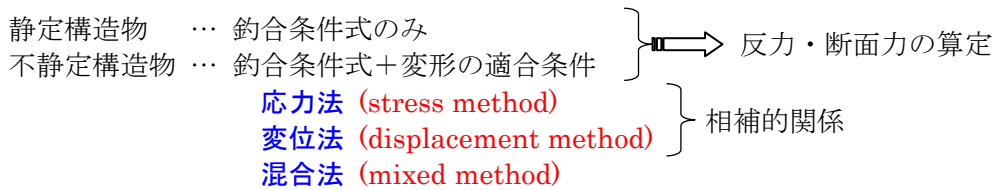


不静定骨組構造物の解析



●応力法

構造物の部材内や部材の連結部における変位の連続性、支点における変位の拘束など、いわゆる**変位の適合条件 (compatibility condition of displacement)**から、**断面力や反力を未知量**とする方程式を組み立て、それを解いて**直接**断面力や反力を求める方法。

応力法によって、不静定構造物を解析するには、静定基本系を選定し、所定の荷重および単位不静定力を静定基本系に作用させ各ケースについて断面力分布を求める必要がある。

◆ 全体系解析法 (構造物全体を一括して取り扱う古典的手法)

- ① 変形公式を利用する方法
- ② **単位荷重法**
- ③ 弾性重心法
- ④ **3連モーメントの定理 (three moments theorem)**とその応用

◆ 部材たわみ性マトリックス解析法 (member flexibility method)

部材たわみ性マトリックスから出発して、静定基本系に関する変換マトリックスを利用して全体系たわみ性マトリックスを得る方法。

●変位法

釣合条件式を適用して**変位を未知量**とする**剛性方程式**を組み立て、これを解いて、まず変位を計算し、それをを用いて断面力や反力を**間接的**に評価する方法。

不静定次数が大なる複雑な骨組構造物を応力法で解析する場合には、極めて煩雑であるばかりでなく、人為的ミスが起き易いため、高次不静定構造物に対して、未知量の個数の低減並びに簡明な規約に則した機械的定式化手法の確立が必要となった。

モール(Mohr)は、トラスの剛節による2次応力を求めるために、節点回転角を未知変形量(一般変位)として解析し、初めて上述の考え方を具体化した。【トラスの2次応力についてのモールの解法】

その後、平面ラーメンの解析に節点回転角を未知量として統一的に導入した**“たわみ角法、(slope deflection method)**がウィルソン(Wilson)、ゲーラ(Gehler)によって提示され、ラーメンの設計計算が容易に実施し得るようになった。

さらにその後、各種構造物の多様化・複雑化、多量の数値計算処理へのコンピュータの導入によって、“マトリックス解析法”が開発された。初期の段階では、応力法の研究が主体であったが、その短所に気づき、変位を未知量とする“マトリックス変位法”が初めてLevy(1953)により発表された。これによって変位法の特長が認識され、**有限要素法 (FEM : Finite Element Method)**の創始者Turner-Clough-Martin-Topp*は、“**直接剛性法**”を発表した。この方法は、プログラム化が簡単明快で、かつ人手を要する作業時間が大幅に節減される効率のよい解法として発達してきた。変位法は別名**“剛性法、(stiffness method)**とされている。

*M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin and L. J. Topp : “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures”, *Journal of Aeronautical Science*, Vol.23, No.9(1956), p.805.

●混合法

不静定構造物の解析において、応力法は未知量として「不静定力」を、変位法は「変位」を選ぶ方法である。これをさらに一般化して「力」と「変位」を混合して未知量に選ぶことが考えられる。この方法を混合法と呼ぶことにする。

◆ Efsen の解法 (狭義の “マトリックス混合法” と呼ぶことにする。)

混合法は Efsen**によって最初に提唱され、変位法および応力法は混合法の特別な場合と解釈することができる。

**Axel Efsen : “Beregning av statisk obestemte Systemer(不静定構造物の計算)”,
Bygningsstat, Medd. Copenhagen(1940)

◆ 伝達マトリックス法(transfer matrix method)

Efsen の解法とは、全く別の概念で力と変位を未知量とし、構造物の一端 A から順次、中間の未知量を消去して他端における既知の幾何学的条件および力学的条件を用いて一端 A における未知量の解を得ようとする方法。この方法では、中間の未知量を消去するために、伝達マトリックス(transfer matrix)および格点マトリックス(point matrix)を利用することから “伝達マトリックス法” と名付けられている。土木構造物として使用頻度が高い直列型構造物の解析に適しているため、土木技術者の間ではしばしば実用されている。

伝達マトリックス法の考え方の根源は、微分方程式の解曲線を求める際の図式積分法概念に遡る。初期の時代には、Holzer-Tolle が「クランクシャフトの振動」、Herzberger が「レンズ系の光線の進路」、Koiter が「弾性支承上の連続桁」、Stewart-Kleinlogl が「トラバース法」などにこの考え方を応用した。

伝達マトリックス法の構造解析学への応用は、Marguerre, Fuhrke, Schnell, Pestel, Schumpich などの西ドイツの研究者により推進された。そして弾性問題のみならず、安定性問題・振動問題へと発展していった。

静定基本系

不静定構造物からその不静定次数に等しい個数の不静定反力や不静定部材力を取り除くと静定構造物が得られる。これを元の不静定構造物の**静定基本系(statically determinate fundamental structure)**という。

各種構造物の代表的例について静定基本系を掲げると次の通りである。

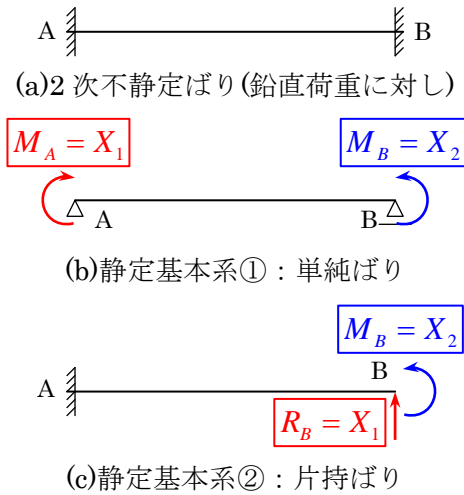


図-1 両端固定ばりの静定基本系と不静定力

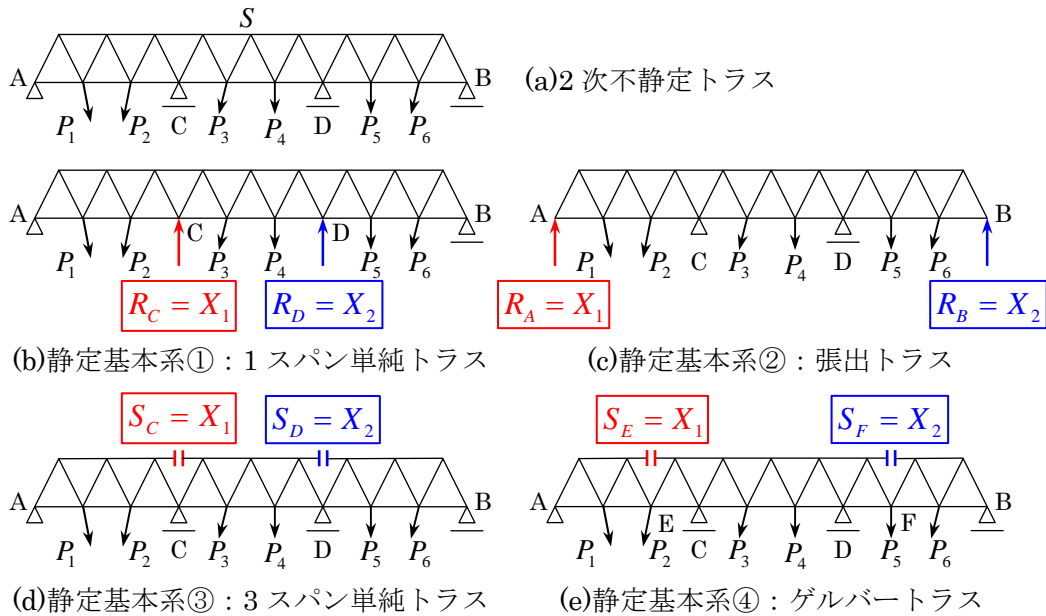


図-2 3スパン連続トラスの静定基本系と不静定力

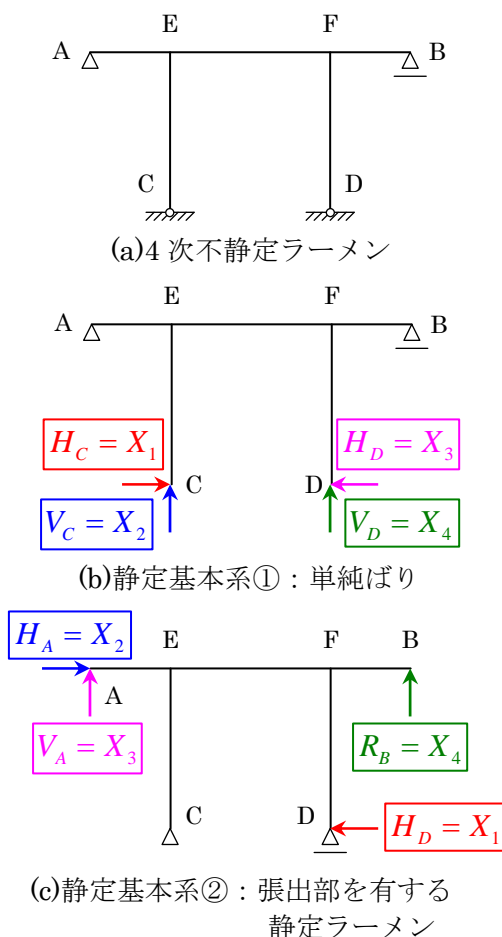


図-3 π型ラーメンの静定基本系と不静定力

不静定構造物の力学量

図-2 に示す 3 スパン連続トラスは 2 次不静定構造物であるが、これに荷重 $P_1 \sim P_6$ が作用する場合の力学量 Y (例えば、反力 R , 部材力 S , たわみ d) は次のように求められる。

問題の 3 スパン連続トラスについて、ある静定基本系を選ぶと、これに与えられた荷重 $P_1 \sim P_6$ と不静定力 X_1, X_2 が図-2(b)~(e) に示すように同時に作用するとき生ずる力学量は、元の連続トラスの力学量と同じである。このことから求める力学量 Y は、「重ね合せの原理」により次式で計算できる。

$$Y = Y_0 + Y_1 \cdot X_1 + Y_2 \cdot X_2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 Y_0 は、静定基本系に荷重 $P_1 \sim P_6$ のみが作用するときの力学量、
 Y_1 は、静定基本系に不静定力 $X_1=1$ のみが作用するときの力学量、
 Y_2 は、静定基本系に不静定力 $X_2=1$ のみが作用するときの力学量 である。

一般に、 n 次不静定構造物の力学量 Y は次式で与えられる。

$$Y = Y_0 + \sum_{j=1}^n Y_j \cdot X_j \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 Y_j は、静定基本系に不静定力 $X_j = 1$ のみが作用するときの力学量である。

式(1)あるいは式(2)に含まれる量の中で Y_0 および $Y_j (j=1, 2, \dots, n)$ は静定基本系について容易に計算できる。したがって、未知不静定力 $X_j (j=1, 2, \dots, n)$ を求めることができれば、式(2)により不静定構造物の任意の力学量 Y が算定し得る。

以上の点から、応力法においては、未知不静定力 $X_j (j=1, 2, \dots, n)$ に関する方程式を如何に組み立て、それを解くかということが問題の焦点となる。

変位の適合条件

いま、 n 次不静定構造物において、不静定力 X_i の作用点での X_i 方向変位を d_i とすると、“重ね合せの原理” から次式が成り立つ。

$$d_i = d_{i0} + \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot X_j \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 d_{i0} は、静定基本系に荷重のみを作用させたときの X_i 作用点での X_i 方向変位、 d_{ij} は、静定基本系に単位不静定力 $X_j = 1$ が作用するときの X_i 作用点での X_i 方向変位 である。

式(3)はすべての不静定力の作用点での変位 d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) について成立つ。ところが、不静定力 X_i が剛支点における反力あるいは固定モーメントであれば、それぞれの方向の変位あるいは回転角は拘束されていて 0 である。すなわち、 $d_i = 0$ でなければならないという変位の拘束条件が存在する。

また、もし X_i が不静定断面力（例えば図-2(d),(e)に示すトラスの部材力 S ）であれば、 d_i は不静定力 X_i の作用断面の相対変位あるいは相対回転角に他ならない。ところが、実際の不静定構造物においては、これらの作用断面は連続していて d_i は 0 でなければならない。換言すれば、一般変位（相対変位あるいは相対回転角）の連続条件が存在する。

以上のような一般変位（変位・回転角・相対変位・相対回転角などの力学量の総称）の拘束条件および連続条件を単に“**変位の適合条件**、(compatibility condition of displacement)”という。また、式(3)のことを“**弾性方程式**、ともいう。

不静定力 X_i の作用点 i における X_i 方向の一般変位 d_i が 0 でなければならないという変位の適合条件を式(3)に適用すると、

$$d_{i0} + \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot X_j = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

式(4)が不静定力 X_i の作用点 i における変位の適合条件式である。

全体系解析法

一般に n 次不静定構造物を解析しようとするとき、終始全体系を対象として取扱い、そこに含まれる n 個の不静定力 X_j の作用点における変位の適合条件式(4)を直接組み立て、これを X_j に関する n 元連立方程式として解 X_j ($j=1,2,\dots,n$) を求める方法を “**全体系解析法**” ということができる。

いま、式(4)の中で、不静定力 X_j を含まない第 1 項 d_{i0} を右辺に移項すると、次のような不静定力 X_j に関する n 元連立方程式が成立する。

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} X_j = -d_{i0} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad \dots\dots(5)$$

この方程式の右辺にある定数項 d_{i0} は、荷重状態によって決まるので “**荷重項**” といわれる。一方、係数 d_{ij} は、単位不静定力 $X_j=1$ が静定基本系に作用したときの不静定力 X_i の作用点での X_i 方向の変位である。したがって、“**マックスウェルの相反作用の定理**” により次の関係式が成立つことは明白である。

$$d_{ij} = d_{ji} \quad \dots\dots(6)$$

方程式(5)を行列表示すれば、

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad \dots\dots(7)$$

ここに、

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1j} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2j} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{i1} & d_{i2} & \dots & d_{ij} & \dots & d_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nj} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(8)$$

マトリックス \mathbf{F} は n 次元対称行列で全体系の不静定力に関する “**たわみ性マトリックス**” (**redundant force flexibility matrix in global system**) という。

$$\mathbf{x} = \{X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_j \quad \dots \quad X_n\} \quad (\text{不静定力ベクトル}) \quad \dots\dots(9)$$

$$\mathbf{f} = -\{d_{10} \quad d_{20} \quad \dots \quad d_{i0} \quad \dots \quad d_{n0}\} \quad (\text{荷重項ベクトル}) \quad \dots\dots(10)$$

すると、方程式(5)および(7)の解は、直ちに次式により与えられる。

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{f} \quad \dots\dots(11)$$

全体系解析法においては、方程式(5)の係数 d_{ij} と荷重項 d_{i0} 、換言すれば、たわみ性マトリックス \mathbf{F} の各要素 d_{ij} と荷重項ベクトル \mathbf{f} の成分 d_{i0} をどう算定するかということが重要である。

●変形公式を利用する方法

不静定ばりのような比較的簡単な不静定構造物の場合には、静定基本系は単純ばり・片持ばりあるいは張出ばりであって、既に「はりのたわみ」において、それらに各種の荷重が作用する場合についての変位の解が得られている。それで、これらの静定基本系に所定の荷重が作用したとき、並びに単位不静定力 $X_j = 1$ が作用したときの不静定力 X_i の作用点での X_i 方向の変位である d_{i0} および d_{ij} の値を求めるには、「表-各種はりのたわみとたわみ角」に掲げられた静定ばりの変形の諸公式を利用するとよい。

【例1】1次不静定ばり（一端固定・他端単純支持ばり）

【解法①】（たわみ角の公式）を利用する場合）

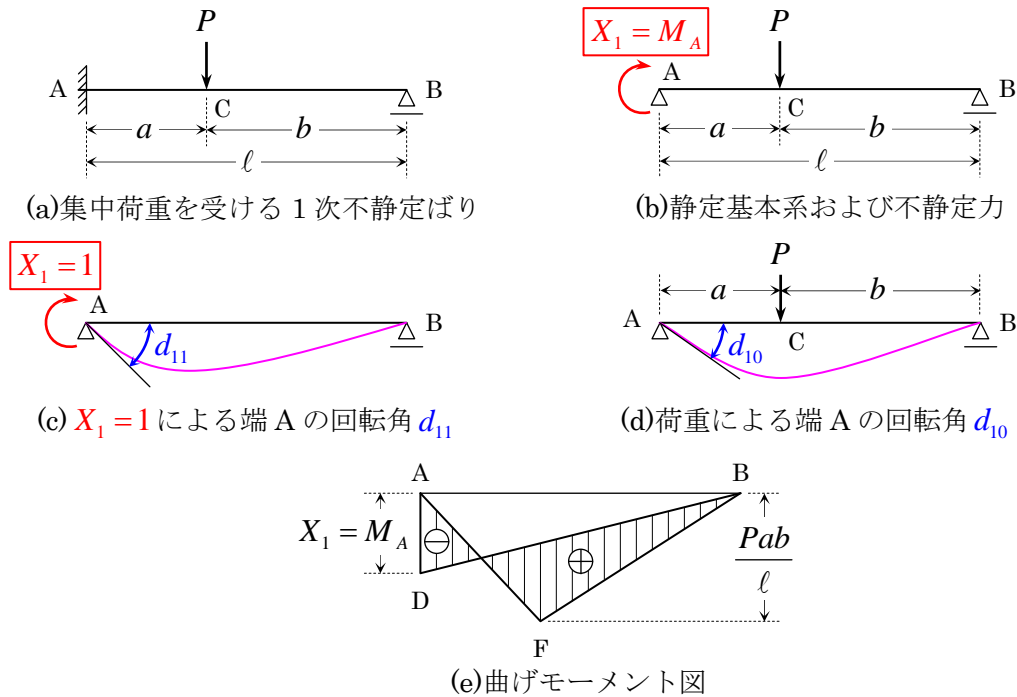


図-4 一端固定・他端単純支持ばり

図-4(a)に示す1次不静定ばりに集中荷重 P が作用する場合について、下記の表に示すたわみ角の公式を利用して解く。（下記の表は、「表-各種はりのたわみとたわみ角」からの抜粋である。）

荷重状態	特定点のたわみ角	特定点のたわみ
	$\theta_A = \frac{l}{6EI}(2M_A + M_B)$ $\theta_B = \frac{-l}{6EI}(M_A + 2M_B)$	$y_{x=\frac{l}{2}} = \frac{l^2}{16EI}(M_A + M_B)$
	$\theta_A = \frac{Pl^2}{6EI}\left(\frac{b}{l} - \frac{b^3}{l^3}\right)$ $\theta_B = -\frac{Pl^2}{6EI}\left(\frac{a}{l} - \frac{a^3}{l^3}\right)$	$y_C = \frac{Pa^2b^2}{3EI}$

図-4(b)に示すように、支点 A の固定端モーメント X_1 を不静定力にとり、単純ばり AB を静定基本系に選ぶ。そこで、図-4(c)に示すように、単位不静定力 $X_1 = 1$ を作用させると、そのときの端 A におけるはりのたわみ角が d_{11} である。この d_{11} の値は、上記の表上段（表-8.1(a)-7）に示した θ_A の公式において、 $M_A = 1, M_B = 0$ とおくことにより次の通り得られる。

$$\theta_A = \frac{l}{6EI}(2M_A + M_B) = \frac{l}{3EI} \quad \therefore d_{11} = \frac{l}{3EI} \quad \dots\dots(a)$$

次に同じ静定基本系すなわち単純ばり AB の所定の位置 C に集中荷重 P を図-4(d)に示すように作用させたときの端 A のたわみ角が d_{10} であって、上記の表下段 (表-8.1(a)-1) の θ_A として次の通り与えられる。

$$\theta_A = \frac{P\ell^2}{6EI} \left(\frac{b}{\ell} - \frac{b^3}{\ell^3} \right) \quad \therefore d_{10} = \frac{P\ell^2}{6EI} \left(\frac{b}{\ell} - \frac{b^3}{\ell^3} \right) \quad \dots\dots(b)$$

ここで、弾性方程式(5)において $n=1$ とおくと、 $X_1 = -\frac{d_{10}}{d_{11}}$ (c)

そこで、式(a),(b)を方程式(c)に代入すると、不静定力 X_1 が次式のように与えられる。

$$X_1 = -\frac{d_{10}}{d_{11}} = -\frac{P\ell^2}{6EI} \left(\frac{b}{\ell} - \frac{b^3}{\ell^3} \right) \cdot \frac{3EI}{\ell} = -\frac{P\ell}{2} \left(\frac{b}{\ell} - \frac{b^3}{\ell^3} \right) \quad \therefore X_1 = M_A = -\frac{P\ell}{2} \left(\frac{b}{\ell} - \frac{b^3}{\ell^3} \right)$$

さらに不静定力 X_1 を重ね合せの公式(2)に用いると、各種の力学量が得られる。

支点反力については、 $R_{A1} = -1/\ell$ 、 $R_{B1} = 1/\ell$ であるから、

$$R_A = R_{A0} + R_{A1} \cdot X_1 = \frac{Pb}{\ell} - \frac{1}{\ell} \left[-\frac{P\ell}{2} \left(\frac{b}{\ell} - \frac{b^3}{\ell^3} \right) \right] = \frac{Pb}{2\ell} \left(3 - \frac{b^2}{\ell^2} \right)$$

$$R_B = R_{B0} + R_{B1} \cdot X_1 = \frac{Pa}{\ell} + \frac{1}{\ell} \left[-\frac{P\ell}{2} \left(\frac{b}{\ell} - \frac{b^3}{\ell^3} \right) \right] = \frac{Pa}{\ell} \left(1 - \frac{b}{2} \cdot \frac{\ell + b}{\ell^2} \right)$$

また、曲げモーメント図は、図-4(e)に示すように、静定基本系における不静定力 X_1 による曲げモーメント ADB と集中荷重 P による曲げモーメント AFB の重ね合せとして描かれる。

【解法②】(たわみの公式)を利用する場合)

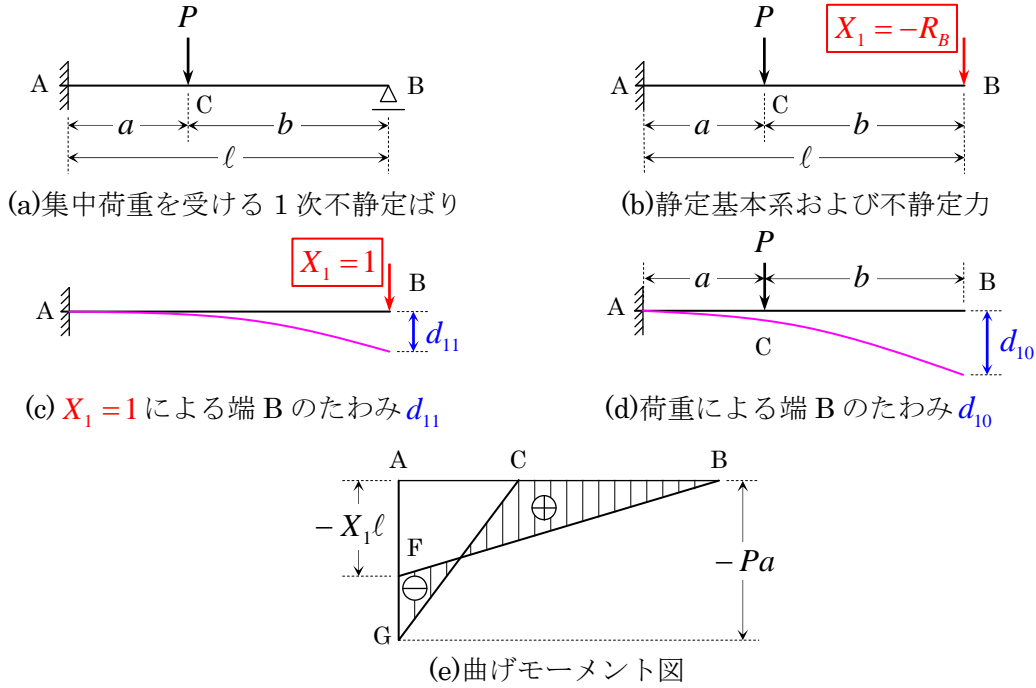


図-4' 一端固定・他端単純支持ばり

図-4'(a)に示す解法①と同様な 1 次不静定ばりについて、下記の表に示すたわみの公式を利用して解く。(下記の表は、「表-各種はりのたわみとたわみ角」からの抜粋である。)

荷重状態	たわみ曲線	特定点のたわみ
	$y = \frac{Pl^3}{6EI} \left(3\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right)$	$y_{\max} = y_B = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$
	$y_l = \frac{Pa^3}{6EI} \left(3\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} \right) \quad 0 \leq x \leq a$ $y_r = \frac{Pa^3}{6EI} \left(3\frac{x}{a} - 1 \right) \quad a \leq x \leq l$	$y_{\max} = y_B = \frac{Pa^3}{6EI} \left(3\frac{l}{a} - 1 \right)$

図-4'(b)に示すように、支点 B の支点反力 $X_1 = -R_B$ を不静定力にとり、片持ばり AB を静定基本系に選ぶ。そこで、図-4'(c)に示すように、単位不静定力 $X_1 = 1$ を作用させると、そのときの端 B におけるはりのたわみが d_{11} である。この d_{11} の値は、上記の表上段 (表-8.1(b)-2) に示した y_{\max} の公式より、

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI} \quad \therefore d_{11} = \frac{l^3}{3EI} \quad \dots\dots(a')$$

次に同じ静定基本系すなわち片持ばり AB の所定の位置 C に集中荷重 P を図-4'(d)に示すように作用させたときの端 B のたわみが d_{10} であって、上記の表下段 (表-8.1(b)-3) の y_{\max} の公式より、

$$y_{\max} = \frac{Pa^3}{6EI} \left(3\frac{l}{a} - 1 \right) \quad \therefore d_{10} = \frac{Pa^3}{6EI} \left(3\frac{l}{a} - 1 \right) \quad \dots\dots(b')$$

ここで、弾性方程式(5)において $n = 1$ とおくと、 $X_1 = -\frac{d_{10}}{d_{11}} \quad \dots\dots(c')$

そこで、式(a)',(b)'を方程式(c)'に代入すると、不静定力 X_1 が次式のように与えられる。

$$X_1 = -\frac{d_{10}}{d_{11}} = -\frac{Pa^3}{6EI} \left(3\frac{\ell}{a} - 1 \right) \cdot \frac{3EI}{\ell^3} = -\frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{\ell^3} \cdot \left(3\frac{\ell}{a} - 1 \right) \quad \therefore X_1 = -R_B = -\frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{\ell^3} \cdot \left(3\frac{\ell}{a} - 1 \right)$$

さらに不静定力 X_1 を重ね合せの公式(2)に用いると、各種の力学量が得られる。

支点反力については、 $R_{A0} = P, R_{A1} = 1$ であるから、

$$R_A = R_{A0} + R_{A1} \cdot X_1 = P + \left[-\frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{\ell^3} \cdot \left(3\frac{\ell}{a} - 1 \right) \right] = \frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{\ell^3} \cdot \left(2\frac{\ell^3}{a^3} - 3\frac{\ell}{a} + 1 \right)$$

また、点 A での曲げモーメント M_A については、 $M_{A0} = -Pa, M_{A1} = -\ell$ であるから、

$$M_A = M_{A0} + M_{A1} \cdot X_1 = -Pa - \ell \cdot \left[-\frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{\ell^3} \cdot \left(3\frac{\ell}{a} - 1 \right) \right] = -\frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{\ell^2} \cdot \left(2\frac{\ell^2}{a^2} - 3\frac{\ell}{a} + 1 \right)$$

さらに、曲げモーメント図は、図-4'(e)に示すように、静定基本系における不静定力 X_1 による曲げモーメント AFB と集中荷重 P による曲げモーメント AGC の重ね合せとして描かれる。

静定基本系が違う解法①と解法②では、支点反力などが異なっているように見えるが、 $b = \ell - a$ の関係を用いて「単純ばり」の場合を変形すると、次のように一致する。

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{Pb}{2\ell} \left(3 - \frac{b^2}{\ell^2} \right) = \frac{P(\ell - a)}{2\ell} \left[3 - \frac{(\ell - a)^2}{\ell^2} \right] = \frac{P(\ell - a)}{2\ell} \cdot \frac{3\ell^2 - \ell^2 + 2\ell a - a^2}{\ell^2} \\ &= \frac{P(\ell - a)}{2\ell} \cdot \frac{2\ell^2 + 2\ell a - a^2}{\ell^2} = \frac{P}{2\ell^3} (2\ell^3 + 2\ell^2 a - \ell a^2 - 2\ell^2 a - 2\ell a^2 + a^3) \\ &= \frac{P}{2\ell^3} (2\ell^3 - 3\ell a^2 + a^3) = \frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{\ell^3} \left(2\frac{\ell^3}{a^3} - 3\frac{\ell}{a} + 1 \right) \\ R_B &= \frac{Pa}{\ell} \left(1 - \frac{b}{2} \cdot \frac{\ell + b}{\ell^2} \right) = \frac{Pa}{\ell} \left(1 - \frac{\ell - a}{2} \cdot \frac{\ell + \ell - a}{\ell^2} \right) = \frac{Pa}{\ell} \left(1 - \frac{\ell - a}{2} \cdot \frac{2\ell - a}{\ell^2} \right) \\ &= \frac{Pa}{\ell} \left(1 - \frac{\ell^2 - 3\ell a + a^2}{2\ell^2} \right) = \frac{Pa}{\ell} \left(1 - 1 + \frac{3a}{2\ell} - \frac{a^2}{2\ell^2} \right) = \frac{Pa}{2\ell} \left(3\frac{a}{\ell} - \frac{a^2}{\ell^2} \right) = \frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{\ell^3} \left(3\frac{\ell}{a} - 1 \right) \\ M_A &= -\frac{P\ell}{2} \left(\frac{b}{\ell} - \frac{b^3}{\ell^3} \right) = -\frac{P}{2\ell^2} (b\ell^2 - b^3) = -\frac{P}{2\ell^2} [(\ell - a)\ell^2 - (\ell - a)^3] \\ &= -\frac{P}{2\ell^2} (\ell^3 - \ell^2 a - \ell^3 + 3\ell^2 a - 3\ell a^2 + a^3) = -\frac{P}{2\ell^2} (2\ell^2 a - 3\ell a^2 + a^3) \\ &= -\frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{\ell^2} \left(2\frac{\ell^2}{a^2} - 3\frac{\ell}{a} + 1 \right) \end{aligned}$$

【例 2】2 次不静定ばり（両端固定ばり）

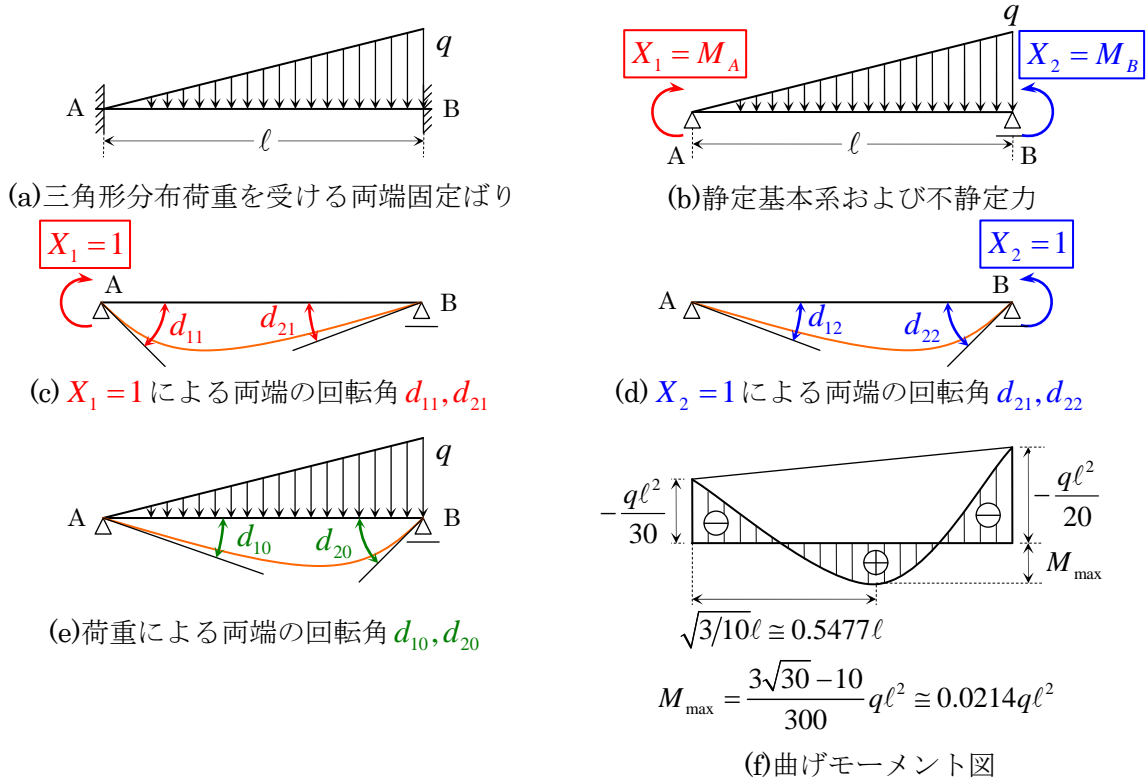


図-5 両端固定ばり

図-5(a)に示すように三角形分布荷重を受ける固定ばり AB について、静定基本系として図-5(b)に示す単純ばりを選ぶ。このとき、不静定力は支点 A および B における支点曲げモーメントであって、 $X_1 = M_A, X_2 = M_B$ となっている。(下記の表は、「表-各種はりのたわみとたわみ角」からの抜粋である。)

荷重状態	たわみ曲線	特定点のたわみ角
	$y = \frac{l^2}{6EI} \left[M_A \left(2 \frac{x}{l} - 3 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) + M_B \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) \right]$	$\theta_A = \frac{l}{6EI} (2M_A + M_B)$ $\theta_B = \frac{-l}{6EI} (M_A + 2M_B)$
	$y = \frac{q l^4}{360EI} \left(7 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^3}{l^3} + 3 \frac{x^5}{l^5} \right)$	$\theta_A = \frac{7}{360} \cdot \frac{q l^3}{EI}$ $\theta_B = -\frac{8}{360} \cdot \frac{q l^3}{EI}$

まず、 X_1, X_2 が同時に作用するときの端 A, B の回転角は、上記の表上段（表-8.1(a)-7）により与えられ、それらの符号に注意すると次式のようなになる。

$$\theta_A = \frac{l}{6EI} (2M_A + M_B), \quad \theta_B = \frac{-l}{6EI} (M_A + 2M_B)$$

$$\therefore d_{11} X_1 + d_{12} X_2 = \frac{l}{6EI} (2X_1 + X_2) \quad \dots\dots(a_1)$$

$$d_{21} X_1 + d_{22} X_2 = \frac{l}{6EI} (X_1 + 2X_2) \quad \dots\dots(a_2)$$

式(a)₁から $X_1 = 1 (X_2 = 0)$ による端 A, B における図-5(c)に示す方向の回転角 d_{11} および d_{21} は、

$$d_{11} = \frac{l}{3EI}, \quad d_{21} = \frac{l}{6EI} \quad \dots\dots(b)$$

同様に、式(a)₂から $X_2 = 1 (X_1 = 0)$ による端 A, B の回転角 d_{12} , d_{22} は、次のようになる。

$$d_{12} = \frac{\ell}{6EI}, \quad d_{22} = \frac{\ell}{3EI} \quad \dots\dots(c)$$

次に、図-5(e)に示すように、三角形分布荷重による静定基本系の端 A の X_1 方向回転角 d_{10} , 端 B の X_2 方向回転角 d_{20} は、上記の表下段 (表-8.1(a)-5) より、

$$\theta_A = \frac{7q\ell^3}{360EI}, \quad \theta_B = -\frac{8q\ell^3}{360EI} \quad \therefore d_{10} = \frac{7q\ell^3}{360EI}, \quad d_{20} = \frac{8q\ell^3}{360EI} \quad \dots\dots(d)$$

式(b), (c), (d)を変位の適合条件式(5)に代入すれば、不静定力 X_1 および X_2 に関する次の方程式を得る。

$$\frac{\ell}{3EI} X_1 + \frac{\ell}{6EI} X_2 = -\frac{7q\ell^3}{360EI} \quad \therefore \frac{1}{3} X_1 + \frac{1}{6} X_2 = -\frac{7q\ell^2}{360} \quad \dots\dots(e)_1$$

$$\frac{\ell}{6EI} X_1 + \frac{\ell}{3EI} X_2 = -\frac{8q\ell^3}{360EI} \quad \therefore \frac{1}{6} X_1 + \frac{1}{3} X_2 = -\frac{8q\ell^2}{360} \quad \dots\dots(e)_2$$

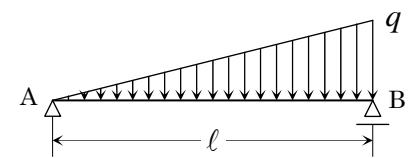
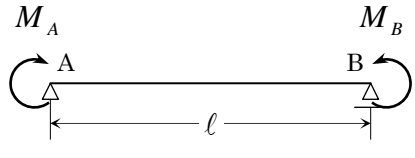
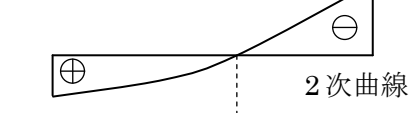
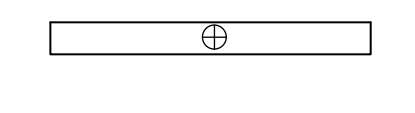
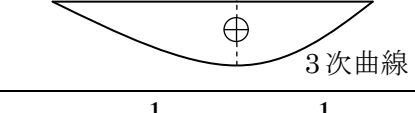
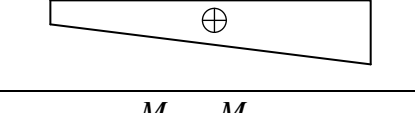
連立方程式(e)₁, (e)₂を解くと、

$$(e)_1 \times 2 - (e)_2 \text{ より、} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) X_1 = \frac{1}{2} X_1 = -\frac{7q\ell^3}{180} + \frac{4q\ell^3}{180} = -\frac{q\ell^3}{60} \quad \therefore X_1 = M_A = -\frac{q\ell^2}{30}$$

$$(e)_1 - (e)_2 \times 2 \text{ より、} \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right) X_2 = -\frac{1}{2} X_2 = -\frac{7q\ell^3}{360} + \frac{16q\ell^3}{360} = \frac{9q\ell^3}{360} = \frac{q\ell^3}{40} \quad \therefore X_2 = M_B = -\frac{q\ell^2}{20}$$

したがって、静定基本系に荷重のみが作用したときの力学量 (添字 0 を付した値) と $X_1 = 1$ あるいは $X_2 = 1$ が作用したときの力学量 (添字 1 あるいは 2 を付した値) を加算すれば、元の両端固定ばりの力学量を得る。具体的には、一般公式(2)により次のように与えられる。すなわち、反力・断面力については、「表-各種静定ばりの反力と断面力」より直接 Y_0, Y_1, Y_2 に相当する力学量を読み取ると、

(下記の表は、「表-各種静定ばりの反力と断面力」からの抜粋である。)

荷重状態		
Q-図		
M-図		
支点反力	$R_A = \frac{1}{6}q\ell, \quad R_B = \frac{1}{3}q\ell$	$R_A = \frac{M_B - M_A}{\ell} = -R_B$
せん断力	$Q = \frac{1}{6}q\ell \cdot \left(1 - 3\frac{x^2}{\ell^2}\right)$	$Q = R_A = \frac{M_B - M_A}{\ell}$
曲げモーメント	$M = \frac{1}{6}q\ell^2 \cdot \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^3}\right)$	$M = M_A \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_B \frac{x}{\ell}$
曲げモーメント 最大値	$M_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{27}q\ell^2$	$M_A \geq M_B : M_{\max} = M_A$ $M_A < M_B : M_{\max} = M_B$
その発生位置	$x_0 = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$	$M_A \geq M_B : x_0 = 0$ (支点 A)

(i) 反力

$$R_A = R_{A0} + R_{A1}X_1 + R_{A2}X_2 = \frac{q\ell}{6} - \frac{1}{\ell} \times \left(-\frac{q\ell^2}{30} \right) + \frac{1}{\ell} \times \left(-\frac{q\ell^2}{20} \right) = \frac{10+2-3}{60} q\ell = \frac{9}{60} q\ell = \frac{3}{20} q\ell$$

$$R_B = R_{B0} + R_{B1}X_1 + R_{B2}X_2 = \frac{q\ell}{3} + \frac{1}{\ell} \times \left(-\frac{q\ell^2}{30} \right) - \frac{1}{\ell} \times \left(-\frac{q\ell^2}{20} \right) = \frac{20-2+3}{60} q\ell = \frac{21}{60} q\ell = \frac{7}{20} q\ell$$

(ii) セン断力

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 + Q_1X_1 + Q_2X_2 = \frac{q\ell}{6} \left(1 - 3\frac{x^2}{\ell^2} \right) + \frac{1}{\ell} \left(-\frac{q\ell^2}{20} + \frac{q\ell^2}{30} \right) = \frac{q\ell}{60} \cdot \left(10 - 30\frac{x^2}{\ell^2} - 3 + 2 \right) \\ &= \frac{q\ell}{60} \cdot \left(9 - 30\frac{x^2}{\ell^2} \right) = \frac{q\ell}{20} \cdot \left(3 - 10\frac{x^2}{\ell^2} \right) \end{aligned}$$

せん断力が0になる点で曲げモーメントは最大になる。すなわち $x = \sqrt{\frac{3}{10}}\ell \cong 0.5477\ell$ のときである。

(iii) 曲げモーメント

$$\begin{aligned} M &= M_0 + M_1X_1 + M_2X_2 = \frac{q\ell^2}{6} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^3} \right) - \frac{q\ell^2}{30} \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) - \frac{q\ell^2}{20} \cdot \frac{x}{\ell} \\ &= \frac{q\ell^2}{60} \cdot \left[-2 + (10+2-3)\frac{x}{\ell} - 10\frac{x^3}{\ell^3} \right] = \frac{q\ell^2}{60} \cdot \left(-2 + 9\frac{x}{\ell} - 10\frac{x^3}{\ell^3} \right) \end{aligned}$$

ここで、点 $x = \sqrt{\frac{3}{10}}\ell \cong 0.5477\ell$ のとき、曲げモーメントは最大になり、その値 M_{\max} は、

$$\begin{aligned} M_{\max} &= \frac{q\ell^2}{60} \cdot \left[-2 + 9\sqrt{\frac{3}{10}} - 10 \left(\sqrt{\frac{3}{10}} \right)^3 \right] = \frac{q\ell^2}{60} \cdot \left(-2 + \frac{9\sqrt{30}}{10} - 10 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{\sqrt{30}}{10} \right) \\ &= \frac{q\ell^2}{60} \cdot \frac{-20 + 9\sqrt{30} - 3\sqrt{30}}{10} = \frac{q\ell^2}{60} \cdot \frac{6\sqrt{30} - 20}{10} = \frac{3\sqrt{30} - 10}{300} q\ell^2 \cong 0.0214q\ell^2 \end{aligned}$$

(iv) たわみ：任意点 x におけるたわみ y は、上記の表（表-各種はりのたわみとたわみ角）からの抜粋、表-8.1(a)-5,7) の公式を利用し、加算して次式を得る。

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y_1X_1 + y_2X_2 \\ &= \frac{q\ell^4}{360EI} \left(7\frac{x}{\ell} - 10\frac{x^3}{\ell^3} + 3\frac{x^5}{\ell^5} \right) - \frac{q\ell^2}{30} \cdot \frac{\ell^2}{6EI} \left(2\frac{x}{\ell} - 3\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^3}{\ell^3} \right) - \frac{q\ell^2}{20} \cdot \frac{\ell^2}{6EI} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^3} \right) \\ &= \frac{q\ell^4}{360EI} \left(7\frac{x}{\ell} - 10\frac{x^3}{\ell^3} + 3\frac{x^5}{\ell^5} - 4\frac{x}{\ell} + 6\frac{x^2}{\ell^2} - 2\frac{x^3}{\ell^3} - 3\frac{x}{\ell} + 3\frac{x^3}{\ell^3} \right) = \frac{q\ell^4}{360EI} \left(6\frac{x^2}{\ell^2} - 9\frac{x^3}{\ell^3} + 3\frac{x^5}{\ell^5} \right) \\ &= \frac{q\ell^4}{120EI} \cdot \frac{x^2}{\ell^2} \left(2 - 3\frac{x}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^3} \right) \end{aligned}$$

ここで、最大たわみ y_{\max} とそれが生じる点について考えてみる。

最大たわみは、たわみ角が0、すなわち $y' = 0$ の点で生じるから、たわみの式を微分して、

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{q\ell^3}{120EI} \left(4\frac{x}{\ell} - 9\frac{x^2}{\ell^2} + 5\frac{x^4}{\ell^4} \right) = \frac{q\ell^3}{120EI} \cdot \frac{x}{\ell} \cdot \left(5\frac{x^3}{\ell^3} - 9\frac{x}{\ell} + 4 \right) = 0$$

$$\therefore \frac{x}{\ell} \cdot \left(\frac{x}{\ell} - 1 \right) \cdot \left[5 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 + 5 \left(\frac{x}{\ell} \right) - 4 \right] = 0 \quad \therefore \frac{x}{\ell} = 0, 1, \frac{-5 \pm \sqrt{105}}{10}$$

ここで、 $0 < \frac{x}{l} < 1$ であるから、 $\frac{x}{l} = \frac{\sqrt{105}-5}{10}$ となり、 $x = \frac{\sqrt{105}-5}{10}l \cong 0.5247l$ で、たわみは最大になる。

また、その最大たわみ y_{\max} は、定数項をまとめて $Y_{\max} = \frac{120EI}{ql^4} y_{\max}$ と表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} Y_{\max} &= \frac{120EI}{ql^4} y_{\max} = \left(\frac{\sqrt{105}-5}{10} \right)^2 \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{105}-5}{10} \right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{105}-5}{10} \right) + 2 \right] \\ &= \frac{130-10\sqrt{105}}{100} \cdot \left[\frac{130-10\sqrt{105}}{100} \cdot \frac{\sqrt{105}-5}{10} - \frac{3\sqrt{105}-15-20}{10} \right] \\ &= \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \left[\frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{\sqrt{105}-5}{10} - \frac{3\sqrt{105}-35}{10} \right] \\ &= \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \left[\frac{13\sqrt{105}-65-105+5\sqrt{105}}{100} - \frac{3\sqrt{105}-35}{10} \right] \\ &= \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{18\sqrt{105}-170-30\sqrt{105}+350}{100} \\ &= \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{180-12\sqrt{105}}{100} = \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{90-6\sqrt{105}}{50} \\ &= \frac{1170-78\sqrt{105}-90\sqrt{105}+630}{500} = \frac{1800-168\sqrt{105}}{500} = \frac{450-42\sqrt{105}}{125} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{ql^4}{120EI} \cdot \frac{450-42\sqrt{105}}{125} = \frac{ql^4}{20EI} \cdot \frac{75-7\sqrt{105}}{125} = \frac{75-7\sqrt{105}}{2500} \cdot \frac{ql^4}{EI} \\ &= 0.001308537 \dots \cdot \frac{ql^4}{EI} \cong 0.00131 \cdot \frac{ql^4}{EI} \\ &= \frac{1}{125(75+7\sqrt{105})} \cdot \frac{ql^4}{EI} = \frac{1}{764.2117467 \dots} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cong \frac{1}{764} \cdot \frac{ql^4}{EI} \end{aligned}$$

以上をまとめると、点 $x = \frac{\sqrt{105}-5}{10}l \cong 0.5247l$ のとき、最大たわみ $y_{\max} \cong \frac{ql^4}{764EI}$ を生じる。

【たわみに関する別解】

4階の微分方程式で表されるはりのたわみと荷重強度の関係式 $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{\ell} x$ を用いる。

これを逐次積分すると次のようになる。

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{\ell} x$$

$$EI y''' = \frac{q}{\ell} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EI y'' = \frac{q}{\ell} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

$$EI y' = \frac{q}{\ell} \cdot \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI y = \frac{q}{\ell} \cdot \frac{x^5}{120} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

これに、境界条件 $x=0$ で $y' = y = 0$ を用いると、 $C_3 = C_4 = 0$ である。

次に、境界条件 $x=l$ で $y' = y = 0$ を用いると、

$$EI y' = \frac{q}{\ell} \cdot \frac{\ell^4}{24} + C_1 \frac{\ell^2}{2} + C_2 \ell = 0 \quad \therefore C_1 \ell + 2C_2 = -\frac{q\ell^2}{12} \quad \dots\dots\dots ①$$

$$EI y = \frac{q}{\ell} \cdot \frac{\ell^5}{120} + C_1 \frac{\ell^3}{6} + C_2 \frac{\ell^2}{2} = 0 \quad \therefore C_1 \ell + 3C_2 = -\frac{q\ell^2}{20} \quad \dots\dots\dots ②$$

$$② - ① \text{より、} C_2 = -\frac{q\ell^2}{20} + \frac{q\ell^2}{12} = \frac{-3+5}{60} q\ell^2 = \frac{2}{60} q\ell^2 = \frac{q\ell^2}{30}$$

$$\text{これを①に代入すると、} C_1 \ell + \frac{q\ell^2}{15} = -\frac{q\ell^2}{12} \quad \therefore C_1 = -\frac{q\ell}{12} - \frac{q\ell}{15} = \frac{-5-4}{60} q\ell = -\frac{9}{60} q\ell = -\frac{3}{20} q\ell$$

したがって、

$$EI y''' = \frac{q}{\ell} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{3q\ell}{20} = \frac{q\ell}{20} \left(10 \frac{x^2}{\ell^2} - 3 \right)$$

$$EI y'' = \frac{q}{\ell} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{3q\ell}{20} x + \frac{q\ell^2}{30} = \frac{q\ell^2}{60} \left(10 \frac{x^3}{\ell^3} - 9 \frac{x}{\ell} + 2 \right)$$

$$EI y' = \frac{q}{\ell} \cdot \frac{x^4}{24} - \frac{3q\ell}{40} x^2 + \frac{q\ell^2}{30} x = \frac{q\ell^3}{120} \left(5 \frac{x^4}{\ell^4} - 9 \frac{x^2}{\ell^2} + 4 \frac{x}{\ell} \right) = \frac{q\ell^3}{120} \cdot \frac{x}{\ell} \cdot \left(5 \frac{x^3}{\ell^3} - 9 \frac{x}{\ell} + 4 \right)$$

$$EI y = \frac{q}{\ell} \cdot \frac{x^5}{120} - \frac{q\ell}{40} x^3 + \frac{q\ell^2}{60} x^2 = \frac{q\ell^4}{120} \left(\frac{x^5}{\ell^5} - 3 \frac{x^3}{\ell^3} + 2 \frac{x^2}{\ell^2} \right) = \frac{q\ell^4}{120} \cdot \frac{x^2}{\ell^2} \cdot \left(\frac{x^3}{\ell^3} - 3 \frac{x}{\ell} + 2 \right)$$

最大のたわみは、たわみ角 $y' = 0$ のときに発生するから、

$$EI y' = \frac{q\ell^3}{120} \cdot \frac{x}{\ell} \cdot \left(5 \frac{x^3}{\ell^3} - 9 \frac{x}{\ell} + 4 \right) = 0$$

$$\therefore \frac{x}{\ell} \cdot \left(\frac{x}{\ell} - 1 \right) \cdot \left[5 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 + 5 \left(\frac{x}{\ell} \right) - 4 \right] = 0 \quad \therefore \frac{x}{\ell} = 0, 1, \frac{-5 \pm \sqrt{105}}{10}$$

ここで、 $0 < \frac{x}{\ell} < 1$ であるから、 $\frac{x}{\ell} = \frac{\sqrt{105} - 5}{10}$ となり、 $x = \frac{\sqrt{105} - 5}{10} \ell \cong 0.5247\ell$ で、たわみは最大になる。

また、その最大たわみ y_{\max} は、定数項をまとめて $Y_{\max} = \frac{120EI}{ql^4} y_{\max}$ と表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 Y_{\max} &= \frac{120EI}{ql^4} y_{\max} = \left(\frac{\sqrt{105}-5}{10} \right)^2 \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{105}-5}{10} \right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{105}-5}{10} \right) + 2 \right] \\
 &= \frac{130-10\sqrt{105}}{100} \cdot \left[\frac{130-10\sqrt{105}}{100} \cdot \frac{\sqrt{105}-5}{10} - \frac{3\sqrt{105}-15-20}{10} \right] \\
 &= \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \left[\frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{\sqrt{105}-5}{10} - \frac{3\sqrt{105}-35}{10} \right] \\
 &= \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \left[\frac{13\sqrt{105}-65-105+5\sqrt{105}}{100} - \frac{3\sqrt{105}-35}{10} \right] \\
 &= \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{18\sqrt{105}-170-30\sqrt{105}+350}{100} \\
 &= \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{180-12\sqrt{105}}{100} = \frac{13-\sqrt{105}}{10} \cdot \frac{90-6\sqrt{105}}{50} \\
 &= \frac{1170-78\sqrt{105}-90\sqrt{105}+630}{500} = \frac{1800-168\sqrt{105}}{500} = \frac{450-42\sqrt{105}}{125}
 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
 y_{\max} &= \frac{ql^4}{120EI} \cdot \frac{450-42\sqrt{105}}{125} = \frac{ql^4}{20EI} \cdot \frac{75-7\sqrt{105}}{125} = \frac{75-7\sqrt{105}}{2500} \cdot \frac{ql^4}{EI} \\
 &= 0.001308537 \dots \cdot \frac{ql^4}{EI} \cong 0.00131 \cdot \frac{ql^4}{EI} \\
 &= \frac{1}{125(75+7\sqrt{105})} \cdot \frac{ql^4}{EI} = \frac{1}{764.2117467 \dots} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cong \frac{1}{764} \cdot \frac{ql^4}{EI}
 \end{aligned}$$

以上をまとめると、点 $x = \frac{\sqrt{105}-5}{10} l \cong 0.5247l$ のとき、最大たわみ $y_{\max} \cong \frac{ql^4}{764EI}$ を生じる。

●単位荷重法

トラス・ラーメン・アーチ・格子桁・斜張橋のような、複雑な不静定構造物を応力法で解析しようとする場合には、「静定ばりの変形の公式」を利用することは不可能である。それで、これらすべての構造形式に共通な解析手法として「単位荷重法」を応用することができる。すなわち、不静定力 X_i に関する弾性方程式(5)の係数 d_{ij} および荷重項 d_{i0} は、共に静定基本系の特定点 i における一般変位であるから、その値を「単位荷重法」によって統一的に算定することができる。

ここでは、例題を中心として「単位荷重法」の応用方法を示す。なお、例題としては、「変形公式を利用する方法」で挙げたものと2次不静定トラスを取り上げる。

【例1】1次不静定ばり（一端固定・他端単純支持ばり）

【解法①】（たわみ角の公式）を利用する場合に対応して）

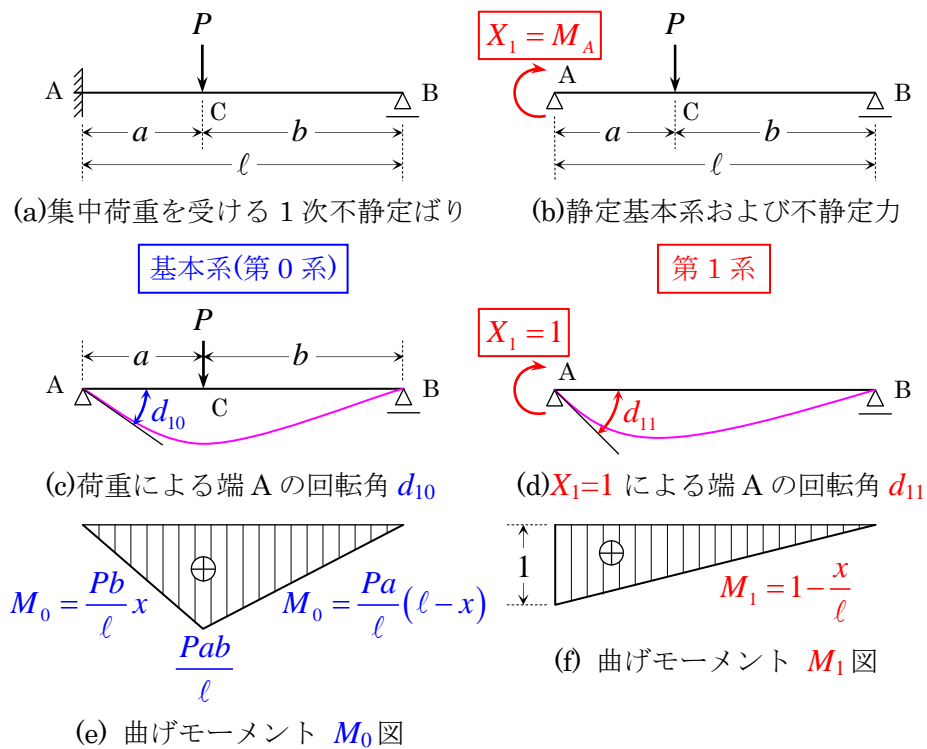


図-6 一端固定・他端単純支持ばり

図-6(a)に示す1次不静定ばりに集中荷重 P が作用する場合について、図-6(b)に示すように、単純ばり AB を静定基本系に選び、支点 A の固定端モーメント X_1 を不静定力にとる。

そこで、静定基本系すなわち単純ばり AB の所定の位置 C に集中荷重 P を図-6(c)に示すように作用させたとき（これを基本系または第0系と呼ぶ）の端 A のたわみ角が d_{10} であり、そのときの曲げモーメント M_0 は、図-6(e)に示すようになる。

一方、図-6(d)に示すように、静定基本系に単位不静定力 $X_1=1$ を作用させる（これを第1系と呼ぶ）と、そのときの端 A におけるはりのたわみ角が d_{11} であり、そのときの曲げモーメント M_1 は、図-6(f)に示すようになる。

ここで、変位の適合条件を考えると、元の1次不静定ばりでは固定端 A のたわみ角が 0 となるはずであるから、 $d_{11}X_1 + d_{10} = 0$ と表される。

したがって、 d_{11} と荷重項 d_{10} が求められれば、不静定力 X_1 を求めることができる。

そこで、せん断力の影響を無視して「単位荷重法」を利用すれば、 d_{11} と荷重項 d_{10} は、曲げモーメント M_0 と M_1 を用いて次のように計算できる。

$$d_{11} = \int_0^{\ell} \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{\ell}{3} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^3 \right]_0^{\ell} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{\ell}{3} = \frac{\ell}{3EI}$$

$$\begin{aligned}
 d_{10} &= \int_0^\ell \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \frac{Pb}{\ell} x dx + \int_a^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \frac{Pa}{\ell} (\ell - x) dx \right] \\
 &= \frac{Pb}{EI} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \frac{x}{\ell} dx + \frac{Pa}{EI} \int_a^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{Pb}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\ell} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{\ell^2} \right]_0^a + \frac{Pa}{EI} \left[-\frac{\ell}{3} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^3 \right]_a^\ell \\
 &= \frac{Pb}{EI} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{\ell} - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{\ell^2} \right) + \frac{Pa}{EI} \cdot \frac{\ell}{3} \left(1 - \frac{a}{\ell}\right)^3 = \frac{Pa^2 b}{6EI\ell} \cdot \left(3 - 2\frac{a}{\ell}\right) + \frac{Pa}{EI} \cdot \frac{\ell}{3} \cdot \frac{(\ell - a)^3}{\ell^3} \\
 &= \frac{Pa^2 b}{6EI\ell} \cdot \left(3 - 2\frac{a}{\ell}\right) + \frac{Pab^3}{3EI\ell^2} = \frac{Pab}{6EI\ell^2} \cdot (3\ell a - 2a^2 + 2b^2) \\
 &= \frac{P}{6EI} \cdot \frac{(\ell - b)b}{\ell^2} \cdot \{ 3\ell(\ell - b) - 2(\ell - b)^2 + 2b^2 \} \\
 &= \frac{P}{6EI} \cdot \frac{b(\ell - b)}{\ell^2} \cdot (3\ell^2 - 3\ell b - 2\ell^2 + 4\ell b - 2b^2 + 2b^2) = \frac{P}{6EI} \cdot \frac{b(\ell - b)}{\ell^2} \cdot (\ell^2 + \ell b) \\
 &= \frac{P}{6EI} \cdot \frac{b(\ell - b)}{\ell^2} \cdot \ell(\ell + b) = \frac{P}{6EI} \cdot \frac{b}{\ell} \cdot (\ell^2 - b^2) = \frac{P}{6EI} \cdot \left(b\ell - \frac{b^3}{\ell} \right) = \frac{P\ell^2}{6EI} \cdot \left(\frac{b}{\ell} - \frac{b^3}{\ell^3} \right)
 \end{aligned}$$

これらを、変位の適合条件に代入すると、次のようになり、「変形公式を利用する方法」と同じ答えを得ることができる。

$$X_1 = -\frac{d_{10}}{d_{11}} = -\frac{\frac{P\ell^2}{6EI} \cdot \left(\frac{b}{\ell} - \frac{b^3}{\ell^3} \right)}{\frac{\ell}{3EI}} = -\frac{P\ell}{2} \cdot \left(\frac{b}{\ell} - \frac{b^3}{\ell^3} \right)$$

【解法②】 たわみの公式 を利用する場合に対応して

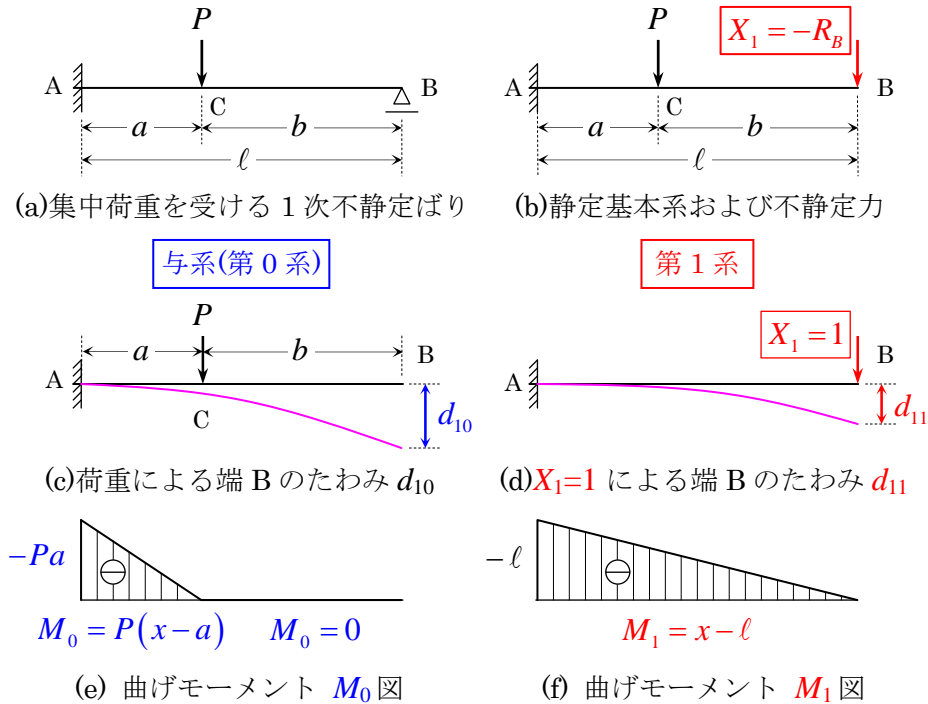


図-6' 一端固定・他端単純支持ばり

図-6'(a)に示す 1 次不静定ばりに集中荷重 P が作用する場合について、図-6'(b)に示すように、片持ばり AB を静定基本系に選び、支点 B の支点反力 $X_1 = -R_B$ を不静定力にとる。

そこで、静定基本系すなわち片持ばり AB の所定の位置 C に集中荷重 P を図-6'(c)に示すように作用させたとき（これを**基本系**または**第0系**と呼ぶ）の端 B のたわみが d_{10} であり、そのときの曲げモーメント M_0 は、図-6'(e)に示すようになる。

一方、図-6'(d)に示すように、静定基本系に単位不静定力 $X_1=1$ を作用させる（これを**第1系**と呼ぶ）と、そのときの端 B におけるはりのたわみが d_{11} であり、そのときの曲げモーメント M_1 は、図-6'(f)に示すようになる。

ここで、変位の適合条件を考えると、元の 1 次不静定ばりでは支点 B のたわみが 0 となるはずであるから、 $d_{11}X_1 + d_{10} = 0$ と表される。

したがって、 d_{11} と荷重項 d_{10} が求められれば、不静定力 X_1 を求めることができる。

そこで、せん断力の影響を無視して「単位荷重法」を利用すれば、 d_{11} と荷重項 d_{10} は、曲げモーメント M_0 と M_1 を用いて次のように計算できる。

$$d_{11} = \int_0^{\ell} \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell} (x-\ell)^2 dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{(x-\ell)^3}{3} \right]_0^{\ell} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{\ell^3}{3} = \frac{\ell^3}{3EI}$$

$$d_{10} = \int_0^{\ell} \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^a (x-\ell) \cdot P(x-a) dx = \frac{P}{EI} \int_0^a \{ x^2 - (\ell+a)x + la \} dx$$

$$= \frac{P}{EI} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\ell+a}{2} x^2 + lax \right]_0^a = \frac{P}{EI} \cdot \left(\frac{a^3}{3} - \frac{\ell+a}{2} a^2 + la^2 \right) = \frac{P}{6EI} \cdot (2a^3 - 3la^2 - 3a^3 + 6la^2)$$

$$= \frac{P}{6EI} \cdot (3la^2 - a^3) = \frac{Pa^3}{6EI} \cdot \left(3\frac{\ell}{a} - 1 \right)$$

これらを、変位の適合条件に代入すると、次のようになり、「変形公式を利用する方法」と同じ答えを得ることができる。

$$X_1 = -\frac{d_{10}}{d_{11}} = -\frac{\frac{Pa^3}{6EI} \cdot \left(3\frac{\ell}{a} - 1 \right)}{\frac{\ell^3}{3EI}} = -\frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{\ell^3} \cdot \left(3\frac{\ell}{a} - 1 \right)$$

【例 2】2 次不静定ばり（両端固定ばり）

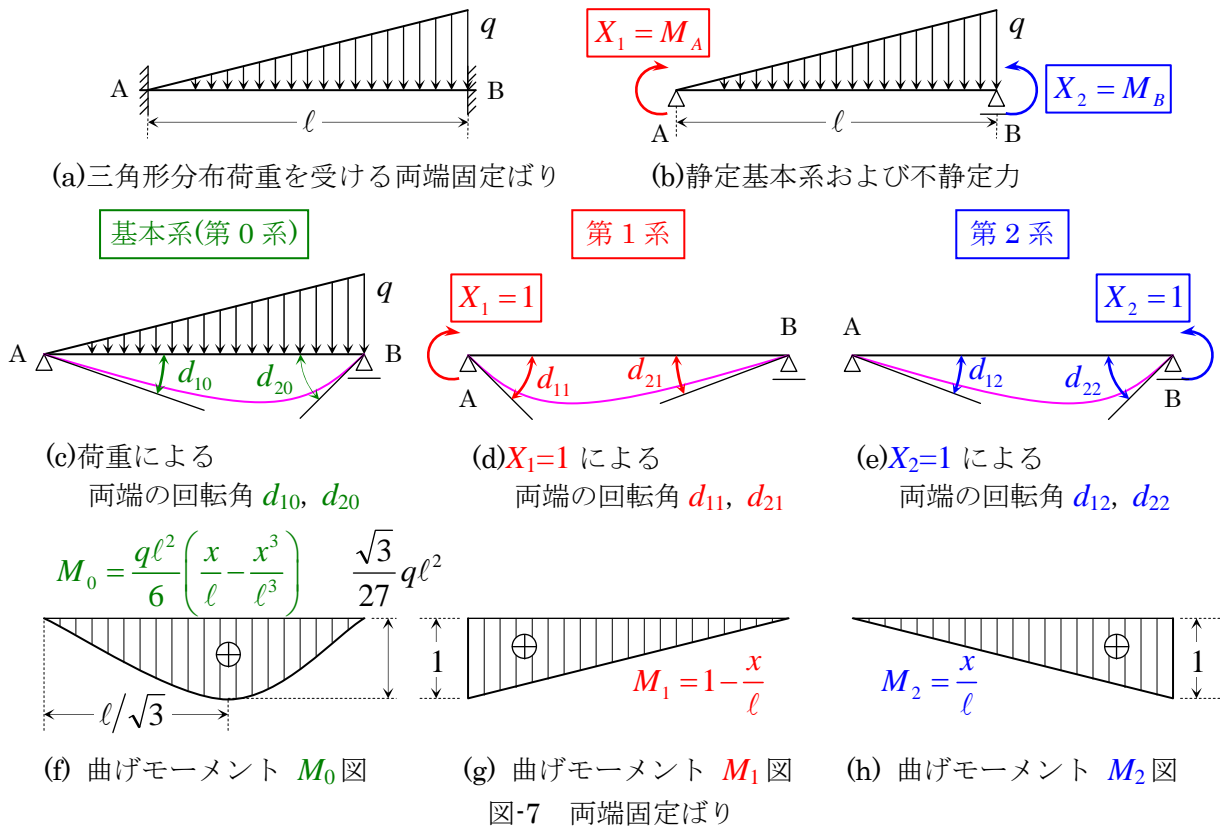


図-7(a)に示すように三角形分布荷重を受ける両端固定ばり AB について、静定基本系として図-7(b)に示す単純ばりを選ぶ。このとき、不静定力は支点 A および B における固定モーメントであって、 $X_1 = M_A$, $X_2 = M_B$ となっている。

そこで、静定基本系すなわち単純ばり AB に三角形分布荷重を図-7(c)に示すように作用させたとき(これを基本系または第 0 系と呼ぶ)の端 A, B の回転角(たわみ角)が d_{10} , d_{20} であり、そのときの曲げモーメント M_0 は、図-7(f)に示すようになる。

一方、図-7(d)に示すように、静定基本系に単位不静定力 $X_1=1$ を作用させる(これを第 1 系と呼ぶ)と、そのときの端 A, B の回転角(たわみ角)が d_{11} , d_{21} であり、そのときの曲げモーメント M_1 は、図-7(g)に示すようになる。

また、図-7(e)に示すように、静定基本系に単位不静定力 $X_2=1$ を作用させる(これを第 2 系と呼ぶ)と、そのときの端 A, B の回転角(たわみ角)が d_{12} , d_{22} であり、そのときの曲げモーメント M_2 は、図-7(h)に示すようになる。

ここで、変位の適合条件を考えると、元の 2 次不静定ばり(両端固定ばり)では固定端 A, B の回転角(たわみ角)が 0 となるはずであるから、 $d_{11}X_1 + d_{12}X_2 + d_{10} = 0$ かつ $d_{21}X_1 + d_{22}X_2 + d_{20} = 0$ と表される。

したがって、 d_{11} , d_{21} と d_{12} , d_{22} および荷重項 d_{10} , d_{20} が求められれば、連立方程式から不静定力 X_1 , X_2 を求めることができる。

そこで、せん断力の影響を無視して「単位荷重法」を利用すれば、 d_{11} , d_{21} と d_{12} , d_{22} および荷重項 d_{10} , d_{20} は、曲げモーメント M_0 , M_1 , M_2 を用いて次のように計算できる。

$$d_{11} = \int_0^{\ell} \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[-\frac{\ell}{3} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^3 \right]_0^{\ell} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{\ell}{3} = \frac{\ell}{3EI}$$

$$d_{21} = \int_0^{\ell} \frac{M_2 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell} \left(\frac{x}{\ell}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{x^2}{2\ell} - \frac{x^3}{3\ell^2} \right]_0^{\ell} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3} \right) = \frac{\ell}{6EI}$$

$$d_{12} = \int_0^\ell \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right) dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{x^2}{2\ell} - \frac{x^3}{3\ell^2} \right]_0^\ell = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3} \right) = \frac{\ell}{6EI}$$

$$d_{22} = \int_0^\ell \frac{M_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{x^3}{3\ell^2} \right]_0^\ell = \frac{1}{EI} \cdot \frac{\ell^3}{3\ell^2} = \frac{\ell}{3EI}$$

$$\begin{aligned} d_{10} &= \int_0^\ell \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \frac{q\ell^2}{6} \cdot \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^3}\right) dx = \frac{q\ell^2}{6EI} \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^3}\right) dx \\ &= \frac{q\ell^2}{6EI} \int_0^\ell \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^3} - \frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x^4}{\ell^4}\right) dx = \frac{q\ell^2}{6EI} \cdot \left[\frac{x^2}{2\ell} - \frac{x^4}{4\ell^3} - \frac{x^3}{3\ell^2} + \frac{x^5}{5\ell^4} \right]_0^\ell \\ &= \frac{q\ell^3}{6EI} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{q\ell^3}{6EI} \cdot \frac{30 - 15 - 20 + 12}{60} = \frac{7}{60} \cdot \frac{q\ell^3}{6EI} = \frac{7q\ell^3}{360EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{20} &= \int_0^\ell \frac{M_2 M_0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^\ell \left(\frac{x}{\ell}\right) \cdot \frac{q\ell^2}{6} \cdot \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^3}\right) dx = \frac{q\ell^2}{6EI} \int_0^\ell \left(\frac{x}{\ell}\right) \cdot \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^3}\right) dx \\ &= \frac{q\ell^2}{6EI} \int_0^\ell \left(\frac{x^2}{\ell^2} - \frac{x^4}{\ell^4}\right) dx = \frac{q\ell^2}{6EI} \cdot \left[\frac{x^3}{3\ell^2} - \frac{x^5}{5\ell^4} \right]_0^\ell \\ &= \frac{q\ell^3}{6EI} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{q\ell^3}{6EI} \cdot \frac{5 - 3}{15} = \frac{2}{15} \cdot \frac{q\ell^3}{6EI} = \frac{q\ell^3}{45EI} = \frac{8q\ell^3}{360EI} \end{aligned}$$

これらを、変位の適合条件に代入すると、次のような連立方程式になり、これを解くと「変形公式を利用する方法」と同じ答えを得ることができる。

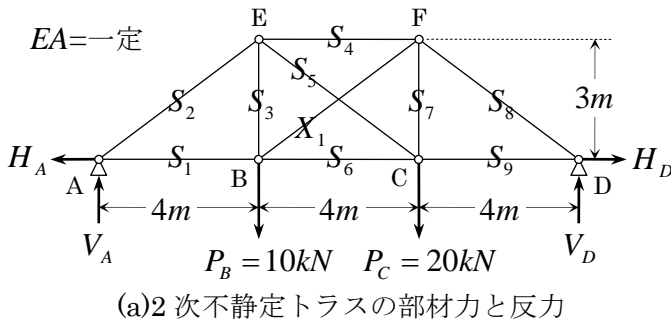
$$\frac{\ell}{3EI} X_1 + \frac{\ell}{6EI} X_2 + \frac{7q\ell^3}{360EI} = 0 \quad \therefore 120X_1 + 60X_2 + 7q\ell^2 = 0 \quad \dots\dots\dots ①$$

$$\frac{\ell}{6EI} X_1 + \frac{\ell}{3EI} X_2 + \frac{8q\ell^3}{360EI} = 0 \quad \therefore 60X_1 + 120X_2 + 8q\ell^2 = 0 \quad \dots\dots\dots ②$$

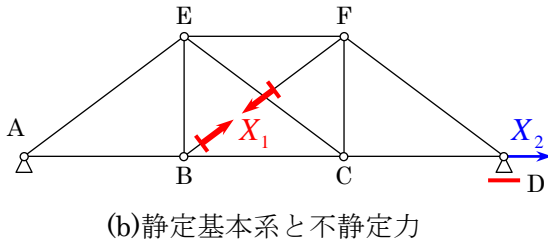
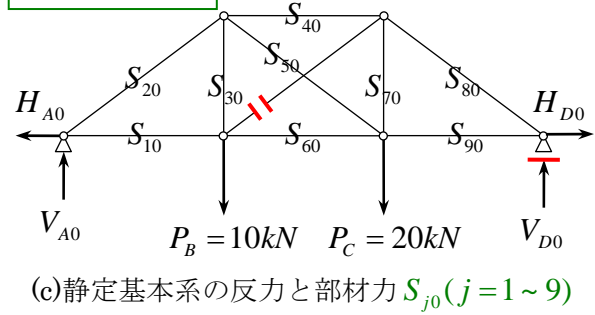
$$① \times 2 - ② \text{より、} 180X_1 + (14 - 8)q\ell^2 = 0 \quad \therefore X_1 = -\frac{6}{180}q\ell^2 = -\frac{1}{30}q\ell^2 = M_A$$

$$① - ② \times 2 \text{より、} -180X_2 + (7 - 16)q\ell^2 = 0 \quad \therefore X_2 = -\frac{9}{180}q\ell^2 = -\frac{1}{20}q\ell^2 = M_B$$

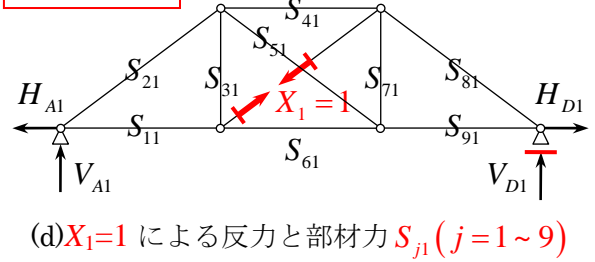
【例3】2次不静定トラス



基本系(第0系)



第1系



第2系

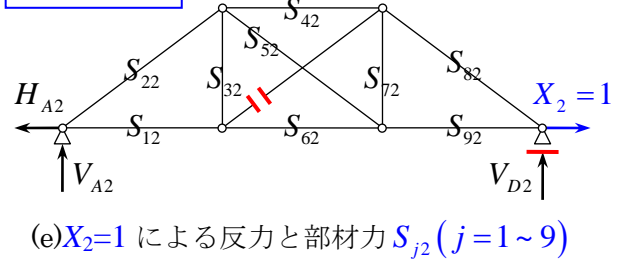


図-8 2次不静定トラス

図-8(a)に示す全体的2次不静定トラスの支点反力 H_A, V_A, H_D, V_D と部材力 $S_j (j=1 \sim 9)$, X_1 を“単位荷重法”を用いて求める。

2つの不静定力 X_1, X_2 としては、図-8(b)に示すように、それぞれ斜材BFの部材力および支点Dの水平反力を選ぶ。したがって、静定基本系は図-8(b)に示される単純トラスである。

そこで、静定基本系に与えられた荷重 $P_B=10kN, P_C=20kN$ が図-8(c)に示すように作用するとき（これを基本系または第0系と呼ぶ）の支点反力を $H_{A0}, V_{A0}, H_{D0}, V_{D0}$ 、部材力を $S_{j0} (j=1 \sim 9)$ とする。

一方、図-8(d)に示すように、静定基本系に単位不静定力（斜材BFの部材力） $X_1=1$ が作用するとき（これを第1系と呼ぶ）の支点反力を $H_{A1}, V_{A1}, H_{D1}, V_{D1}$ 、部材力を $S_{j1} (j=1 \sim 9)$ とする。

また、図-8(e)に示すように、静定基本系に単位不静定力（支点Dの水平反力） $X_2=1$ が作用するとき（これを第2系と呼ぶ）の支点反力を $H_{A2}, V_{A2}, H_{D2}, V_{D2}$ 、部材力を $S_{j2} (j=1 \sim 9)$ とする。

以上のように設定した第0系～第2系の支点反力と部材力を以下に示すようにして求める。

基本系について、支点反力と部材力を求める。

まず、支点反力は次のように求められる。

水平方向の力の釣合から、 $H_{A0} = H_{D0} = 0^*$

*支点 D は移動支点だから、水平方向の反力は存在しないので、 $H_{D0} = 0$ となるから

鉛直方向の力の釣合から、 $V_{A0} + V_{D0} = 30$

D 点回りのモーメントの釣合から、

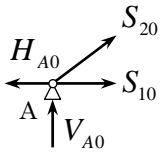
$$V_{A0} \cdot 12m = P_B \cdot 8m + P_C \cdot 4m$$

$$= 10 \cdot 8 + 20 \cdot 4 = 160kN \cdot m$$

$$\therefore V_{A0} = \frac{160}{12} = \frac{40}{3}kN, V_{D0} = 30 - V_{A0} = \frac{50}{3}kN$$

次に、「節点法」により、部材力は次のように求められる。

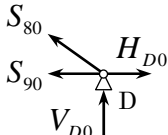
1)A 点について



(鉛直) $V_{A0} + \frac{3}{5}S_{20} = 0 \quad \therefore S_{20} = -\frac{5}{3}V_{A0} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{40}{3} = -\frac{200}{9}kN$

(水平) $H_{A0} = S_{10} + \frac{4}{5}S_{20} \quad \therefore S_{10} = H_{A0} - \frac{4}{5}S_{20} = 0 - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{200}{9}\right) = \frac{160}{9}kN$

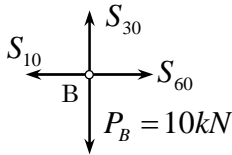
2)D 点について



(鉛直) $V_{D0} + \frac{3}{5}S_{80} = 0 \quad \therefore S_{80} = -\frac{5}{3}V_{D0} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{50}{3} = -\frac{250}{9}kN$

(水平) $H_{D0} = S_{90} + \frac{4}{5}S_{80} \quad \therefore S_{90} = H_{D0} - \frac{4}{5}S_{80} = 0 - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{250}{9}\right) = \frac{200}{9}kN$

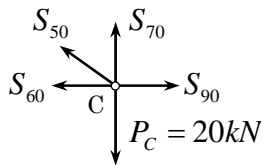
3)B 点について



(鉛直) $S_{30} = P_B = 10kN$

(水平) $S_{60} = S_{10} = \frac{160}{9}kN$

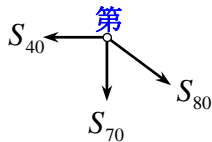
4)C 点について



(水平) $S_{60} + \frac{4}{5}S_{50} = S_{90} \quad \therefore S_{50} = \frac{5}{4}(S_{90} - S_{60}) = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{200}{9} - \frac{160}{9}\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{40}{9} = \frac{50}{9}kN$

(鉛直) $S_{70} + \frac{3}{5}S_{50} = P_C \quad \therefore S_{70} = P_C - \frac{3}{5}S_{50} = 20 - \frac{3}{5} \cdot \frac{50}{9} = 20 - \frac{10}{3} = \frac{50}{3}kN$

5)F 点について

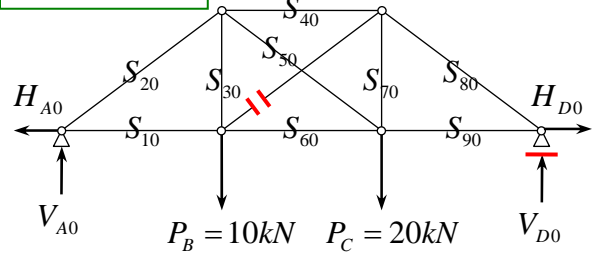


(水平) $S_{40} = \frac{4}{5}S_{80} = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{250}{9}\right) = -\frac{200}{9}kN$

(鉛直) $S_{70} + \frac{3}{5}S_{80} = \frac{50}{3} + \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{250}{9}\right) = \frac{50}{3} - \frac{50}{3} = 0$ **【check O.K.】**

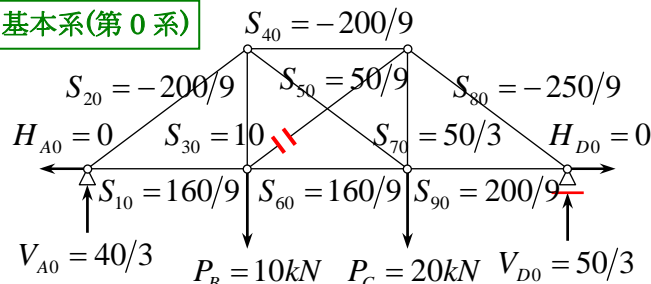
以上をまとめると、図(c)のようになる。

基本系(第0系)



(c) 静定基本系の反力と部材力 $S_{j0} (j=1 \sim 9)$

基本系(第0系)



(c) 静定基本系の反力と部材力 $S_{j0} (j=1 \sim 9)$

第1系について、支点反力と部材力を求める。

まず、支点反力は次のように求められる。

水平方向の力の釣合から、

$$H_{A1} + \frac{4}{5} = H_{D1} + \frac{4}{5} \quad \therefore H_{A1} = H_{D1} = 0^*$$

*支点Dは移動支点だから、水平方向の反力は存在しないので、 $H_{D0} = 0$ となるから

鉛直方向の力の釣合から、

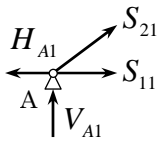
$$V_{A1} + V_{D1} + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \quad \therefore V_{A1} + V_{D1} = 0 \quad \therefore V_{D1} = -V_{A1}$$

B点回りのモーメントの釣合から、

$$V_{A1} \cdot 4m = V_{D1} \cdot 8m = -V_{A1} \cdot 8m \quad \therefore V_{A1} \cdot 12m = 0 \quad \therefore V_{A1} = V_{D1} = 0$$

次に、部材力は次のように求められる。

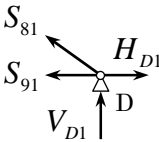
1)A点について



(鉛直) $V_{A1} + \frac{3}{5}S_{21} = 0 \quad \therefore S_{21} = -\frac{5}{3}V_{A1} = 0$

(水平) $H_{A1} = S_{11} + \frac{4}{5}S_{21} \quad \therefore S_{11} = H_{A1} - \frac{4}{5}S_{21} = 0$

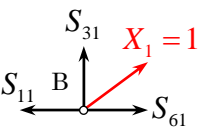
2)D点について



(鉛直) $V_{D1} + \frac{3}{5}S_{81} = 0 \quad \therefore S_{81} = -\frac{5}{3}V_{D1} = 0$

(水平) $H_{D1} = S_{91} + \frac{4}{5}S_{81} \quad \therefore S_{91} = H_{D1} - \frac{4}{5}S_{81} = 0 - 0 = 0$

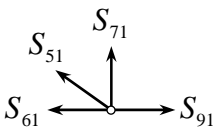
3)B点について



(鉛直) $S_{31} + \frac{3}{5}X_1 = 0 \quad \therefore S_{31} = -\frac{3}{5}X_1 = -\frac{3}{5}$

(水平) $S_{61} + \frac{4}{5}X_1 = S_{11} \quad \therefore S_{61} = S_{11} - \frac{4}{5}X_1 = 0 - \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}$

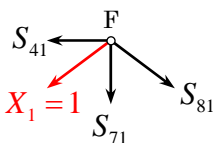
4)C点について



(水平) $S_{61} + \frac{4}{5}S_{51} = S_{91} \quad \therefore S_{51} = \frac{5}{4}(S_{91} - S_{61}) = \frac{5}{4} \cdot \left(0 + \frac{4}{5}\right) = 1$

(鉛直) $S_{71} + \frac{3}{5}S_{51} = 0 \quad \therefore S_{71} = -\frac{3}{5}S_{51} = -\frac{3}{5}$

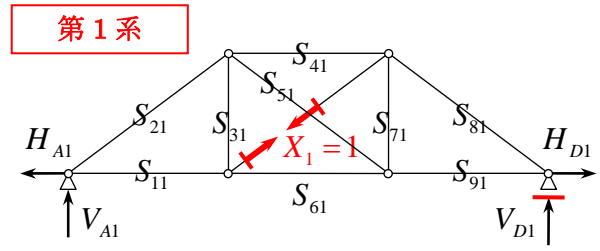
5)F点について



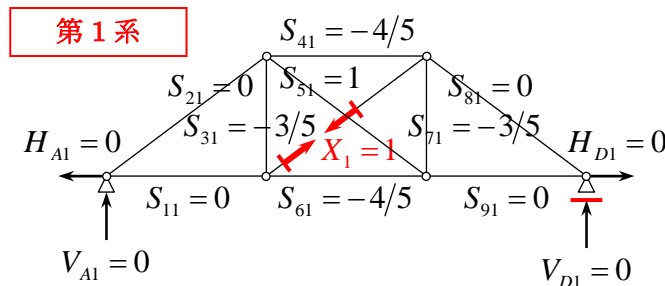
(水平) $S_{41} + \frac{4}{5}X_1 = \frac{4}{5}S_{81} \quad \therefore S_{41} + \frac{4}{5}X_1 = \frac{4}{5}(S_{81} - X_1) = \frac{4}{5}(0 - 1) = -\frac{4}{5}$

(鉛直) $S_{71} + \frac{3}{5}X_1 + \frac{3}{5}S_{81} = -\frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot (1 - 0) = 0$ 【check O.K.】

以上をまとめると、図(d)のようになる。



(d) $X_1=1$ による反力と部材力 $S_{j1} (j=1\sim 9)$



(d) $X_1=1$ による反力と部材力 $S_{j1} (j=1\sim 9)$

第2系について、支点反力と部材力を求める。

まず、支点反力は次のように求められる。

水平方向の力の釣合から、 $H_{A2} = X_2 = 1$

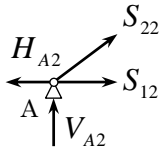
鉛直方向の力の釣合から、 $V_{A2} + V_{D2} = 0$

D点回りのモーメントの釣合から、

$$V_{A2} \cdot 12m = 0 \quad \therefore V_{A2} = 0, \quad V_{D2} = 0$$

次に、「節点法」により、部材力は次のように求められる。

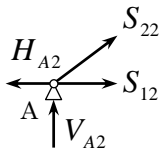
1) A点について



(鉛直) $V_{A2} + \frac{3}{5}S_{22} = 0 \quad \therefore S_{22} = -\frac{5}{3}V_{A2} = 0$

(水平) $H_{A2} = S_{12} + \frac{4}{5}S_{22} \quad \therefore S_{12} = H_{A2} - \frac{4}{5}S_{22} = 1 - 0 = 1$

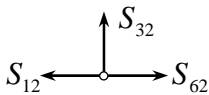
2) D点について



(鉛直) $V_{D2} + \frac{3}{5}S_{82} = 0 \quad \therefore S_{82} = -\frac{5}{3}V_{D2} = 0$

(水平) $X_2 = S_{92} + \frac{4}{5}S_{82} \quad \therefore S_{92} = X_2 - \frac{4}{5}S_{82} = 1 - 0 = 1$

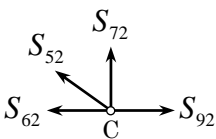
3) B点について



(鉛直) $S_{32} = 0$

(水平) $S_{62} = S_{12} = 1$

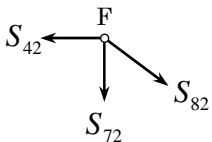
4) C点について



(水平) $S_{62} + \frac{4}{5}S_{52} = S_{92} \quad \therefore S_{52} = \frac{5}{4}(S_{92} - S_{62}) = \frac{5}{4} \cdot (1 - 1) = 0$

(鉛直) $S_{72} + \frac{3}{5}S_{52} = 0 \quad \therefore S_{72} = -\frac{3}{5}S_{52} = 0$

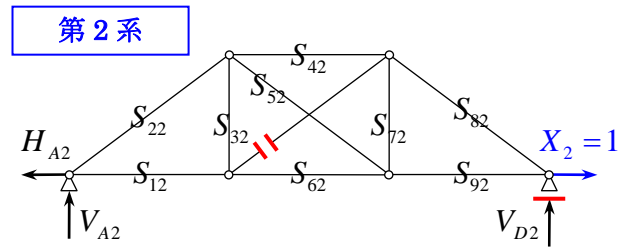
5) F点について



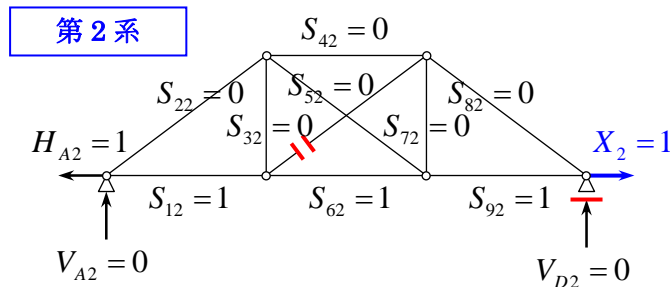
(水平) $S_{42} = \frac{4}{5}S_{82} = 0$

(鉛直) $S_{72} + \frac{3}{5}S_{82} = 0 + 0 = 0$ **【check O.K.】**

以上をまとめると、図(e)のようになる。



(e) $X_2=1$ による反力と部材力 $S_{j2} (j=1 \sim 9)$



(e) $X_2=1$ による反力と部材力 $S_{j2} (j=1 \sim 9)$

以上で得られた第0系～第2系の部材力を「表」にすると、以下ようになる。
 なお、下表に示す ρ は、部材長を引張剛性 EA で除したものを表す。

部材	ρ	S_{j0}	S_{j1}	S_{j2}	$S_j = S_{j0} + S_{j1} \times X_1 + S_{j2} \times X_2$					部材力			
					$\times \frac{1}{EA}$	$\times \frac{1}{9}$	$\times \frac{1}{5}$	$\times 1$	$\times \frac{1}{45EA}$	$\times \frac{1}{9EA}$	$\times \frac{1}{5EA}$	$\times \frac{1}{25EA}$	$\times \frac{1}{EA}$
S_1	4	160	0	1	0	640	0	0	4	$\frac{160}{9}$	0	$-\frac{3105}{154}$	$-\frac{3305}{1386} \cong -2.3846kN$
S_2	5	-200	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{200}{9}$	0	0	$-\frac{200}{9} \cong 22.2222kN$
S_3	3	90	-3	0	-810	0	0	27	0	10	$\frac{3}{5} \cdot \frac{18775}{5544} = \frac{3755}{1848}$	0	$\frac{22235}{1848} \cong 12.0319kN$
S_4	4	-200	-4	0	3200	0	0	64	0	$-\frac{200}{9}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{18775}{5544} = \frac{3755}{1386}$	0	$-\frac{3005}{154} \cong -19.5130kN$
S_5	5	50	5	0	1250	0	0	125	0	$\frac{50}{9}$	$-\frac{18775}{5544}$	0	$\frac{12025}{5544} \cong 2.1690kN$
S_6	4	160	-4	1	-2560	640	-16	64	4	$\frac{160}{9}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{18775}{5544} = \frac{3755}{1386}$	$-\frac{3105}{154}$	$\frac{25}{77} \cong 0.3247kN$
S_7	3	150	-3	0	-1350	0	0	27	0	$\frac{50}{3}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{18775}{5544} = \frac{3755}{1848}$	0	$\frac{34555}{1848} \cong 18.6986kN$
S_8	5	-250	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{250}{9}$	0	0	$-\frac{250}{9} \cong -27.7778kN$
S_9	4	200	0	1	0	800	0	0	4	$\frac{200}{9}$	0	$-\frac{3105}{154}$	$\frac{2855}{1386} \cong 2.0599kN$
X_1	5	0	5	0	0	0	0	125	0	0	$-\frac{18775}{5544}$	0	$-\frac{18775}{5544} \cong -3.3865kN$
Σ					-270	2080	-16	432	12				

上の表を集計すると、以下のようになる。

$$d_{11} = \sum_j \frac{S_{j1}^2}{EA} \cdot \ell_j = \frac{432}{25EA}, \quad d_{12} = \sum_j \frac{S_{j1}S_{j2}}{EA} \cdot \ell_j = \frac{-16}{5EA}, \quad d_{10} = \sum_j \frac{S_{j1}S_{j0}}{EA} \cdot \ell_j = \frac{-270}{45EA} = \frac{-6}{EA}$$

$$d_{21} = \sum_j \frac{S_{j2}S_{j1}}{EA} \cdot \ell_j = d_{12} = \frac{-16}{5EA}, \quad d_{22} = \sum_j \frac{S_{j2}^2}{EA} \cdot \ell_j = \frac{12}{EA}, \quad d_{20} = \sum_j \frac{S_{j2}S_{j0}}{EA} \cdot \ell_j = \frac{2080}{9EA}$$

ここで、変位の適合条件を考えると、元の2次不静定トラスにおいて、次の2条件で表される。

- ① 部材 BF の相対変位の連続条件から、 $d_{11}X_1 + d_{12}X_2 + d_{10} = 0$
- ② 支点 D の水平方向変位は拘束されて0となるはずであるから、 $d_{21}X_1 + d_{22}X_2 + d_{20} = 0$

これに、上記の d_{11} , d_{12} , d_{10} , d_{21} , d_{22} , d_{20} を代入すると、次の連立方程式が得られる。

$$\frac{432}{25EA}X_1 + \frac{-16}{5EA}X_2 + \frac{-270}{45EA} = 0 \quad \therefore 432X_1 - 80X_2 = 150 \quad \therefore 216X_1 - 40X_2 = 75 \quad \dots\dots\dots ①$$

$$\frac{-16}{5EA}X_1 + \frac{12}{EA}X_2 + \frac{2080}{9EA} = 0 \quad \therefore -144X_1 + 540X_2 = -10400 \quad \therefore -36X_1 + 135X_2 = -2600 \quad \dots\dots\dots ②$$

これを解くと、

①×27+②×8 より、

$$5832X_1 - 1080X_2 = 2025$$

$$+) -288X_1 + 1080X_2 = -20800$$

$$(5832 - 288) \cdot X_1 = 2025 - 20800$$

$$\therefore 5544X_1 = -18775 \quad \therefore X_1 = -\frac{18775}{5544} = -3.386544012 \dots \cong -3.3865kN$$

①+②×6 より、

$$216X_1 - 40X_2 = 75$$

$$+) -216X_1 + 810X_2 = -15600$$

$$(810 - 40) \cdot X_2 = 75 - 15600$$

$$\therefore 770X_2 = -15525 \qquad \therefore X_2 = -\frac{15525}{770} = -\frac{3105}{154} = -20.16233766\cdots \cong -20.1623kN$$

これらを用いて、支点反力を求めると、次のようになる。

$$H_A = H_{A0} + H_{A1}X_1 + H_{A2}X_2 = 0 + 0 + 1 \cdot X_2 = -\frac{3105}{154} \cong -20.1623kN$$

$$V_A = V_{A0} + V_{A1}X_1 + V_{A2}X_2 = \frac{40}{3} + 0 + 0 = \frac{40}{3} \cong 13.3333kN$$

$$H_D = H_{D0} + H_{D1}X_1 + H_{D2}X_2 = 0 + 0 + 1 \cdot X_2 = -\frac{3105}{154} \cong -20.1623kN$$

$$V_D = V_{D0} + V_{D1}X_1 + V_{D2}X_2 = \frac{50}{3} + 0 + 0 = \frac{50}{3} \cong 16.6667kN$$

さらに、各部材力は、上記の「表」の右側部分に示すようになる。

●3連モーメントの定理

別頁(図-9)に示すように連続ばりに各種の荷重が作用して、曲げモーメントが起り、支点が不等沈下しているものとする。このとき、連続ばりの隣接する3つの支点を $n-1, n, n+1$ とし、支点 n の左、右の支間をそれぞれ支間 n , 支間 $n+1$ と表すものとする。また、それぞれの支間 n , 支間 $n+1$ においては、支間長が l_n, l_{n+1} 、曲げ剛性が EI_n, EI_{n+1} であるとし、さらに、3つの支点 $n-1, n, n+1$ の支点沈下量をそれぞれ $\Delta_{n-1}, \Delta_n, \Delta_{n+1}$ とする。3連モーメントの定理では支点曲げモーメントを未知量にとり、支間 $n, n+1$ を切出した単純ばりを部分系と考え、それぞれのはりに正の曲げ変位が起るように、支点曲げモーメント M_{n-1}, M_n, M_{n+1} を仮定する。

支点 n の左右に起るたわみ角 θ_n^L, θ_n^R は、作用荷重(中間荷重)、支点曲げモーメント M_{n-1}, M_n, M_{n+1} によるたわみ角と部材回転角の和に等しいから、「たわみに関するモールの定理」(弾性荷重法)を用いて、次の力と変位の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \theta_n^L &= (-\theta_{0,n}^L) + (-\theta_{1,n}^L) + (-\theta_{2,n}^L) + \theta_{3,n}^L \\ &= -\frac{P_{0,n} \times a_{0,n}}{l_n} - \frac{P_{1,n} \times a_{1,n}}{l_n} - \frac{P_{2,n} \times a_{2,n}}{l_n} + \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{l_n} \\ &= -\frac{\tilde{P}_{0,n}}{EI_n} \cdot \frac{a_{0,n}}{l_n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M_n}{EI_n} l_n \times \frac{2}{3} l_n \times \frac{1}{l_n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{n-1}}{EI_n} l_n \times \frac{1}{3} l_n \times \frac{1}{l_n} + \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{l_n} \\ &= -\frac{l_n}{6EI_n} (2M_n + M_{n-1}) - \frac{\tilde{P}_{0,n}}{EI_n} \cdot \frac{a_{0,n}}{l_n} + \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{l_n} \\ \theta_n^R &= \theta_{0,n}^R + \theta_{1,n}^R + \theta_{2,n}^R + \theta_{3,n}^R \\ &= \frac{P_{0,n+1} \times b_{0,n+1}}{l_{n+1}} - \frac{P_{1,n+1} \times b_{1,n+1}}{l_{n+1}} - \frac{P_{2,n+1} \times b_{2,n+1}}{l_{n+1}} + \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{l_{n+1}} \\ &= \frac{\tilde{P}_{0,n+1}}{EI_{n+1}} \cdot \frac{b_{0,n+1}}{l_{n+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_n}{EI_{n+1}} l_{n+1} \times \frac{2}{3} l_{n+1} \times \frac{1}{l_{n+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{n+1}}{EI_{n+1}} l_{n+1} \times \frac{1}{3} l_{n+1} \times \frac{1}{l_{n+1}} + \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{l_{n+1}} \\ &= \frac{l_{n+1}}{6EI_{n+1}} (2M_n + M_{n+1}) + \frac{\tilde{P}_{0,n+1}}{EI_{n+1}} \cdot \frac{b_{0,n+1}}{l_{n+1}} + \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{l_{n+1}} \end{aligned}$$

ここで、図中に用いた変数 P, a, b と $P_{i,j}, a_{i,n}, b_{i,n+1}, \theta_{i,j}^L, \theta_{i,j}^R$ の添字 i, j について説明しておく。

まず、添字 i は、 $i=0,1,2,3$ の数値をとり、それぞれは支間 $n, n+1$ を切出した単純ばりに対して、

$i=0$: 実際の荷重が作用する場合

$i=1$: 支点 n に支点曲げモーメント M_n が作用する場合

$i=2$: 支間 n に対しては支点 $n-1$ に支点曲げモーメント M_{n-1} が、

支間 $n+1$ に対しては支点 $n+1$ に支点曲げモーメント M_{n+1} が作用する場合

$i=3$: 支点沈下による部材回転角を示す場合

を意味している。

次に、添字 j は、 $j=n, n+1$ であり、それぞれは支間 n と支間 $n+1$ の単純ばりを意味している。

また、塗りつぶし部分は、支間 n と支間 $n+1$ の単純ばりにおける載荷荷重による曲げモーメントを曲げ剛性で除した「弾性荷重」を意味しており、変数 P は、上記の添字 $i=0,1,2$ に対応した支間 $n, n+1$ での「弾性荷重」の総和を、変数 a, b は、その「弾性荷重」の重心位置を表している。

なお、添字 $i=1,2$ の場合には、「弾性荷重」の総和および重心位置を簡単に求めることができるが、添字 $i=0$ の場合は、実際の荷重状態によって様々であるので、「弾性荷重」によるものであることを明

記するため、曲げ剛性で除した $P_{0,n} = \frac{\tilde{P}_{0,n}}{EI_n}$, $P_{0,n+1} = \frac{\tilde{P}_{0,n+1}}{EI_{n+1}}$ の形で表した。

たわみ角 θ_n^L , θ_n^R は、変位の適合条件 $\theta_n^L = \theta_n^R$ を満足しなければならないから、

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\ell_n}{6EI_n}(2M_n + M_{n-1}) - \frac{\tilde{P}_{0,n}}{EI_n} \cdot \frac{a_{0,n}}{\ell_n} + \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{\ell_n} = \frac{\ell_{n+1}}{6EI_{n+1}}(2M_n + M_{n+1}) + \frac{\tilde{P}_{0,n+1}}{EI_{n+1}} \cdot \frac{b_{0,n+1}}{\ell_{n+1}} + \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{\ell_{n+1}} \\
 & \frac{\ell_n}{6EI_n}(2M_n + M_{n-1}) + \frac{\ell_{n+1}}{6EI_{n+1}}(2M_n + M_{n+1}) = -\frac{\tilde{P}_{0,n}}{EI_n} \cdot \frac{a_{0,n}}{\ell_n} - \frac{\tilde{P}_{0,n+1}}{EI_{n+1}} \cdot \frac{b_{0,n+1}}{\ell_{n+1}} + \left(\frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{\ell_n} - \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{\ell_{n+1}} \right) \\
 & \therefore \frac{\ell_n}{I_n} M_{n-1} + 2 \cdot \left(\frac{\ell_n}{I_n} + \frac{\ell_{n+1}}{I_{n+1}} \right) \cdot M_n + \frac{\ell_{n+1}}{I_{n+1}} M_{n+1} = -6 \cdot \left(\frac{A_{0,n}}{I_n} \cdot \frac{a_{0,n}}{\ell_n} + \frac{A_{0,n+1}}{I_{n+1}} \cdot \frac{b_{0,n+1}}{\ell_{n+1}} \right) + 6E \cdot (R_n - R_{n+1}) \\
 & \therefore \frac{\ell_n}{I_n} M_{n-1} + 2 \cdot \left(\frac{\ell_n}{I_n} + \frac{\ell_{n+1}}{I_{n+1}} \right) \cdot M_n + \frac{\ell_{n+1}}{I_{n+1}} M_{n+1} = -6 \cdot \left(\frac{\bar{A}_0}{I_n} + \frac{\bar{B}_0}{I_{n+1}} \right) + 6E \cdot (R_n - R_{n+1})
 \end{aligned}$$

ここに、 $R_n = \frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{\ell_n}$, $R_{n+1} = \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{\ell_{n+1}}$: 部材回転角

$\bar{A}_0 = \tilde{P}_{0,n} \cdot \frac{a_{0,n}}{\ell_n}$, $\bar{B}_0 = \tilde{P}_{0,n+1} \cdot \frac{b_{0,n+1}}{\ell_{n+1}}$: 荷重項 (別頁の表-13.1 を参照)

この上式が3連モーメントの定理(three moments theorem, theorem of three moments)である。

なお、「たわみに関するモーメントの定理」によって節点におけるたわみ角を求める際には、力(モーメント)の平衡条件を用いているので、3連モーメントの定理の中で構造解析3条件は満たされている。

また、 $I_n = I_{n+1} = I$ であるときは、上式は次のように表される。

$$\ell_n M_{n-1} + 2 \cdot (\ell_n + \ell_{n+1}) \cdot M_n + \ell_{n+1} M_{n+1} = -6 \cdot (\bar{A}_0 + \bar{B}_0) + 6EI \cdot (R_n - R_{n+1})$$

さらに、 $\ell_n = \ell_{n+1} = \ell$ であるときは、上式は次のように表される。

$$M_{n-1} + 4M_n + M_{n+1} = -\frac{6}{\ell} \cdot (\bar{A}_0 + \bar{B}_0) + 6EI \cdot (R_n - R_{n+1})$$

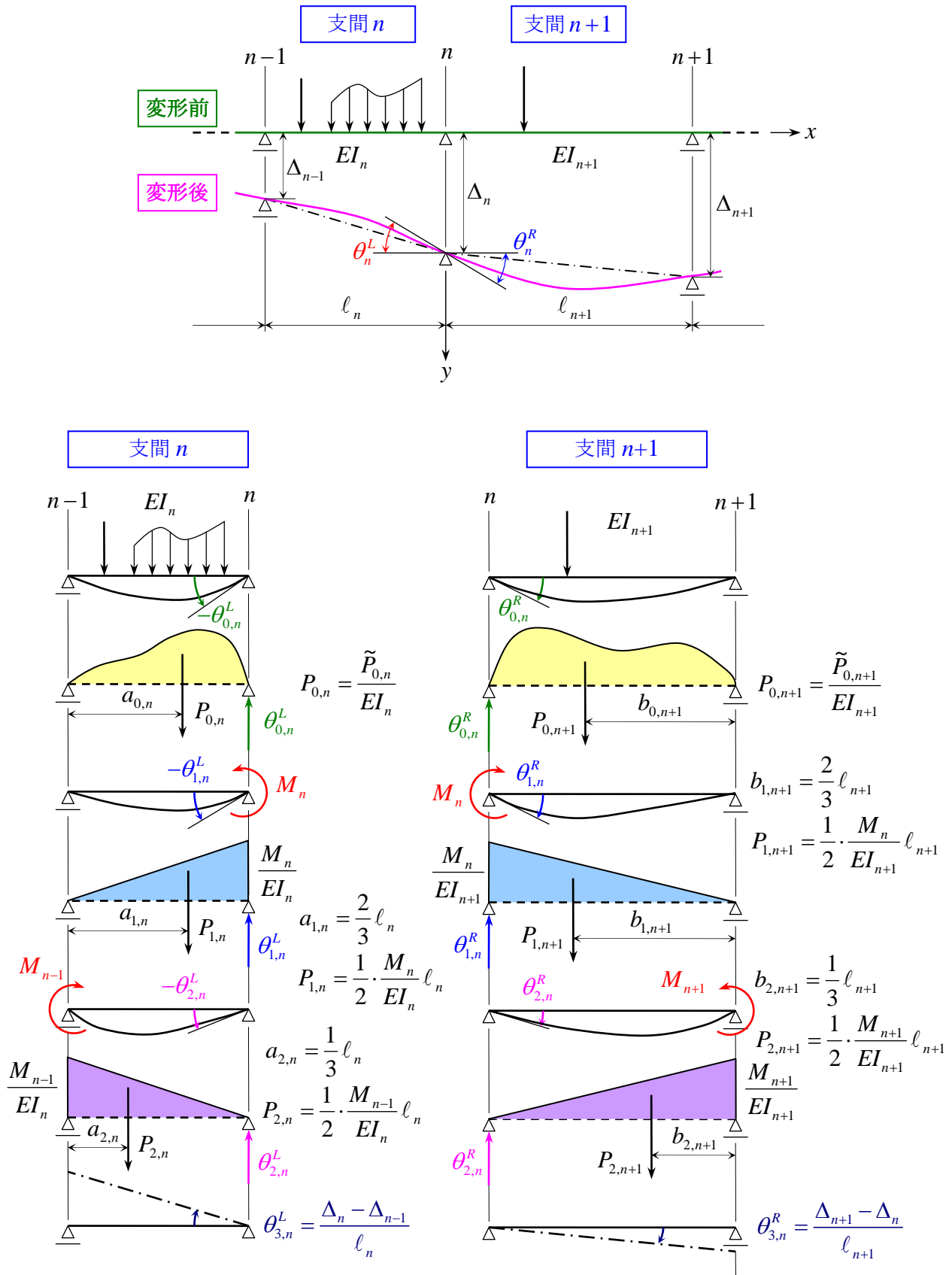
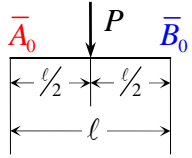
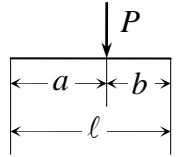
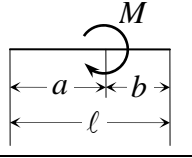
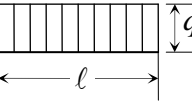
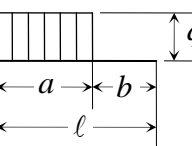
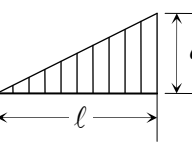
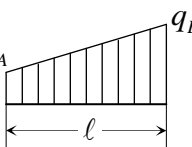
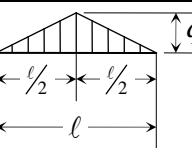
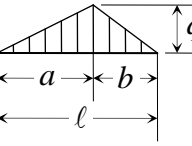
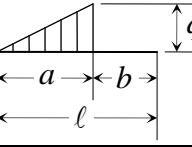
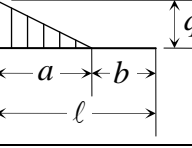


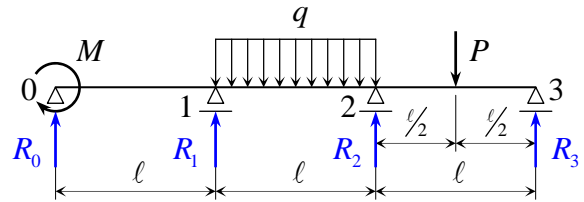
図-9 “3連モーメントの定理”の誘導

表-13.1 “3連モーメントの定理”における荷重項

荷重状態	\bar{A}_0 (左側)	\bar{B}_0 (右側)
	$\frac{1}{16}Pl^2$	$\frac{1}{16}Pl^2$
	$\frac{Pl^2}{6} \cdot \left(\frac{b}{l} - \frac{b^3}{l^3} \right) = \frac{Pab(\ell+b)}{6l}$	$\frac{Pl^2}{6} \cdot \left(\frac{a}{l} - \frac{a^3}{l^3} \right) = \frac{Pab(\ell+a)}{6l}$
	$-M \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \left(1 - 3\frac{b^2}{\ell^2} \right) = -\frac{M(\ell^2 - 3b^2)}{6l}$	$M \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \left(1 - 3\frac{a^2}{\ell^2} \right) = \frac{M(\ell^2 - 3a^2)}{6l}$
	$\frac{1}{24}ql^3$	$\frac{1}{24}ql^3$
	$\frac{ql^3}{24} \cdot \frac{a^2}{\ell^2} \cdot \left(2 - \frac{a}{\ell} \right)^2$	$\frac{ql^3}{24} \cdot \frac{a^2}{\ell^2} \cdot \left(2 - \frac{a^2}{\ell^2} \right)$
	$\frac{7}{360}ql^3$	$\frac{1}{45}ql^3$
	$(8q_A + 7q_B) \cdot \frac{\ell^3}{360}$	$(7q_A + 8q_B) \cdot \frac{\ell^3}{360}$
	$\frac{5}{192}ql^3$	$\frac{5}{192}ql^3$
	$\frac{ql^3}{360} \cdot \left(1 + \frac{b}{\ell} \right) \cdot \left(7 - 3\frac{b^2}{\ell^2} \right)$	$\frac{ql^3}{360} \cdot \left(1 + \frac{a}{\ell} \right) \cdot \left(7 - 3\frac{a^2}{\ell^2} \right)$
	$\frac{ql^3}{360} \cdot \frac{a^2}{\ell^2} \cdot \left(40 - 45\frac{a}{\ell} + 12\frac{a^2}{\ell^2} \right)$	$\frac{ql^3}{90} \cdot \frac{a^2}{\ell^2} \cdot \left(5 - 3\frac{a^2}{\ell^2} \right)$
	$\frac{ql^3}{360} \cdot \frac{a^2}{\ell^2} \cdot \left(20 - 15\frac{a}{\ell} + 3\frac{a^2}{\ell^2} \right)$	$\frac{ql^3}{360} \cdot \frac{a^2}{\ell^2} \cdot \left(10 - 3\frac{a^2}{\ell^2} \right)$

※小松定夫：“構造解析学Ⅱ”（第3版），pp.188（表13-1）に準拠，丸善，1989

【例題 1】右図に示した等断面 3 径間連続ばりの支点反力 R_0, R_1, R_2, R_3 を求めよ。ただし、支点沈下はなく、曲げ剛性 EI は全断面で一定とする。



【解答】

4つの支点 0,1,2,3 の支点曲げモーメント $M_0, M_1,$

M_2, M_3 を不静定力として、「3 連モーメントの定理」を適用すれば、次のようになる。(注 1)

$$\text{支点 } 0,1,2 \text{ 間では、 } M_0 + 4M_1 + M_2 = -\frac{6}{l} \cdot \left(M \cdot \frac{l}{6} + \frac{1}{24} q l^3 \right) = -M - \frac{1}{4} q l^2$$

$$\text{支点 } 1,2,3 \text{ 間では、 } M_1 + 4M_2 + M_3 = -\frac{6}{l} \cdot \left(\frac{1}{24} q l^3 + \frac{1}{16} P l^2 \right) = -\frac{1}{4} q l^2 - \frac{3}{8} P l$$

ここで、支点 0,3 は単純支持であるから、 $M_0 = M_3 = 0$ であり、これを上記の式に代入すると、次のような M_1, M_2 に関する連立 1 次方程式が得られる。

$$\begin{cases} 16M_1 + 4M_2 = -4M - q l^2 & \text{.....①} \\ 8M_1 + 32M_2 = -2q l^2 - 3P l & \text{.....②} \end{cases}$$

$$\text{①} \times 8 - \text{②} \text{ より、 } 120M_1 = -32M - 6q l^2 + 3P l$$

$$\therefore M_1 = \frac{-32M - 6q l^2 + 3P l}{120}$$

$$\text{①} - \text{②} \times 2 \text{ より、 } -60M_2 = -4M + 3q l^2 + 6P l$$

$$\therefore M_2 = \frac{4M - 3q l^2 - 6P l}{60}$$

次に、右図のように考えて、支点反力 $R_0 \sim R_3$ を求める。

支点 0,1 間の単純ばりについて、

$$\text{力の釣合条件から、 } R_0 + R_1^L = 0$$

$$\text{支点 1 回りモーメントの釣合から、 } R_0 l + M = M_1$$

$$R_0 = -\frac{M}{l} + \frac{M_1}{l} = -\frac{M}{l} + \frac{-32M - 6q l^2 + 3P l}{120 l} = -\frac{M}{l} - \frac{4}{15} \cdot \frac{M}{l} - \frac{1}{20} q l + \frac{1}{40} P = -\frac{19}{15} \cdot \frac{M}{l} - \frac{1}{20} q l + \frac{1}{40} P$$

$$\text{また、 } R_1^L = -R_0 = \frac{19}{15} \cdot \frac{M}{l} + \frac{1}{20} q l - \frac{1}{40} P$$

$$\therefore R_0 = -\frac{19}{15} \cdot \frac{M}{l} - \frac{1}{20} q l + \frac{1}{40} P, \quad R_1^L = \frac{19}{15} \cdot \frac{M}{l} + \frac{1}{20} q l - \frac{1}{40} P$$

支点 1,2 間の単純ばりについて、

$$\text{力の釣合条件から、 } R_1^R + R_2^L = q l, \quad \text{支点 2 周りのモーメントの釣合から、 } R_1^R l + M_1 = M_2 + q l \cdot \frac{l}{2}$$

$$R_1^R = \frac{M_2 - M_1}{l} + \frac{1}{2} q l = \frac{1}{l} \cdot \left(\frac{4M - 3q l^2 - 6P l}{60} - \frac{-32M - 6q l^2 + 3P l}{120} \right) + \frac{1}{2} q l \quad \therefore R_1^R = \frac{1}{3} \cdot \frac{M}{l} + \frac{1}{2} q l - \frac{1}{8} P$$

$$= \frac{1}{l} \cdot \frac{40M - 15P l}{120} + \frac{1}{2} q l = \frac{1}{3} \cdot \frac{M}{l} + \frac{1}{2} q l - \frac{1}{8} P$$

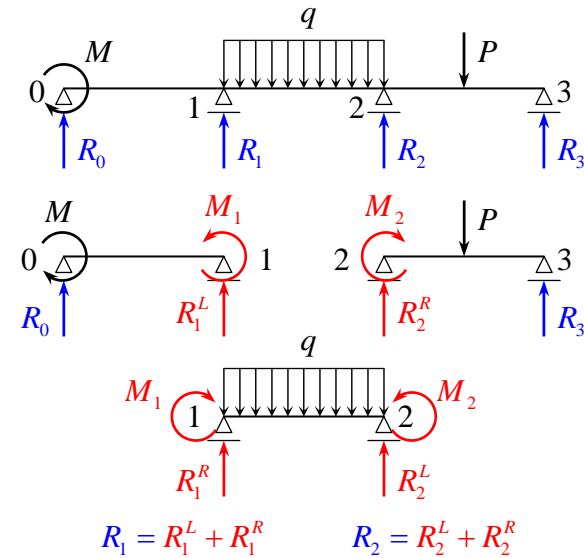
$$\text{また、 } R_2^L = q l - R_1^R = q l - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{M}{l} + \frac{1}{2} q l - \frac{1}{8} P \right) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{M}{l} + \frac{1}{2} q l + \frac{1}{8} P \quad \therefore R_2^L = -\frac{1}{3} \cdot \frac{M}{l} + \frac{1}{2} q l + \frac{1}{8} P$$

支点 2,3 間の単純ばりについて、

$$\text{力の釣合条件から、 } R_2^R + R_3 = P, \quad \text{支点 2 周りのモーメントの釣合から、 } R_3 l = P \cdot \frac{l}{2} + M_2$$

$$R_3 = \frac{1}{2} P + \frac{M_2}{l} = \frac{1}{2} P + \frac{4M - 3q l^2 - 6P l}{60 l} = \frac{1}{15} \cdot \frac{M}{l} - \frac{1}{20} q l + \frac{1}{2} P - \frac{1}{10} P = \frac{1}{15} \cdot \frac{M}{l} - \frac{1}{20} q l + \frac{2}{5} P$$

$$\text{また、 } R_2^R = P - R_3 = P - \left(\frac{1}{15} \cdot \frac{M}{l} - \frac{1}{20} q l + \frac{2}{5} P \right) = -\frac{1}{15} \cdot \frac{M}{l} + \frac{1}{20} q l + \frac{3}{5} P$$



$$\therefore R_3 = \frac{1}{15} \cdot \frac{M}{\ell} - \frac{1}{20} q\ell + \frac{2}{5} P, \quad R_2^R = -\frac{1}{15} \cdot \frac{M}{\ell} + \frac{1}{20} q\ell + \frac{3}{5} P$$

したがって、支点 1,2 の支点反力 R_1, R_2 は、次のようになる。

$$R_1 = R_1^L + R_1^R = \left(\frac{19}{15} \cdot \frac{M}{\ell} + \frac{1}{20} q\ell - \frac{1}{40} P \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{M}{\ell} + \frac{1}{2} q\ell - \frac{1}{8} P \right)$$

$$= \frac{24}{15} \cdot \frac{M}{\ell} + \frac{11}{20} q\ell - \frac{6}{40} P = \frac{8}{5} \cdot \frac{M}{\ell} + \frac{11}{20} q\ell - \frac{3}{20} P$$

$$\therefore R_1 = \frac{8}{5} \cdot \frac{M}{\ell} + \frac{11}{20} q\ell - \frac{3}{20} P$$

$$R_2 = R_2^L + R_2^R = \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{M}{\ell} + \frac{1}{2} q\ell + \frac{1}{8} P \right) + \left(-\frac{1}{15} \cdot \frac{M}{\ell} + \frac{1}{20} q\ell + \frac{3}{5} P \right)$$

$$= -\frac{6}{15} \cdot \frac{M}{\ell} + \frac{11}{20} q\ell + \frac{29}{40} P = -\frac{2}{5} \cdot \frac{M}{\ell} + \frac{11}{20} q\ell + \frac{29}{40} P$$

$$\therefore R_2 = -\frac{2}{5} \cdot \frac{M}{\ell} + \frac{11}{20} q\ell + \frac{29}{40} P$$

以上まとめると、支点反力 R_0, R_1, R_2, R_3 は以下のようになる。

$$R_0 = -\frac{19}{15} \cdot \frac{M}{\ell} - \frac{1}{20} q\ell + \frac{1}{40} P,$$

$$R_2 = -\frac{2}{5} \cdot \frac{M}{\ell} + \frac{11}{20} q\ell + \frac{29}{40} P,$$

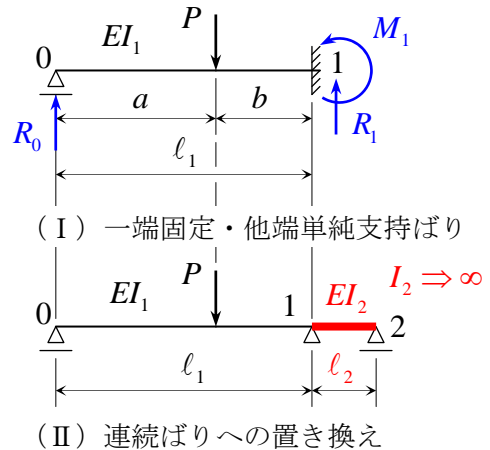
$$R_1 = \frac{8}{5} \cdot \frac{M}{\ell} + \frac{11}{20} q\ell - \frac{3}{20} P$$

$$R_3 = \frac{1}{15} \cdot \frac{M}{\ell} - \frac{1}{20} q\ell + \frac{2}{5} P$$

【例題 2】 右図(I)に示した一端固定・他端単純支持ばりの支点反力 R_0, R_1, M_1 を求めよ。ただし、支点沈下はなく、曲げ剛性 EI_1 は全断面で一定とする。

【解答】

固定端 1 は曲げ剛性が無限大である仮想のはり (長さ ℓ_2 , 曲げ剛性 EI_2 , $I_2 \Rightarrow \infty$) に置き換え、与えられた構造(I)を右図(II)のように「2 径間連続ばり」と考える。この連続ばりの 3 つの支点 0,1,2 の支点曲げモーメント M_0, M_1, M_2 を不静定力として、「3 連モーメントの定理」を適用すれば、次のようになる。



$$\frac{\ell_1}{I_1} M_0 + 2 \cdot \left(\frac{\ell_1}{I_1} + \frac{\ell_2}{I_2} \right) \cdot M_1 + \frac{\ell_2}{I_2} M_2$$

$$= -\frac{6}{I_1} \cdot \left\{ \frac{P\ell_1^2}{6} \cdot \left(\frac{a}{\ell_1} - \frac{a^3}{\ell_1^3} \right) \right\} = -\frac{Pab(\ell_1 + a)}{I_1 \ell_1}$$

ここで、 $M_0 = M_2 = 0$, $I_2 \Rightarrow \infty$ であるから、

$$2 \cdot \frac{\ell_1}{I_1} \cdot M_1 = -\frac{Pab(\ell_1 + a)}{I_1 \ell_1} \quad \therefore M_1 = -\frac{Pab(\ell_1 + a)}{2\ell_1^2} = -\frac{Pa(\ell_1^2 - a^2)}{2\ell_1^2}$$

したがって、支点反力 R_0, R_1 は次のようにして求められる。

力の釣合条件から、 $R_0 + R_1 = P$

支点 1 周りのモーメントの釣合から、 $R_0 \ell_1 = M_1 + Pb$

$$R_0 = \frac{M_1}{\ell_1} + \frac{Pb}{\ell_1} = -\frac{Pa(\ell_1^2 - a^2)}{2\ell_1^3} + \frac{P(\ell_1 - a)}{\ell_1} = \frac{P}{2\ell_1^3} \{ -a(\ell_1^2 - a^2) + 2\ell_1^2(\ell_1 - a) \} = \frac{2\ell_1^3 - 3a\ell_1^2 + a^3}{2\ell_1^3} P$$

$$\therefore R_1 = P - R_0 = P - \frac{2\ell_1^3 - 3a\ell_1^2 + a^3}{2\ell_1^3} P = \frac{3a\ell_1^2 - a^3}{2\ell_1^3} P = \frac{a(3\ell_1^2 - a^2)}{2\ell_1^3} P$$

以上まとめると、支点反力 R_0, R_1, M_1 は以下のようになる。

$$R_0 = \frac{2\ell_1^3 - 3a\ell_1^2 + a^3}{2\ell_1^3} P, \quad R_1 = \frac{a(3\ell_1^2 - a^2)}{2\ell_1^3} P, \quad M_1 = -\frac{Pa(\ell_1^2 - a^2)}{2\ell_1^2}$$

(注1) 「表-13.1 “3連モーメントの定理”における荷重項」の利用法

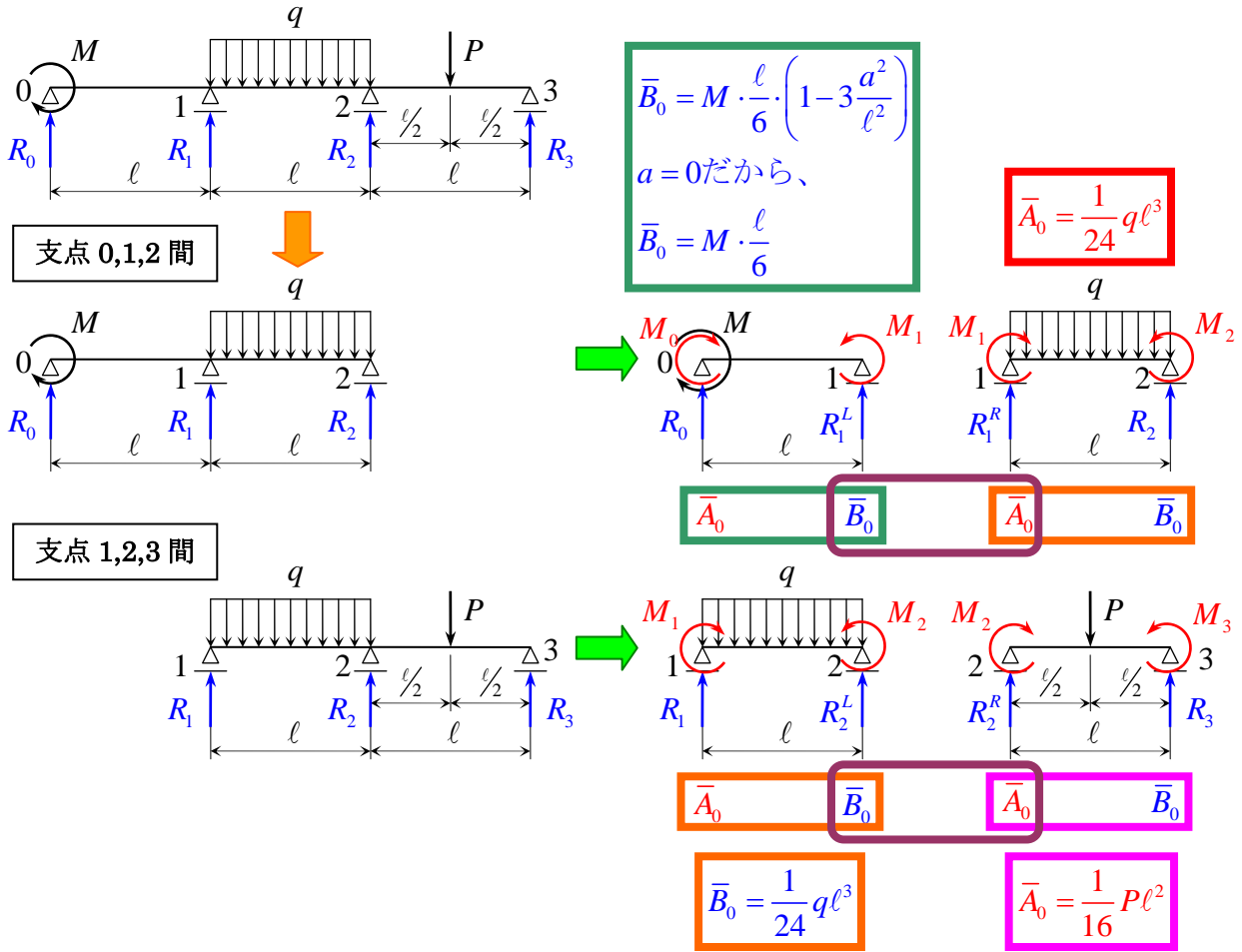


表-13.1 “3連モーメントの定理”における荷重項

荷重状態	\bar{A}_0 (左側)	\bar{B}_0 (右側)
	$\frac{1}{16} P l^2$	$\frac{1}{16} P l^2$
	$-M \cdot \frac{l}{6} \cdot \left(1 - 3 \frac{b^2}{l^2}\right) = -\frac{M(l^2 - 3b^2)}{6l}$	$M \cdot \frac{l}{6} \cdot \left(1 - 3 \frac{a^2}{l^2}\right) = \frac{M(l^2 - 3a^2)}{6l}$
	$\frac{1}{24} q l^3$	$\frac{1}{24} q l^3$

4つの支点 0,1,2,3 の支点曲げモーメント M_0, M_1, M_2, M_3 を不静定力として、“3連モーメントの定理”を適用すれば、

支点 0,1,2 間では、 $M_0 + 4M_1 + M_2 = -\frac{6}{l} \cdot \left(M \cdot \frac{l}{6} + \frac{1}{24} q l^3 \right) = -M - \frac{1}{4} q l^2$

支点 1,2,3 間では、 $M_1 + 4M_2 + M_3 = -\frac{6}{l} \cdot \left(\frac{1}{24} q l^3 + \frac{1}{16} P l^2 \right) = -\frac{1}{4} q l^2 - \frac{3}{8} P l$