# 断面諸量

## 断面 1 次･2 次モーメントの定義

図-1 に示すような形状を有する横断面を考え、その全断面積を $A$ とする。いま任意に定めた直交座標軸 $O$-$x,y$ をとり、また図中の斜線部の微小面積要素を $dA$ とするとき、

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

で定義される $S_x$, $S_y$ をそれぞれ与えられた横断面の $x$ 軸, $y$ 軸に関する**断面 1 次モーメント**(geometrical moment of area)という。

また、

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

で定義される $I_x$, $I_y$, $I_{xy}$ をそれぞれ与えられた横断面の $x$ 軸に関する**断面 2 次モーメント**（あるいは**慣性モーメント**）(geometrical moment of inertia), $y$ 軸に関する**断面 2 次モーメント**および $x$-$y$ 軸に関する**断面相乗モーメント**（あるいは**慣性相乗モーメント**）(product of inertia of area)という。

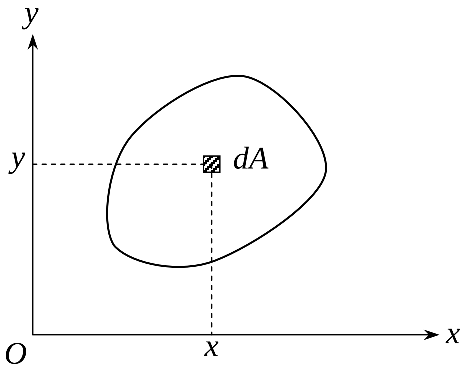

図-1　任意の座標系

なお、$x$-$y$ 軸に関する断面相乗モーメント $I_{xy}$ は、$x$ 軸, $y$ 軸のうち少なくとも一方が、与えられた図形の対称軸になっている場合には、その定義式から $I_{xy}=0$ となることが明らかである。

## 座標軸の平行移動

図-2 に示すように、元の座標軸 $O$-$x,y$ に平行な任意の座標軸を $O'$-$u,v$ とし、両座標系の間に、

$$\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

の関係があるものとする。

このとき、新座標系の $u$ 軸, $v$ 軸に関する断面 1 次モーメントは次のようになる。

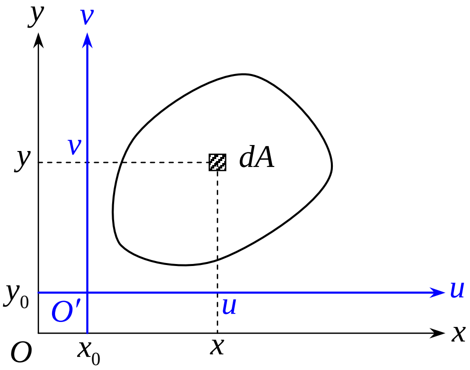

図-2　座標軸の平行移動

$$\begin{aligned} S_u &= \int_A v dA = \int_A (y - y_0) dA \\ &= \int_A y dA - y_0 \int_A dA = S_x - y_0 A \\ S_v &= \int_A u dA = \int_A (x - x_0) dA \\ &= \int_A x dA - x_0 \int_A dA = S_y - x_0 A \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

また、新座標系の $u$ 軸, $v$ 軸に関する断面 2 次モーメント $I_u$, $I_v$ および $u$-$v$ 軸に関する断面相乗モーメント $I_{uv}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} I_u &= \int_A v^2 dA = \int_A (y - y_0)^2 dA = \int_A y^2 dA - 2y_0 \int_A y dA + y_0^2 \int_A dA = I_x - 2y_0 S_x + y_0^2 A \\ I_v &= \int_A u^2 dA = \int_A (x - x_0)^2 dA = \int_A x^2 dA - 2x_0 \int_A x dA + x_0^2 \int_A dA = I_y - 2x_0 S_y + x_0^2 A \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\begin{aligned} I_{uv} &= \int_A uv dA = \int_A (x - x_0)(y - y_0) dA \\ &= \int_A xy dA - y_0 \int_A x dA - x_0 \int_A y dA + x_0 y_0 \int_A dA = I_{xy} - y_0 S_y - x_0 S_x + x_0 y_0 A \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

なお、ここに、微小面積要素 $dA$ の定義より、$\int_A dA = A$ の関係を用いている。

ここで、$x$ 軸, $y$ 軸に関する断面 1 次モーメント $S_x$ と $S_y$ が共に 0 となるとき、その座標原点 $O$ は与えられた図形の**図心**(centroid, center of figure)あるいは**重心**(center of gravity)と呼ばれる。言い換えれば、図心を通る任意の軸に関する断面 1 次モーメントはすべて 0 となる。

いま、図-2 の点 $O'$が図心であるとすると、$S_u = S_v = 0$ であるから、(5)式より、

$$S_u = S_x - y_0 A = 0\,,\quad S_v = S_y - x_0 A = 0$$

となるから、任意に選んだ座標系 *O-x,y* からみた図心 *O'* の位置が次の式から計算できる。

$$\boxed{y_G \equiv y_0 = \frac{S_x}{A}},\quad \boxed{x_G \equiv x_0 = \frac{S_y}{A}} \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

以降、図心の位置を表す場合、文字 G によって表示することにする。

ここで、(8)式を逆から見れば、任意の座標系 *O-x,y* における断面の重心位置 $(x_G, y_G)$ が既知であれば、$x$ 軸，$y$ 軸に関する断面 1 次モーメント $S_x$，$S_y$ は、それぞれ次の式から計算できることになる。

$$\boxed{S_x = Ay_G},\quad \boxed{S_y = Ax_G} \qquad \cdots\cdots\cdots(8)'$$

このことは、長方形または正方形, 三角形, 円などの面積や重心位置が知られている図形については、任意の座標系での断面 1 次モーメントが容易に求め得ることを示している。

また、$u$ 軸，$v$ 軸に関する断面 2 次モーメント $I_u$，$I_v$ および $u$-$v$ 軸に関する断面相乗モーメント $I_{uv}$ については、このとき、$S_x = y_0 A$，$S_y = x_0 A$ であるから、(6)(7)式は、次のように変形できる。

$$I_u = I_x - 2y_0 S_x + y_0^2 A = I_x - 2y_0 \cdot y_0 A + y_0^2 A = I_x - y_0^2 A$$

$$I_v = I_y - 2x_0 S_y + x_0^2 A = I_y - 2x_0 \cdot x_0 A + x_0^2 A = I_y - x_0^2 A$$

$$I_{uv} = I_{xy} - y_0 S_y - x_0 S_x + x_0 y_0 A = I_{xy} - y_0 \cdot x_0 A - x_0 \cdot y_0 A + x_0 y_0 A = I_{xy} - x_0 y_0 A$$

ここで、(8)式で用いたように、$x_0 \Rightarrow x_G$，$y_0 \Rightarrow y_G$ に置き換えて表すと次のようになる。

$$\boxed{I_u = I_x - y_G^2 A} \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\boxed{I_v = I_y - x_G^2 A} \qquad \cdots\cdots\cdots(10)$$

$$\boxed{I_{uv} = I_{xy} - x_G y_G A} \qquad \cdots\cdots\cdots(11)$$

断面 1 次モーメントの場合と同様に、(9)～(11)式を逆から見れば、任意の座標系 *O-x,y* における断面の重心位置 $(x_G, y_G)$ が既知であれば、$x$ 軸，$y$ 軸に関する断面 2 次モーメント $I_x$，$I_y$ および $x$-$y$ 軸に関する断面相乗モーメント $I_{xy}$ は、それぞれ次の式から計算できることになる。

$$\boxed{I_x = I_u + y_G^2 A} \qquad \cdots\cdots\cdots(9)'$$

$$\boxed{I_y = I_v + x_G^2 A} \qquad \cdots\cdots\cdots(10)'$$

$$\boxed{I_{xy} = I_{uv} + x_G y_G A} \qquad \cdots\cdots\cdots(11)'$$

このことは、断面 1 次モーメントの場合と同様に、長方形または正方形，三角形，円などの面積，重心位置，$I_u$，$I_v$，$I_{uv}$ が知られている図形については、任意の座標系での断面 2 次モーメントおよび断面相乗モーメントが容易に求め得ることを示している。

ここまでの座標軸の平行移動に関する知見を利用して、図-3 に示すような重心位置が既知の図形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲで構成される断面について、

1) 任意の座標系 *O-x,y* での断面全体の重心位置 $G(x_G, y_G)$
2) 座標系 *O-x,y* に平行でその重心 $G$ を通る座標系 *G-u,v* に関する断面 2 次モーメント $I_u$，$I_v$ および断面相乗モーメント $I_{uv}$

を求める問題を考える。

このとき、次頁に示すような〝表〟を作成して計算する方法について説明する。

まず、$x$ 軸に関する断面モーメントを考える。すなわち、断面全体の重心の $y$ 座標 $y_G$ と $u$ 軸に関する断面 2 次モーメント $I_u$ を求めることを考える。

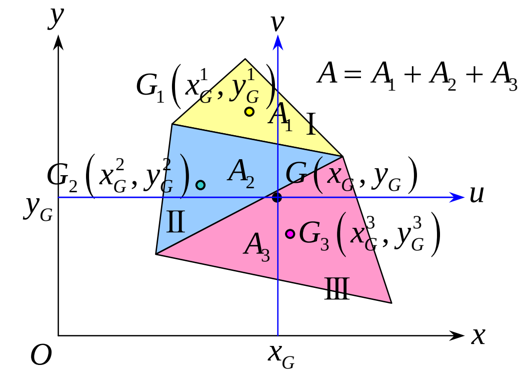


図-3　重心が既知の図形で構成される断面

※主要断面の断面諸量については、資料を配布する。

| 分割図形 | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 面積 | 重心位置 | 断面１次モーメント | 重心位置 | 断面２次モーメント (9)'式の第２項 | 断面２次モーメント (9)'式の第１項 |
| | $A_{\mathrm{i}}$ | $y_G^i$ | $S_x^i = A_i y_G^i$ | $v_G^i$ | $A_i \times \left(v_G^i\right)^2$ | $I_{Gu}^i$ |
| Ⅰ | $A_1$ | $y_G^1$ | $S_x^1 = A_1 y_G^1$ | $v_G^1 = y_G^1 - y_G$ | $A_1 \times \left(v_G^1\right)^2$ | $I_{Gu}^1$ |
| Ⅱ | $A_2$ | $y_G^2$ | $S_x^2 = A_2 y_G^2$ | $v_G^2 = y_G^2 - y_G$ | $A_2 \times \left(v_G^2\right)^2$ | $I_{Gu}^2$ |
| Ⅲ | $A_3$ | $y_G^3$ | $S_x^3 = A_3 y_G^3$ | $v_G^3 = y_G^3 - y_G$ | $A_3 \times \left(v_G^3\right)^2$ | $I_{Gu}^3$ |
| 合計 | $A$ | | $S_x$ | | $A \times \left(v_G\right)^2$ | $I_{Gu}$ |

$$\boxed{y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_i A_i y_G^i}{\sum_i A_i}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_u &= I_{Gu} + A \times \left(v_G\right)^2 \\ &= \sum_i I_{Gu}^i + \sum_i A_i \times \left(v_G^i\right)^2 \\ &= \sum_i I_u^i \end{aligned}}$$

上表の各列①～⑥毎に計算内容を以下に述べてゆく。

① 図形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲそれぞれの面積 $A_{\mathrm{i}}$ を求める。さらに、断面全体の面積 $A = \sum_i A_i$ を求める。

② 任意の座標系 *O-x,y* における図形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの重心の $y$ 座標 $y_G^i$ を求める。

③ (8)'式より、図形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲそれぞれの $x$ 軸に関する断面１次モーメント $S_x^i$ は $S_x^i = A_i y_G^i$ で計算できるので、断面全体の $y$ 軸に関する断面１次モーメント $S_x$ は、それらを合計して $S_x = \sum_i S_x^i$ となる。ところで、断面全体ついて考えれば、図-3 の点 $G$ が重心である。よって、(8)式から、断面全体の重心の $y$ 座標 $y_G$ は、 $y_G = \dfrac{S_x}{A} = \dfrac{\sum_i A_i y_G^i}{\sum_i A_i}$ で求まる。

ここまでは、任意の座標系 *O-x,y* について考えたものであり、以降は座標系 *O-x,y* に平行で断面全体の重心 $G$ を通る座標系 *G-u,v* について考える。

④ 座標系 *G-u,v* における図形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの重心の $v$ 座標 $v_G^i = y_G^i - y_G$ を求める。

⑤ $A_i \times \left(v_G^i\right)^2$ は、(9)'式の第２項を図形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲそれぞれについて求めることを表している。

⑥ $I_{Gu}^i$ は、図形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲそれぞれの重心 $G_i\left(x_G^i, y_G^i\right)$ を通り $u$ 軸に平行な軸に関する断面２次モーメントを求めることを表しており、(9)'式の第１項を表している。例えば、各辺が *u-v* 軸に平行である幅 $b$，高さ $h$ の長方形断面の場合には $\dfrac{bh^3}{12}$ で表され、図形の基本的なものである。⑤，⑥を各行毎に足した $I_u^i = I_{Gu}^i + A_i \times \left(v_G^i\right)^2$ は、図形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲそれぞれの $u$ 軸に関する断面２次モーメントを表すものとなるので、それらをすべて加算した $I_u = I_{Gu} + A \times \left(v_G\right)^2$ は、断面全体の $u$ 軸に関する断面２次モーメントとなる。

次に、$y$ 軸に関する断面モーメントを考える。すなわち、断面全体の重心の $x$ 座標 $x_G$ と $v$ 軸に関する断面２次モーメント $I_v$ を求めることを考える。このとき、$y \Leftrightarrow x$, $u \Leftrightarrow v$, (9)'式⇒(10)'式に置き換えれば、$x$ 軸に関する場合と全く同様になるので、〝表〟のみを記載して詳しい説明は省略する。

なお、⑥の長方形断面の例の場合には $\dfrac{hb^3}{12}$ となることに注意する必要がある。

| 分割図形 | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 面積 | 重心位置 | 断面１次モーメント | 重心位置 | 断面２次モーメント<br>(10)'式の第２項 | <br>(10)'式の第１項 |
| | $A_i$ | $x_G^i$ | $S_y^i = A_i x_G^i$ | $u_G^i$ | $A_i \times \left(u_G^i\right)^2$ | $I_{Gv}^i$ |
| Ⅰ | $A_1$ | $x_G^1$ | $S_y^1 = A_1 x_G^1$ | $u_G^1 = x_G^1 - x_G$ | $A_1 \times \left(u_G^1\right)^2$ | $I_{Gv}^1$ |
| Ⅱ | $A_2$ | $x_G^2$ | $S_y^2 = A_2 x_G^2$ | $u_G^1 = x_G^1 - x_G$ | $A_2 \times \left(u_G^2\right)^2$ | $I_{Gv}^2$ |
| Ⅲ | $A_3$ | $x_G^3$ | $S_y^3 = A_3 x_G^3$ | $u_G^1 = x_G^1 - x_G$ | $A_3 \times \left(u_G^3\right)^2$ | $I_{Gv}^3$ |
| 合計 | $A$ | | $S_y$ | | $A \times \left(u_G\right)^2$ | $I_{Gv}$ |

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_i A_i x_G^i}{\sum_i A_i}$$

$$\begin{aligned} I_v &= I_{Gv} + A \times \left(u_G\right)^2 \\ &= \sum_i I_{Gv}^i + \sum_i A_i \times \left(u_G^i\right)^2 \\ &= \sum_i I_v^i \end{aligned}$$

最後に、断面相乗モーメント $I_{uv}$ について考える。この場合、断面全体の重心位置 $G\left(x_G, y_G\right)$ は既に得られているので、座標系 *O-x,y* に平行で断面全体の重心 *G* を通る座標系 *G-u,v* についてのみ考える。

| 分割図形 | ① | ④ | ④' | ⑤ | ⑥ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 面積 | 重心位置 | 重心位置 | 断面相乗モーメント<br>(11)'式の第２項 | <br>(11)'式の第１項 |
| | $A_i$ | $u_G^i$ | $v_G^i$ | $A_i \times \left(u_G^i\right) \times \left(v_G^i\right)$ | $I_{Guv}^i$ |
| Ⅰ | $A_1$ | $u_G^1 = x_G^1 - x_G$ | $v_G^1 = y_G^1 - y_G$ | $A_1 \times \left(u_G^1\right) \times \left(v_G^1\right)$ | $I_{Guv}^1$ |
| Ⅱ | $A_2$ | $u_G^1 = x_G^1 - x_G$ | $v_G^2 = y_G^2 - y_G$ | $A_2 \times \left(u_G^2\right) \times \left(v_G^2\right)$ | $I_{Guv}^2$ |
| Ⅲ | $A_3$ | $u_G^1 = x_G^1 - x_G$ | $v_G^3 = y_G^3 - y_G$ | $A_3 \times \left(u_G^3\right) \times \left(v_G^3\right)$ | $I_{Guv}^3$ |
| 合計 | $A$ | | | $A \times \left(u_G\right) \times \left(v_G\right)$ | $I_{Guv}$ |

$$I_{uv} = I_{Guv} + A \times \left(u_G\right) \times \left(v_G\right) = \sum_i I_{Guv}^i + \sum_i A_i \times \left(u_G^i\right) \times \left(v_G^i\right) = \sum_i I_{uv}^i$$

上表の①，④，④'列については既に計算されたものであるので、⑤，⑥についてだけ説明する。

⑤　$A_i \times \left(u_G^i\right) \times \left(v_G^i\right)$ は、(11)'式の第２項を図形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲそれぞれについて求めることを表している。

⑥　$I_{Guv}^i$ は、図形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲそれぞれの重心 $G_i\left(x_G^i, y_G^i\right)$ を通り *u,v* 軸に平行な軸に関する断面相乗モーメントを求めることを表しており、(11)'式の第１項を表している。例えば、各辺が *u-v* 軸に平行である長方形断面の場合には図形の対称性より０であることが容易にわかる。しかし、対称とならない場合は別途定義式に従って積分などを行う必要が生じるので、断面相乗モーメントの定義の際に既に述べたように、分割図形が重心を通り *u,v* 軸に平行な軸のうち少なくとも一方の軸に関して対称となるように断面全体を分割した方がよい。⑤，⑥を各行毎に足した $I_{uv}^i = I_{Guv}^i + A_i \times \left(u_G^i\right) \times \left(v_G^i\right)$ は、図形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲそれぞれの *u-v* 軸に関する断面相乗モーメントを表すものとなるので、それらをすべて加算した $I_{uv} = I_{Guv} + A \times \left(u_G\right) \times \left(v_G\right)$ は、断面全体の *u-v* 軸に関する断面相乗モーメントとなる。

## 座標軸の回転

図-4 に示すように、任意の座標系 $O-x,y$ を原点 $O$ 回りに反時計方向に $\theta$ だけ回転して得られる新座標系を $O-\xi,\eta$ とすれば、両座標系の間には、

$$\begin{cases}\xi = x\cos\theta + y\sin\theta \\ \eta = -x\sin\theta + y\cos\theta\end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(12)$$

あるいは

$$\begin{cases}x = \xi\cos\theta - \eta\sin\theta \\ y = \xi\sin\theta + \eta\cos\theta\end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(12)'$$

という関係がある。

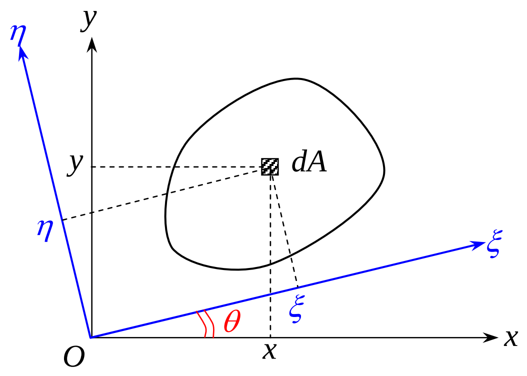


図-4　座標軸の回転

このとき、新座標系の $\xi$ 軸，$\eta$ 軸に関する断面 1 次モーメント $S_\xi$，$S_\eta$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
S_\xi &= \int_A \eta dA = \int_A (-x\sin\theta + y\cos\theta) dA \\
&= -\sin\theta \int_A xdA + \cos\theta \int_A ydA = -S_y\sin\theta + S_x\cos\theta = S_x\cos\theta - S_y\sin\theta \\
S_\eta &= \int_A \xi dA = \int_A (x\cos\theta + y\sin\theta) dA \\
&= \cos\theta \int_A xdA + \sin\theta \int_A ydA = S_y\cos\theta + S_x\sin\theta = S_x\sin\theta + S_y\cos\theta
\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots(13)$$

また、新座標系の $\xi$ 軸，$\eta$ 軸に関する断面 2 次モーメント $I_\xi$，$I_\eta$ および $\xi$ - $\eta$ 軸に関する断面相乗モーメント $I_{\xi\eta}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
I_\xi &= \int_A \eta^2 dA = \int_A (-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 dA \\
&= \sin^2\theta \int_A x^2 dA - 2\sin\theta\cos\theta \int_A xydA + \cos^2\theta \int_A y^2 dA \\
&= I_y\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta I_{xy} + I_x\cos^2\theta = I_x\cos^2\theta + I_y\sin^2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \\
&= I_x\frac{1+\cos 2\theta}{2} + I_y\frac{1-\cos 2\theta}{2} - I_{xy}\sin 2\theta \\
&= \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta
\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots(14)$$

$$\begin{aligned}
I_\eta &= \int_A \xi^2 dA = \int_A (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 dA \\
&= \cos^2\theta \int_A x^2 dA + 2\sin\theta\cos\theta \int_A xydA + \sin^2\theta \int_A y^2 dA \\
&= I_y\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta I_{xy} + I_x\sin^2\theta = I_x\sin^2\theta + I_y\cos^2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \\
&= I_x\frac{1-\cos 2\theta}{2} + I_y\frac{1+\cos 2\theta}{2} + I_{xy}\sin 2\theta \\
&= \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta
\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots(15)$$

$$\begin{aligned}
I_{\xi\eta} &= \int_A \xi\eta dA = \int_A (x\cos\theta + y\sin\theta)(-x\sin\theta + y\cos\theta) dA \\
&= -\sin\theta\cos\theta \int_A x^2 dA + \cos^2\theta \int_A xydA - \sin^2\theta \int_A xydA + \sin\theta\cos\theta \int_A y^2 dA \\
&= -I_y\sin\theta\cos\theta + I_{xy}\cos^2\theta - I_{xy}\sin^2\theta + I_x\sin\theta\cos\theta \\
&= (I_x - I_y)\sin\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta
\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots(16)$$

これらを用いて $\theta$ を消去するように計算すると、$I_x$，$I_y$，$I_{xy}$ と $I_\xi$，$I_\eta$，$I_{\xi\eta}$ の間には、次の関係があることがわかる。

$$I_\xi + I_\eta = I_x + I_y \qquad \cdots\cdots\cdots(17)$$

$$I_\xi \cdot I_\eta - I_{\xi\eta}^2 = I_x \cdot I_y - I_{xy}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots(18)$$

$$\left[ I_\xi - \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \right]^2 + I_{\xi\eta}^2 = \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2} \right]^2 \qquad \cdots\cdots\cdots(19)$$

ここで、(19)式は、$I_\xi \Leftrightarrow I_\eta$ に置き換えても成り立ち、これは、$I_\xi - I_{\xi\eta}$ 平面または $I_\eta - I_{\xi\eta}$ 平面において、中心 $\left[\frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right), 0\right]$，半径 $\frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}$ の〝円〟を描くことを意味する。

**断面の主軸と主断面 2 次モーメント**

(14)～(16)式で示したように、$I_\xi$，$I_\eta$，$I_{\xi\eta}$ は、$\theta$ の関数となる。そこで、$I_\xi$ の極大値・極小値について考えてみる。$I_\xi$ を $\theta$ で微分すると、次のようになる。

$$\frac{dI_\xi}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[ \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \right]$$

$$= -\left(I_x - I_y\right)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = \left(I_y - I_x\right)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta$$

ここで、$\frac{dI_\xi}{d\theta} = 0$ とすると、$\left(I_y - I_x\right)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$ となり、

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \qquad \text{すなわち} \qquad \boxed{\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right)} \qquad \cdots\cdots\cdots(20)$$

のとき、$I_\xi$ は極値をとる。なお、$I_\eta$ について行っても同様な結果となる。

このとき、(16)式は、$\frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta = 0$ となることは明らかであり、$I_{\xi\eta} = 0$ となる。

また、(20)式を満たす $\theta$ は、2 つあり、両者は互いに 90° だけ異なっている。

このように、断面 2 次モーメントが極大値ないしは極小値をとる軸は互いに直交し、それらの 2 軸に関する断面相乗モーメントは 0 である。このような特別な軸を、原点 $O$ に関するその断面の**主軸**(principal axis)と称し、そのときの断面 2 次モーメントを**主断面 2 次モーメント**(principal moment of inertia)という。

主断面 2 次モーメントを $I_1$, $I_2$（$I_1 > I_2$）で表わすとすれば、(19)式より、次のようになる。

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} I_1 \\ I_2 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots(21)$$

特に、座標原点 $O$ が断面の図心と一致するときの主軸は、単に〝断面の主軸〟と呼ばれ、わざわざ〝原点 $O$ に関する〟という形容句はつけない。

【備考：(17)〜(19)式の証明】

●(17)式の証明…(14)+(15)を計算すると、以下のようになる。

$$I_\xi + I_\eta = \left[\frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta\right] + \left[\frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta\right]$$

$$= I_x + I_y$$

●(18)式の証明…(14)×(15)－(16)×(16)を計算すると、以下のようになる。

$$I_\xi \cdot I_\eta - I_{\xi\eta}^2 = \left[\frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta\right] \cdot \left[\frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta\right]$$

$$-\left[\frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta\right]^2$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{1}{4}\left(I_x + I_y\right)^2 - \frac{1}{4}\left(I_x + I_y\right)\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta + \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right)I_{xy}\sin 2\theta \\ + \frac{1}{4}\left(I_x + I_y\right)\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta - \frac{1}{4}\left(I_x - I_y\right)^2\cos^2 2\theta + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)I_{xy}\sin 2\theta\cos 2\theta \\ - \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right)I_{xy}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)I_{xy}\sin 2\theta\cos 2\theta - I_{xy}^2\sin^2 2\theta \end{array}\right]$$

$$-\left[\frac{1}{4}\left(I_x - I_y\right)^2\sin^2 2\theta + \left(I_x - I_y\right)I_{xy}\sin 2\theta\cos 2\theta + I_{xy}^2\cos^2 2\theta\right]$$

$$= \left[\frac{1}{4}\left(I_x + I_y\right)^2 - \frac{1}{4}\left(I_x - I_y\right)^2\cos^2 2\theta - I_{xy}^2\sin^2 2\theta\right] - \left[\frac{1}{4}\left(I_x - I_y\right)^2\sin^2 2\theta + I_{xy}^2\cos^2 2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(I_x + I_y\right)^2 - \frac{1}{4}\left(I_x - I_y\right)^2\left(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta\right) - I_{xy}^2\left(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(I_x + I_y\right)^2 - \frac{1}{4}\left(I_x - I_y\right)^2 - I_{xy}^2 = I_x \cdot I_y - I_{xy}^2$$

●(19)式の証明…(14)を変形したものの二乗＋(16)×(16) を計算すると、以下のようになる。

$$\left[I_\xi - \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right)\right]^2 + I_{\xi\eta}^2 = \left[\frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{4}\left(I_x - I_y\right)^2\cos^2 2\theta - I_{xy}\left(I_x - I_y\right)\sin 2\theta\cos 2\theta + I_{xy}^2\sin^2 2\theta\right]$$

$$+\left[\frac{1}{4}\left(I_x - I_y\right)^2\sin^2 2\theta + I_{xy}\left(I_x - I_y\right)\sin 2\theta\cos 2\theta + I_{xy}^2\cos^2 2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(I_x - I_y\right)^2\left(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta\right) + I_{xy}^2\left(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(I_x - I_y\right)^2 + I_{xy}^2 = \frac{1}{4}\left[\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2\right] = \left[\frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}\right]^2$$