

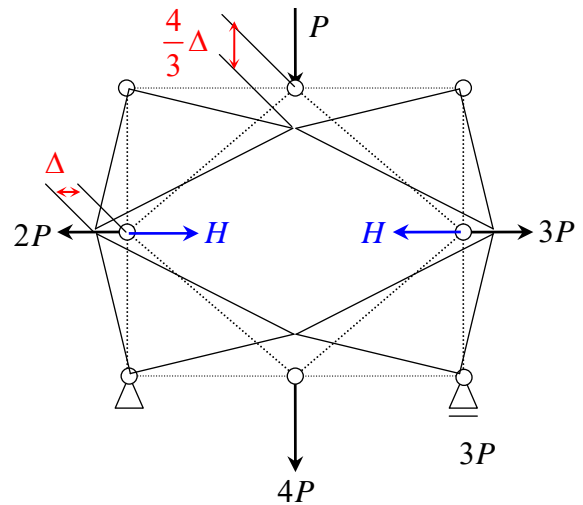
【1】

(1) 右図に示すように、支持条件や幾何学的条件を満足する水平方向の仮想変位を Δ とすると、鉛直方向の仮想変位は $\frac{4}{3}\Delta$ となること、及び、力の方向と逆方向の仮想変位は“負”となることに注意して、“仮想変位の原理”を適用すると、次のようになる。

$$2P \cdot \Delta + 3P \cdot \Delta + H \cdot (-\Delta) + H \cdot (-\Delta) + P \cdot \frac{4}{3}\Delta + 4P \cdot \left(-\frac{4}{3}\Delta\right) = 0$$

$$\therefore 2P + 3P - H - H + \frac{4}{3}P - \frac{16}{3}P = 0$$

$$\therefore 5P - 2H - 4P = 0 \quad \therefore H = \frac{1}{2}P \quad \text{5点}$$



(2) 実系の支点反力 R_A , H_A , R_B を求めると、次のようになる。

鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R_B = P + 4P = 5P$
 水平方向の力の釣合から、 $H_A + 3P = 2P \quad \therefore H_A = -P$
 A点回りのモーメントの釣合から、 $R_B \times 8l + 2P \times 3l = P \times 4l + 3P \times 3l + 4P \times 4l$
 $\therefore 8R_B = 23P \quad \therefore R_B = \frac{23}{8}P$ よって $R_A = 5P - R_B = 5P - \frac{23}{8}P = \frac{17}{8}P$

さらに、“節点法”を用いて、**実系**の全ての部材力を求めると下左図のようになる。

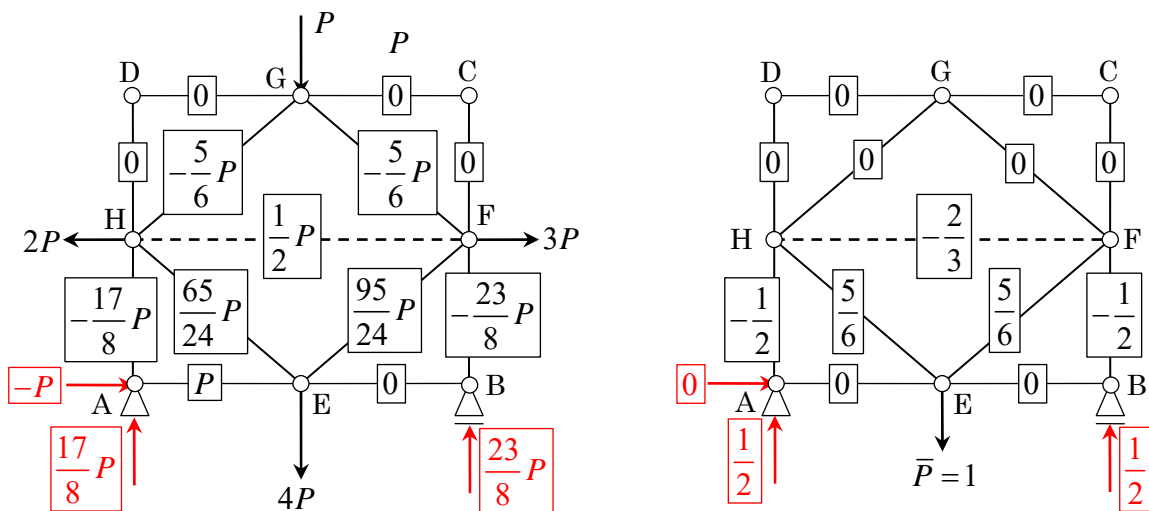
次に、E点に単位荷重 $\bar{P}=1$ のみを鉛直方向に载荷させた**仮想系**を考え、これの全ての部材力を求める。

まず、(1)と同様な方法で、部材HFの部材力 \bar{H} を求めると、

$$\bar{H} \cdot (-\Delta) + \bar{H} \cdot (-\Delta) + \bar{P} \cdot \left(-\frac{4}{3}\Delta\right) = 0 \quad \therefore \bar{H} + \bar{H} + \frac{4}{3}\bar{P} = 0$$

$$\therefore 2\bar{H} = -\frac{4}{3}\bar{P} \quad \therefore \bar{H} = -\frac{2}{3}\bar{P} = -\frac{2}{3}$$

さらに、“節点法”を用いて、**仮想系**の全ての部材力を求めると下右図のようになる。



【実系】
5点

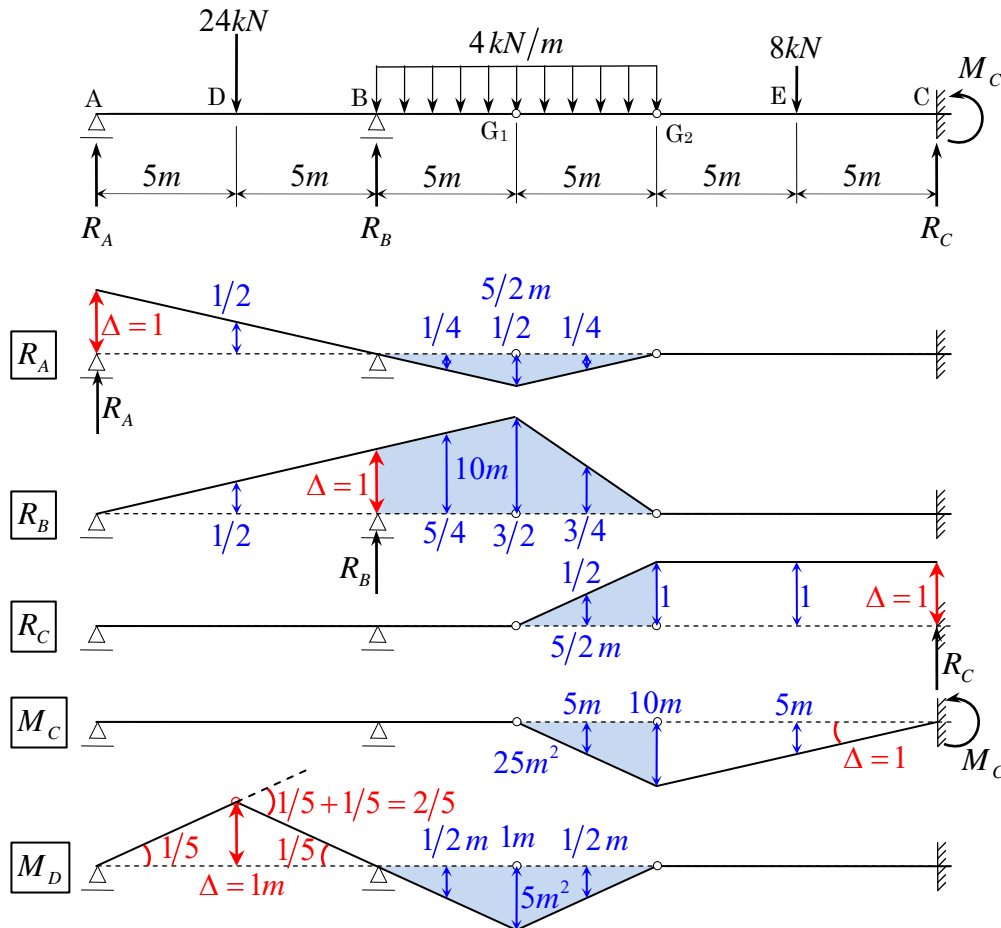
【仮想系】
5点

したがって、“単位荷重法”を用いて、E点の鉛直方向の変位 v_E を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
1 \times v_E &= \sum \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} \ell_{ij} \\
&= \frac{1}{EA} \left\{ \left(\frac{1}{2} P \right) \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \times 2 \times 4\ell + \left(-\frac{17}{8} P \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \times 3\ell + \left(-\frac{23}{8} P \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \times 3\ell \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{65}{24} P \right) \cdot \left(\frac{5}{6} \right) \times 5\ell + \left(\frac{95}{24} P \right) \cdot \left(\frac{5}{6} \right) \times 5\ell \right\} \\
&= \frac{1}{EA} \left\{ -\frac{8}{3} P\ell + \frac{51}{16} P\ell + \frac{69}{16} P\ell + \frac{1625}{144} P\ell + \frac{2375}{144} P\ell \right\} = \frac{1}{EA} \left\{ -\frac{8}{3} P\ell + \frac{15}{2} P\ell + \frac{250}{9} P\ell \right\} \\
&= \frac{Pl}{EA} \cdot \frac{-144 + 405 + 1500}{54} = \frac{1761}{54} \cdot \frac{Pl}{EA} = \frac{587}{18} \cdot \frac{Pl}{EA} \\
\therefore v_E &= \frac{587}{18} \cdot \frac{Pl}{EA} \quad \text{10点}
\end{aligned}$$

【2】

支点反力 R_A , R_B , R_C と C 点の支点曲げモーメント M_C および D 点の曲げモーメント M_D のそれぞれについて、題意のゲルバーばりの支持条件や幾何学的条件を満足する “単位” の仮想変位 $\Delta = 1$ を図示すると下図のようになる。



」各2点

荷重の方向と逆方向の仮想変位は “負” であることに注意して、“仮想変位の原理” を適用すると次のようになる。なお、等分布荷重に対しては “影響面積” を用いている。

支点反力 R_A について $R_A \times 1 + 24kN \times (-1/2) + 4kN/m \times (5/2m) = 0$

$\therefore R_A - 12 + 10 = 0$

$\therefore R_A = 2kN$ 2点

支点反力 R_B について $R_B \times 1 + 24kN \times (-1/2) + 4kN/m \times (-10m) = 0$

$\therefore R_B - 12 - 40 = 0$

$\therefore R_B = 52kN$ 2点

支点反力 R_C について $R_C \times 1 + 8kN \times (-1) + 4kN/m \times (-5/2m) = 0$

$\therefore R_C - 8 - 10 = 0$ $\therefore R_C = 18kN$] 2点

C 点の支点曲げモーメント M_C について $M_C \times 1 + 8kN \times (5m) + 4kN/m \times (25m^2) = 0$

$\therefore M_C + 40 + 100 = 0$ $\therefore M_C = -140kN \cdot m$] 2点

D 点の曲げモーメント M_D について $M_D \times 2/5 + 24kN \times (-1m) + 4kN/m \times (5m^2) = 0$

$\therefore 2/5 M_D - 24 + 20 = 0$ $\therefore 2/5 M_D = 4$ $\therefore M_D = 10kN \cdot m$] 2点

《別解》

等分布荷重に対して、集中荷重に換算し重心に載荷した場合は、次のようになる。

支点反力 R_A について $R_A \times 1 + 24kN \times (-1/2) + 4kN/m \times 5m \times (1/4) + 4kN/m \times 5m \times (1/4) = 0$

$\therefore R_A - 12 + 5 + 5 = 0$ $\therefore R_A = 2kN$

支点反力 R_B について $R_B \times 1 + 24kN \times (-1/2) + 4kN/m \times 5m \times (-5/4) + 4kN/m \times 5m \times (-3/4) = 0$

$\therefore R_B - 12 - 25 - 15 = 0$ $\therefore R_B = 52kN$

支点反力 R_C について $R_C \times 1 + 8kN \times (-1) + 4kN/m \times 5m \times (-1/2) = 0$

$\therefore R_C - 8 - 10 = 0$ $\therefore R_C = 18kN$

C 点の支点曲げモーメント M_C について $M_C \times 1 + 8kN \times (5m) + 4kN/m \times 5m \times (5m) = 0$

$\therefore M_C + 40 + 100 = 0$ $\therefore M_C = -140kN \cdot m$

D 点の曲げモーメント M_D について

$M_D \times 2/5 + 24kN \times (-1m) + 4kN/m \times 5m \times (1/2m) + 4kN/m \times 5m \times (1/2m) = 0$

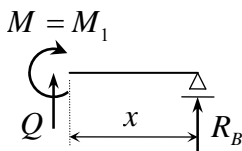
$\therefore 2/5 M_D - 24 + 10 + 10 = 0$ $\therefore 2/5 M_D = 4$ $\therefore M_D = 10kN \cdot m$

【3】

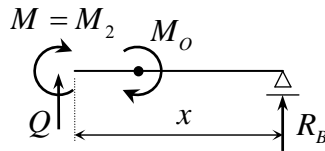
不静定力を R_B とすると、支点 B からの距離 x の点の曲げモーメント M は、次のようになる。

$0 \leq x \leq \frac{1}{3}\ell$ のとき、

$\frac{1}{3}\ell \leq x \leq \ell$ のとき、



$M_1 = R_B x$



$M_2 = R_B x - M_0$

このとき、はりに蓄えられるひずみエネルギー U は、次のようになる。

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{3}\ell} \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} \frac{M^2}{EI} dx$$

$$2EI \cdot U = \int_0^{\frac{1}{3}\ell} (M_1)^2 dx + \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} (M_2)^2 dx = \int_0^{\frac{1}{3}\ell} (R_B x)^2 dx + \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} (R_B x - M_0)^2 dx$$

$$= R_B^2 \int_0^{\frac{1}{3}\ell} x^2 dx + R_B^2 \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} x^2 dx - 2R_B M_0 \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} x dx + M_0^2 \int_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} dx$$

$$= R_B^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{3}\ell} - 2R_B M_0 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} + M_0^2 \left[x \right]_{\frac{1}{3}\ell}^{\ell} = R_B^2 \frac{\ell^3}{3} - R_B M_0 \left(\ell^2 - \frac{\ell^2}{9} \right) + M_0^2 \frac{2}{3} \ell$$
] 10点

$$= \frac{\ell^3}{3} R_B^2 - \frac{8}{9} \ell^2 M_0 R_B + \frac{2}{3} \ell M_0^2$$

ここで、「最小仕事の原理」から $\frac{\partial U}{\partial R_B} = 0$ だから、 $2EI \cdot \frac{\partial U}{\partial R_B} = 0$ より R_B を求めると、次のようになる。

$$2EI \cdot \frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{2}{3} \ell^3 R_B - \frac{8}{9} \ell^2 M_o = 0 \quad \therefore \frac{2}{3} \ell^3 R_B - \frac{8}{9} \ell^2 M_o = 0$$

$$\therefore R_B = \frac{8}{9} \ell^2 M_o \cdot \frac{3}{2\ell^3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_o}{\ell} \quad \text{すなわち、} \boxed{R_B = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_o}{\ell}} \quad \text{5点}$$

《別解》

はりに蓄えられるひずみエネルギー U を計算する際に、 R_B での偏微分を先に行うと、次のようになる。

$$2EI \cdot U = \int_0^{\frac{\ell}{3}} (R_B x)^2 dx + \int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} (R_B x - M_o)^2 dx$$

$$2EI \cdot \frac{\partial U}{\partial R_B} = 2R_B \int_0^{\frac{\ell}{3}} x^2 dx + 2 \int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} x (R_B x - M_o) dx = 2R_B \int_0^{\frac{\ell}{3}} x^2 dx + 2R_B \int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} x^2 dx - 2M_o \int_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} x dx$$

$$= 2R_B \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\ell}{3}} + 2R_B \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{\ell}{3}}^{\ell} - 2M_o \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{\ell}{3}}^{\ell}$$

$$= 2R_B \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\ell} - M_o \left(\ell^2 - \frac{\ell^2}{9} \right) = \frac{2}{3} \ell^3 R_B - \frac{8}{9} \ell^2 M_o = 0$$

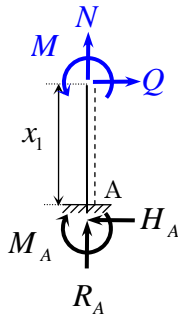
$$\therefore \boxed{R_B = \frac{8}{9} \ell^2 M_o \cdot \frac{3}{2\ell^3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_o}{\ell}}$$

【4】

支点反力を求めると、 $R_A = 0$ ， $H_A = -P$ ， $M_A = \frac{1}{2} P\ell$

次に、下図のように、A～B間、B～C間、C～D間に分けて断面力を求める。

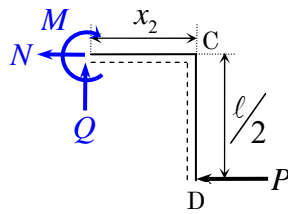
A～B間について、 B～C間について、 C～D間について、



$$N = -R_A = 0$$

$$Q = H_A = -P$$

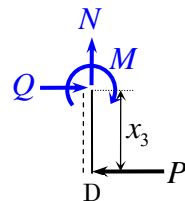
$$M = H_A \cdot x_1 + M_A = -P \cdot x_1 + \frac{1}{2} P\ell$$



$$N = -P$$

$$Q = 0$$

$$M = -\frac{1}{2} P\ell$$

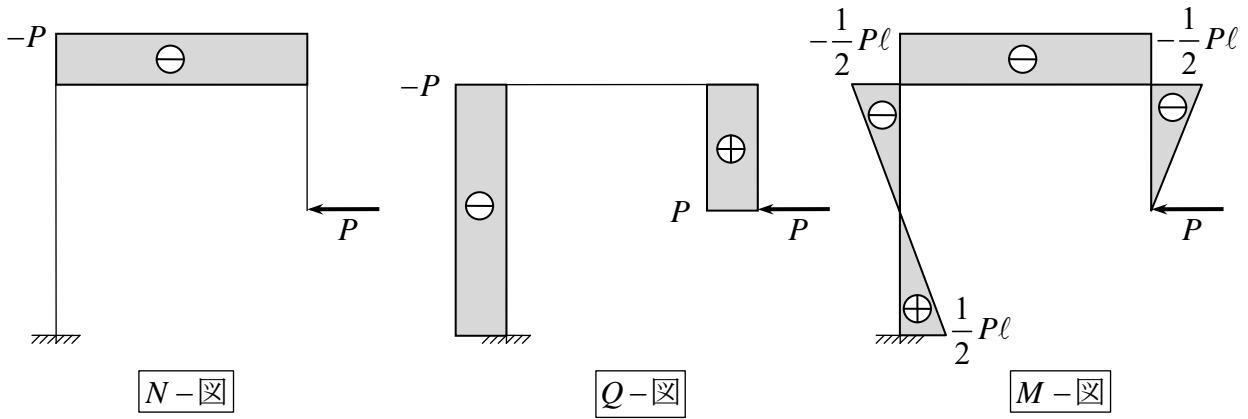


$$N = 0$$

$$Q = P$$

$$M = -P \cdot x_3$$

これらを図示すると、断面力図は、下図のようになる。



」 2 点

」 3 点」 計 5 点

この静定ラーメンのひずみエネルギー U を求めると、次のようになる。

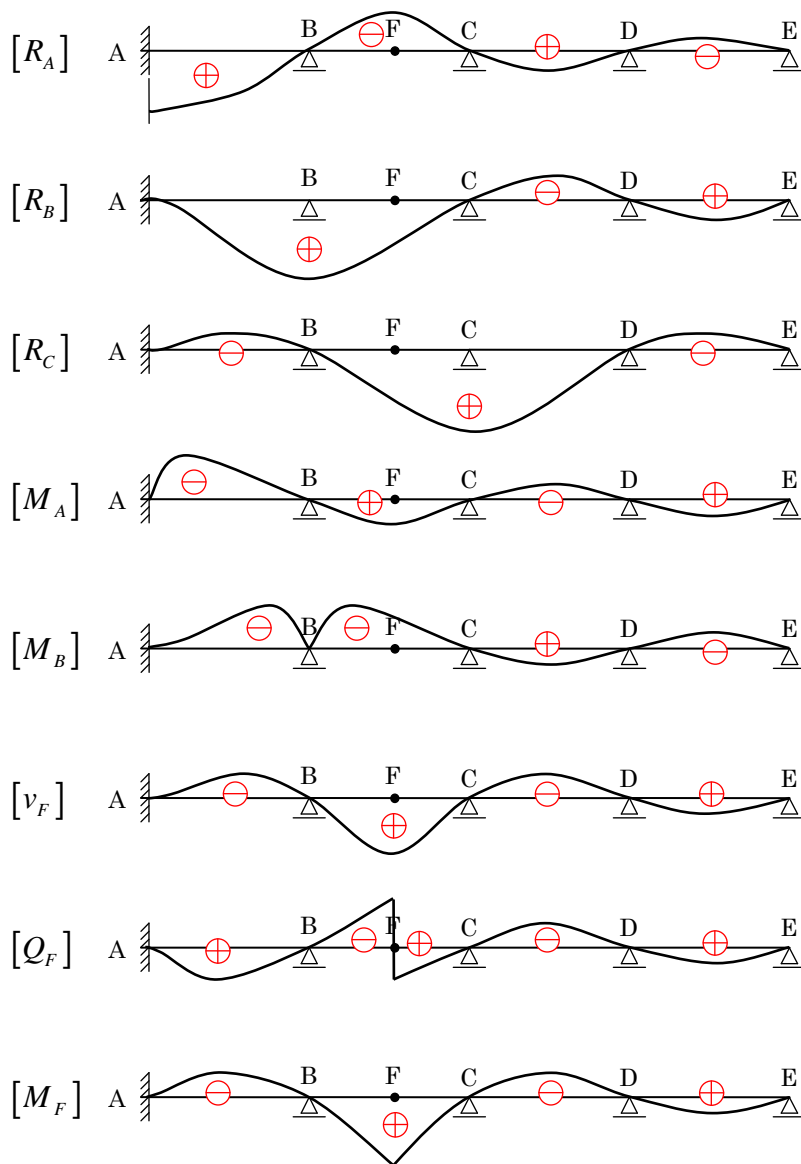
$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx \\
 &= \frac{1}{2EA} \cdot \int_0^\ell (-P)^2 dx + \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^\ell \left(\frac{1}{2} P\ell - Px \right)^2 dx \\
 &\quad + \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^\ell \left(-\frac{1}{2} P\ell \right)^2 dx + \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\ell} (-Px)^2 dx \\
 &= \frac{P^2\ell}{2EA} + \frac{P^2}{2EI} \cdot \int_0^\ell \left(\frac{1}{2}\ell - x \right)^2 dx + \frac{P^2}{2EI} \cdot \int_0^\ell \left(-\frac{1}{2}\ell \right)^2 dx + \frac{P^2}{2EI} \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\ell} (x)^2 dx \\
 &= \frac{P^2\ell}{2EA} + \frac{P^2}{2EI} \cdot \left[-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\ell - x \right)^3 \right]_0^\ell + \frac{P^2}{2EI} \cdot \frac{\ell^3}{4} + \frac{P^2}{2EI} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}\ell} \\
 &= \frac{P^2\ell}{2EA} + \frac{P^2}{2EI} \cdot \left(\frac{\ell^3}{24} + \frac{\ell^3}{24} \right) + \frac{P^2}{2EI} \cdot \frac{\ell^3}{4} + \frac{P^2}{2EI} \cdot \frac{\ell^3}{24} \\
 &= \frac{P^2\ell}{2EA} + \frac{P^2\ell^3}{2EI} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{P^2\ell}{2EA} + \frac{3}{8} \cdot \frac{P^2\ell^3}{2EI}
 \end{aligned}$$

」 5 点

「カステリアーノの第 2 定理」を適用すると、D 点の水平方向変位 u_D は、次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{P^2\ell}{2EA} + \frac{3}{8} \cdot \frac{P^2\ell^3}{2EI} \right) = \frac{P\ell}{EA} + \frac{3}{8} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} = u_D \quad \therefore u_D = \frac{P\ell}{EA} + \frac{3}{8} \cdot \frac{P\ell^3}{EI} \quad \text{」 5 点}$$

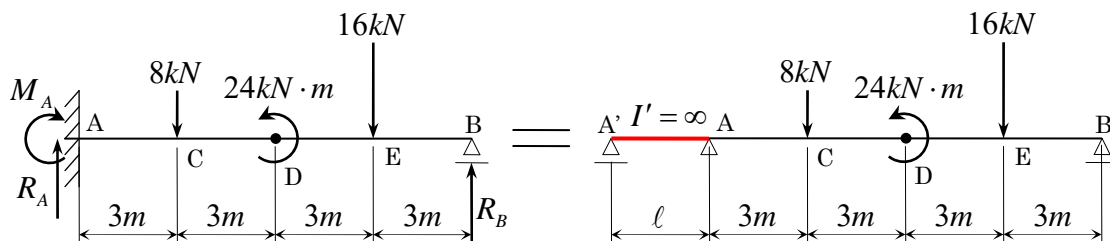
【5】



」各2点×8=16点

【6】

問題のはりの固定端部は、下図のように、長さ ℓ 、断面2次モーメント $I' = \infty$ のはりが付加されたと考えることができる。



$A' \sim A \sim B$ 間に「3連モーメントの定理」を適用すると、次のようになる。

$$\frac{\ell}{I'} M'_A + 2 \left(\frac{\ell}{I'} + \frac{12m}{I} \right) M_A + \frac{12m}{I} M_B = -6 \left(\frac{\bar{A}_0}{I'} + \frac{\bar{B}_0}{I} \right)$$

ここで、荷重項の表より、

左側の支間： $\bar{A}_0 = 0$ （荷重が載荷されていないから）

$$\text{右側の支間} : \overline{B}_0 = (\overline{B}_0)_1 + (\overline{B}_0)_2 + (\overline{B}_0)_3 = 63 + 12 + 90 = 165 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$(\overline{B}_0)_1 = \frac{Pl^2}{6} \cdot \left\{ \frac{b}{l} - \left(\frac{b}{l} \right)^3 \right\} = \frac{8 \text{ kN} \cdot (12 \text{ m})^2}{6} \cdot \left\{ \frac{9 \text{ m}}{12 \text{ m}} - \left(\frac{9 \text{ m}}{12 \text{ m}} \right)^3 \right\} = 192 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left\{ 1 - \frac{9}{16} \right\} = 144 \cdot \frac{7}{16} = 63 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$(\overline{B}_0)_2 = -M \cdot \frac{l}{6} \cdot \left\{ 1 - 3 \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right\} = -(-24 \text{ kN} \cdot \text{m}) \cdot \frac{12 \text{ m}}{6} \cdot \left\{ 1 - 3 \left(\frac{6 \text{ m}}{12 \text{ m}} \right)^2 \right\} = 48 \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{4} \right\} = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$(\overline{B}_0)_3 = \frac{Pl^2}{6} \cdot \left\{ \frac{b}{l} - \left(\frac{b}{l} \right)^3 \right\} = \frac{16 \text{ kN} \cdot (12 \text{ m})^2}{6} \cdot \left\{ \frac{3 \text{ m}}{12 \text{ m}} - \left(\frac{3 \text{ m}}{12 \text{ m}} \right)^3 \right\} = 384 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{16} \right\} = 96 \cdot \frac{15}{16} = 90 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

となり、 $I' = \infty$, $M'_A = M_B = 0$ だから、 $\frac{1}{I}$ を上記の式から消去すると、 $4M_A = -\overline{B}_0$

$$4M_A = -\overline{B}_0 = -165 \quad \therefore M_A = -\frac{165}{4} = -41.25 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{] 8 点}$$

問題のほりに対して、剛体の釣合条件を適用すると、

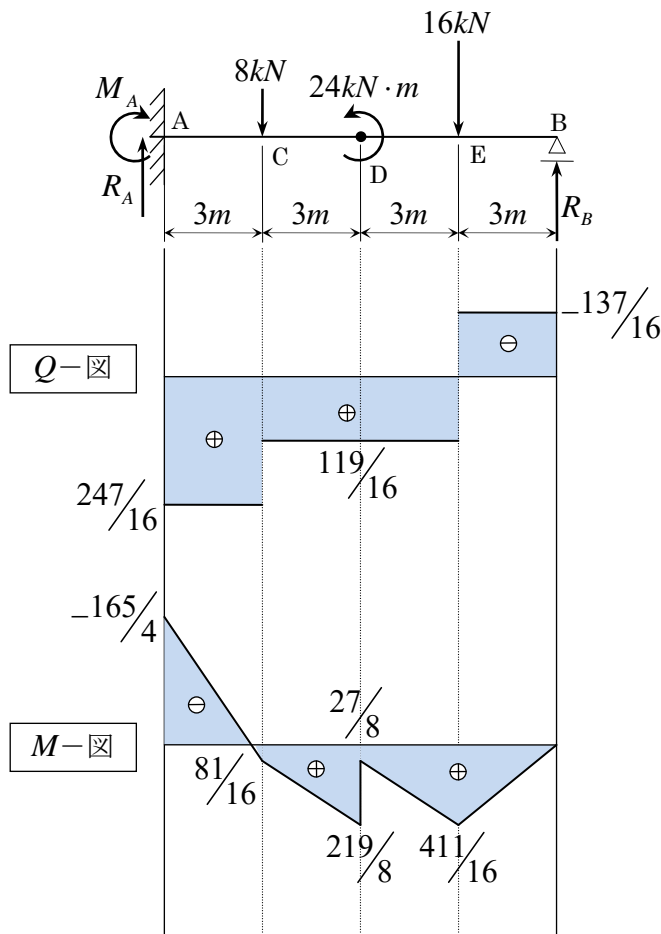
鉛直方向の力の釣合から、 $R_A + R_B = 8 + 16 = 24 \text{ kN}$

A 点回りのモーメントの釣合から、 $R_B \cdot 12 \text{ m} + 24 \text{ kN} \cdot \text{m} = M_A + 8 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} + 16 \text{ kN} \cdot 9 \text{ m}$

$$\therefore 12R_B = -\frac{165}{4} + 24 + 144 - 24 = \frac{411}{4} \quad \therefore R_B = \frac{137}{16} \text{ kN} \quad \therefore R_A = 24 - \frac{137}{16} = \frac{247}{16} \text{ kN}$$

よって、 $R_A = \frac{247}{16} = 15.4375 \text{ kN}$, $R_B = \frac{137}{16} = 8.5625 \text{ kN}$] 各 4 点 $\times 2 = 8$ 点

これらより、断面力図を図示すると、下図のようになる。



] 各 4 点 $\times 2 = 8$ 点