  
 $J$ : ねじり定数  
 $x$ : 部材軸方向  
 $\varphi$ : ねじり角(angle of torsion)
   
 $GJ$ : ねじり剛性(torsional rigidity)
   
 $\frac{d\varphi}{dx} = \vartheta$ : ねじり率

中実断面の単純ねじり



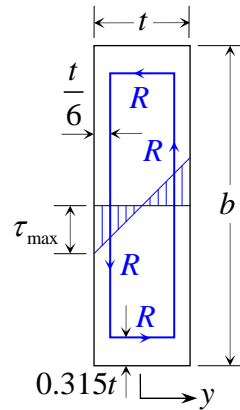
円断面

$$J = \frac{\pi R^4}{2} = I_p$$

: 断面 2 次極モーメント

$$\tau = Gr \frac{d\varphi}{dx} = Gr\vartheta = \frac{T}{J} r$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{J} R = \frac{2T}{\pi R^3}$$



長方形断面

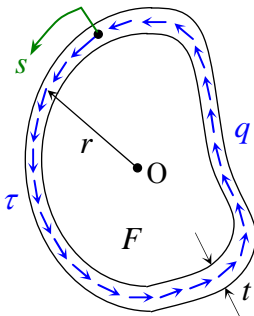
$$J = \frac{1}{3} bt^3 \cdot \left(1 - 0.63 \cdot \frac{t}{b}\right)$$

$\frac{b}{t} \geq 15$  のとき、 $J = \frac{1}{3} bt^3$

$$\tau = \frac{T}{J} \cdot 2y$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{J} t = \frac{3T}{bt^2}$$

薄肉断面の単純ねじり



閉断面

板厚  $t$  方向のせん断流(shear flow)  $q = (\tau t) = (\tau t)_s = (\tau t)_x = const$

$$T = \oint q r ds = q \oint r ds = q \cdot 2F$$

$r$ : ねじり中心  $O$  から薄肉中心線の接線に下した垂線の長さ

$\oint ds$ : 薄肉中心線に沿って一周する  $s$  座標方向の線積分

$F$ : 薄肉中心線で作られる閉曲線によって囲まれる面積

ブレッド・パソ(Bredt-Batho)の公式

$$\vartheta = \frac{q}{2FG} \oint \frac{ds}{t} = \frac{q}{2FG_s} \oint \frac{n_g}{t} ds = \frac{T}{4F^2 G_s} \oint \frac{n_g}{t} ds$$

$G_s$ : 標準材料のせん断弾性係数,  $n_g = \frac{G}{G_s}$ : 材料のせん断弾性係数比

$$J = \frac{4F^2}{\oint \frac{n_g}{t} ds}$$

$$\tau = \frac{T}{2Ft}$$

開断面

$S$ : 断面の薄肉中央線の展開長 (全周長),  $S \gg t$  すなわち  $\frac{S}{t} \geq 15$

$$J = \frac{1}{3} S t^3 \quad \tau = \frac{T}{J} \cdot 2y \quad \tau_{\max} = \frac{T}{J} t = \frac{3T}{S t^2}$$

開断面のねじりは、単純ねじり+そり拘束ねじりであり、次のような基礎微分方程式で表される。

$$T = GJ \frac{d\varphi}{dx} - EI_w \frac{d^3\varphi}{dx^3}$$

$EI_w$ : 曲げねじり剛性

