『応用土木振動学』小テスト

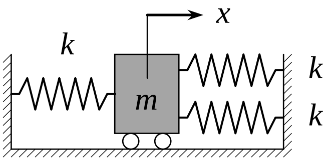
学籍番号	氏　　　名	評 点

【問題】

右下図に示すように、摩擦がない床に置かれた質量 m の物体が、バネ定数 k のバネ 3 本で壁に固定されている。この振動系に関して、以下の設問に答えよ。

(1) 下図のように x 座標を考え、この質量 m の物体の運動方程式を表せ。
ただし、質量 m の物体は〝質点〟と考え、バネの重さは無視するものとする。
また、x 座標はこの振動系の平衡状態を原点とする。

(2) この振動系の固有円振動数 ω を求めよ。また、固有周期 T, 固有周波数 f を求めよ。



(3) 初期条件として、時刻 $t=0$ で、$x=0$, $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ が与えられるとき、(1)で求めた運動方程式を解け。

【解答】

【解答】

(1) ダランベールの原理に基づいて、この振動系の運動方程式を求める。

質量 m の物体が、負の方向に x だけ変位した状態を考える。

このとき、物体に作用するバネ力は、$kx+kx+kx=3kx$ と表される。

また、物体に作用する慣性力は、$-m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-m\ddot{x}$ と表される。

よって、この振動系の運動方程式は、次のように表される。

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}=kx+kx+kx=3kx \qquad \therefore \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+3kx=0} \text{ または、} \boxed{m\ddot{x}+3kx=0}$$

(2) (1)で求めた運動方程式において、$\omega^2=\dfrac{3k}{m}$ とすると、この振動系の固有円振動数 ω, 固有周期 T, 固有周波数 f は、$\omega=2\pi f=\dfrac{2\pi}{T}$ の関係から、次のようになる。

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{3k}{m}}},\quad \boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3k}{m}}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}},\quad \boxed{f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{m}}}$$

(3) $\omega^2=\dfrac{3k}{m}$ とおくと、(1)で求めた運動方程式は、$\ddot{x}+\omega^2x=0$ と表され、その一般解は次のように表される。

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

ここで、初期条件 $t=0$ で $x=0$ より、$A=0$ であるから、$x=B\sin\omega t$

これを時間で微分すると、$\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}=\omega B\cos\omega t$ となり、初期条件 $t=0$ で $\dot{x}=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ より、

$$\omega B=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore B=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{m}{3k}}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって、$\boxed{x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{\dfrac{3k}{m}}t}$

『応用土木振動学』小テスト

学籍番号	氏　　　名	評 点

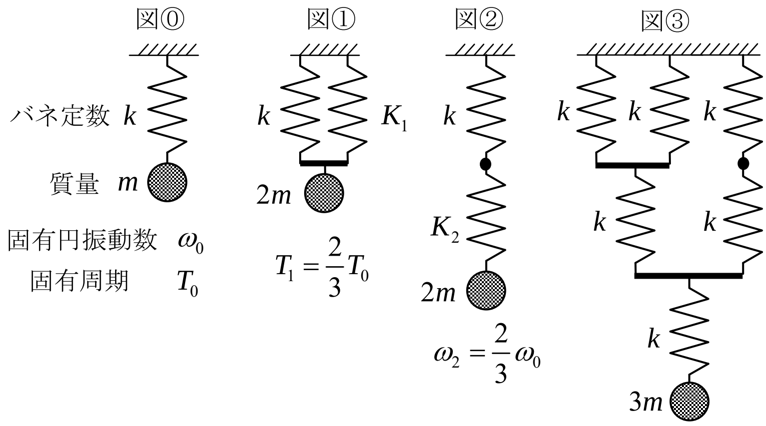
【問題】下図は、すべてバネー質量系の１自由度振動を表している。

いま、図⓪の固有円振動数をω_0，固有周期をT_0とし、図①,②,③それぞれの固有円振動数を$\omega_1, \omega_2, \omega_3$、固有周期を$T_1, T_2, T_3$とするとき、以下の設問に答えよ。

(1) 図①において、固有周期T_1が$T_1 = \frac{2}{3}T_0$となるバネ定数K_1を求めよ。

(2) 図②において、固有円振動数ω_2が$\omega_2 = \frac{2}{3}\omega_0$となるバネ定数$K_2$を求めよ。

(3) 図③において、固有円振動数ω_3を$\omega_3 = \mu \times \omega_0$の形で求めよ。



【解答】

【解答】

図(0) の固有振動数ω_0と固有周期T_0は、$\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$と$T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$と表される。

(1) 図①のバネは並列であるから、その合成バネ定数Kは、$K=k+K_1$となる。したがって、固有振動数ω_1は、

$\omega_1=\sqrt{\dfrac{K}{2m}}=\sqrt{\dfrac{k+K_1}{2m}}$となり、固有周期$T_1$は、$T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{K}}=2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k+K_1}}$となる。

ここで、$T_1=\dfrac{2}{3}T_0$だから、$\sqrt{\dfrac{2m}{k+K_1}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{m}{k}}\quad\therefore\dfrac{2m}{k+K_1}=\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{m}{k}\quad\therefore 2(k+K_1)=9k\quad\therefore\boxed{K_1=\dfrac{7}{2}k}$

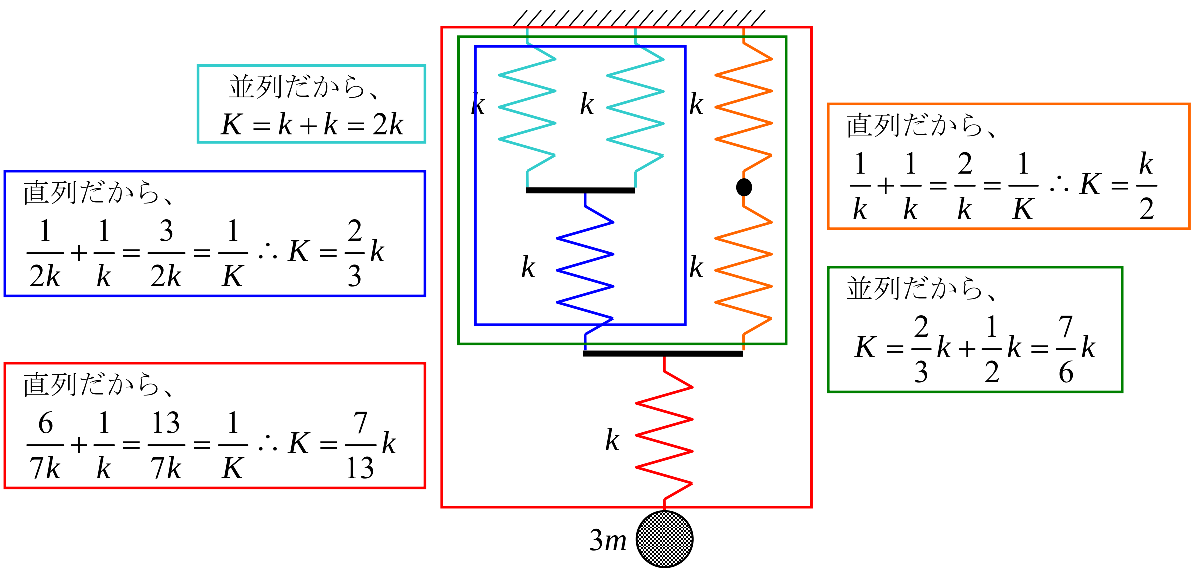
(2) 図② のバネは直列であるから、その合成バネ定数Kは、$\dfrac{1}{K}=\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{K_2}=\dfrac{k+K_2}{k\cdot K_2}$即ち、$K=\dfrac{k\cdot K_2}{k+K_2}$となる。したがって、固有振動数$\omega_2$は、$\omega_2=\sqrt{\dfrac{K}{2m}}=\sqrt{\dfrac{k\cdot K_2}{2m(k+K_2)}}$となる。

ここで、$\omega_2=\dfrac{2}{3}\omega_0$だから、$\sqrt{\dfrac{k\cdot K_2}{2m(k+K_2)}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\quad\therefore\dfrac{K_2}{2(k+K_2)}=\dfrac{4}{9}\quad\therefore 8(k+K_2)=9K_2\quad\therefore\boxed{K_2=8k}$

(3) 図③の最終的な合成バネ定数Kは、$K=\dfrac{7}{13}k$となる。

固有振動数ω_3は、$\omega_3=\sqrt{\dfrac{\frac{7}{13}k}{3m}}=\sqrt{\dfrac{7}{39}}\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{7}{39}}\times\omega_0=\dfrac{\sqrt{273}}{39}\times\omega_0=0.423659272\cdots\times\omega_0$となる。

したがって、$\boxed{\omega_3=\sqrt{\dfrac{7}{39}}\times\omega_0=\dfrac{\sqrt{273}}{39}\times\omega_0\cong 0.4237\times\omega_0}$



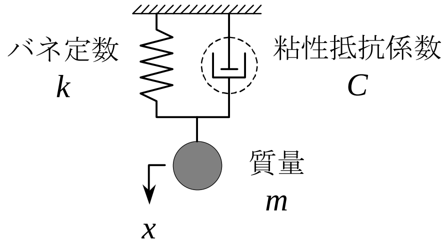
『応用土木振動学』小テスト

学籍番号	氏　　　名	評 点

【問題】右図に示すような〝Kelvin Model〟として表される 1 自由度系の減衰自由振動の運動方程式は、$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+C\dfrac{dx}{dt}+kx=0$ と表される。

いま、$m=10\left(Kg\right), C=30\left(N\cdot s/m\right), k=30\left(N/m\right)$ とする。

また、初期条件として、$t=0$ のとき、$x=\sqrt{3}$ かつ $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ が与えられている。このとき、$x=f\left(t\right)$ の式を求めよ。



【解答】

【解答】

減衰自由振動の運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+C\dfrac{dx}{dt}+kx=0$ に $m=10\,(Kg)\,,C=30\,(N\cdot s/m)\,,k=30\,(N/m)$ を代入すると、$10\dfrac{d^2x}{dt^2}+30\dfrac{dx}{dt}+30x=0$ となり、これを加速度項で正規化すると、$\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}+3x=0$ となる。

いま、$x=e^{\lambda t}$ とおくと、$\dfrac{dx}{dt}=\lambda e^{\lambda t}$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\lambda^2 e^{\lambda t}$ であるから、$\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}+3x=0$ は、$(\lambda^2+3\lambda+3)e^{\lambda t}=0$ となる。ここで、$e^{\lambda t}\neq 0$ であるから、$\lambda^2+3\lambda+3=0$ $\therefore \boxed{\lambda=-\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$」2 点

よって、一般解は、$\boxed{x=e^{-\frac{3}{2}t}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)}$」3 点と表される。

初期条件より、$t=0$ のとき、$x=\sqrt{3}$ だから、$\boxed{C_1=\sqrt{3}}$ $\therefore x=e^{-\frac{3}{2}t}\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

また、$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t}\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)+e^{-\frac{3}{2}t}\left\{-\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right\}$ で、

$t=0$ のとき、$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ だから、$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}C_2=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}C_2=3\sqrt{3}$ $\therefore \boxed{C_2=6}$

したがって、$\boxed{x=e^{-\frac{3}{2}t}\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+6\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)}$」5 点

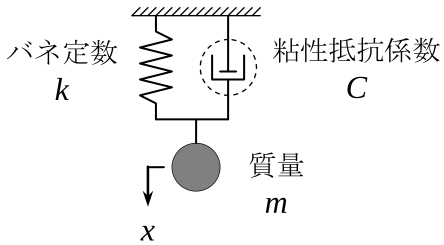
なお、２つの関数の積の微分は、$\dfrac{d}{dt}\{g(t)\times h(t)\}=\dfrac{d}{dt}\{g(t)\}\times h(t)+g(t)\times\dfrac{d}{dt}\{h(t)\}$ と表される。

学籍番号	氏　　名	評 点

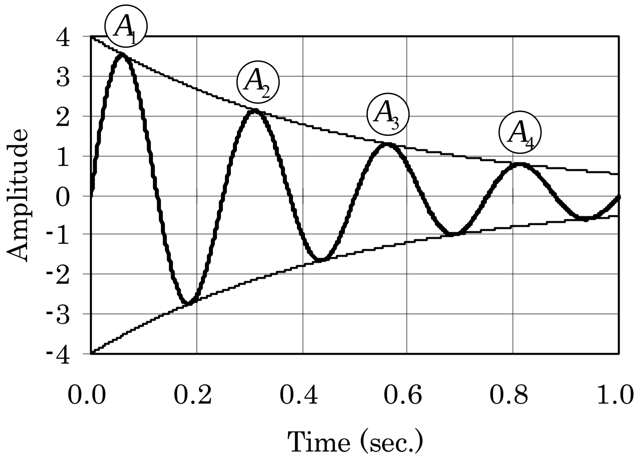
『応用土木振動学』小テスト

【問題】

右図に示すような〝Kelvin Model〟として表される系の減衰自由振動を観測したところ、下図(左)のような振動の時系列データが得られた。このとき、振動の時系列データから得られる固有周期 T, 固有周波数 f, 固有円振動数 ω はいくらか？



また、振動の〝山〟の位置 A_1 ～ A_4 の振幅を調べたところ、下表(右)のようなデータが得られた。このとき、この減衰自由振動の減衰定数 h はいくらか？



位置	振幅
A_1	3.516760
A_2	2.123094
A_3	1.284308
A_4	0.775346

【解答】

【解答】

1 秒間に 4 波長が観測されるので、固有周波数 $\boxed{f = 4\,(Hz)}$ である。

従って、固有円振動数 $\boxed{\omega = 2\pi f = 8\pi \cong 25.1327\,(radian/s)}$, 固有周期 $\boxed{T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{4} = 0.25\,(秒)}$ である。

〝Kelvin Model〟として表される系の減衰自由振動は、次のように表される。

$$x = \exp(-\omega_0 ht) \cdot C\cos(\omega_1 t + \delta) \qquad ここに、\omega_0^2 = \frac{k}{m},\ \omega_1 = \omega_0\sqrt{1-h^2}\ である。$$

このとき、$t = t_n$ のとき、振動波形の n 番目の〝山〟があると考えると、

$\omega_1 t_n + \delta = 2n\pi$ すなわち、$t_n = \dfrac{2n\pi - \delta}{\omega_1}$ であるから、その振幅は次のようになる。

$$x_n = \exp(-\omega_0 ht_n) \cdot C\cos(\omega_1 t_n + \delta) = C \cdot \exp\left(-\omega_0 h \frac{2n\pi - \delta}{\omega_1}\right)$$

同様に、$t = t_{n+1}$ のとき、振動波形の $n+1$ 番目の〝山〟があると考えると、その振幅は次のようになる。

$$x_{n+1} = C \cdot \exp\left(-\omega_0 h \frac{2(n+1)\pi - \delta}{\omega_1}\right)$$

そこで、振幅の比をとると、次のようになる。

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{C \cdot \exp\left(-\omega_0 h \dfrac{2n\pi - \delta}{\omega_1}\right)}{C \cdot \exp\left(-\omega_0 h \dfrac{2(n+1)\pi - \delta}{\omega_1}\right)} = \exp\left\{-\omega_0 h \frac{2n\pi - \delta}{\omega_1} + \omega_0 h \frac{2(n+1)\pi - \delta}{\omega_1}\right\}$$

$$= \exp\left(\omega_0 h \frac{2\pi}{\omega_1}\right) = \exp\left(2\pi h \frac{\omega_0}{\omega_1}\right)$$

ここで、$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-h^2}$ であるから、$\dfrac{\omega_0}{\omega_1} = \dfrac{1}{\sqrt{1-h^2}}$ の関係を用いると、次のようになる。

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \exp\left(2\pi h \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) = \exp\left(2\pi \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\right)$$

両辺の自然対数をとり、$h \ll 1$ と考えると、次のようになる。

$$\log_e\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}} \cong 2\pi h \qquad \therefore h = \frac{1}{2\pi}\log_e\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$$

これを、振動の〝山〟の位置 $A_1 \sim A_4$ の振幅の表に当てはめて計算すると、

$$\frac{A_1}{A_2}:\ h = \frac{1}{2\pi}\log_e\left(\frac{3.516760}{2.123094}\right) \cong 0.08032$$

$$\frac{A_2}{A_3}:\ h = \frac{1}{2\pi}\log_e\left(\frac{2.123094}{1.284308}\right) \cong 0.08000 \qquad \therefore \boxed{h \cong 0.08}$$

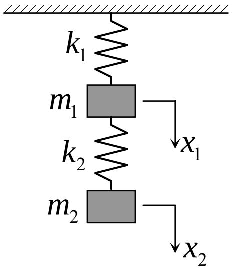
$$\frac{A_3}{A_4}:\ h = \frac{1}{2\pi}\log_e\left(\frac{1.284308}{0.775346}\right) \cong 0.08032$$

学籍番号	氏　　　名	評 点

『応用土木振動学』小テスト

【問題】右図に示すように、集中質量m_1, m_2が、バネ定数k_1, k_2のバネ 2 本で壁から吊るされて、平衡状態にある。このとき、集中質量m_1, m_2の下向きの変位x_1, x_2の原点とする。

この集中質量m_1, m_2の変位x_1, x_2に関する 2 自由度系の自由振動について、以下の設問に答えよ。



(1) この系の運動エネルギーKとひずみエネルギーVを表せ。

(2) 減衰のない自由振動に関するラグランジュの運動方程式を用いて、この系の連立運動方程式を求めよ。

(3) $x_1 = X_1 e^{i\omega t}$, $x_2 = X_2 e^{i\omega t}$とおいて、この系の振動数方程式を求めよ。

(4) ここで、$m_1 = 10\,(kg), m_2 = 5\,(kg), k_1 = 100\,(N/m), k_2 = 30\,(N/m)$とするとき、1 次と 2 次の固有円振動数 $\omega_1, \omega_2\ (\omega_1 < \omega_2)$を求めよ。

(5) さらに、1 次の固有振動モード$\dfrac{X_{21}}{X_{11}}$と 2 次の固有振動モード$\dfrac{X_{22}}{X_{12}}$を求めよ。

【解答】

【解答】

(1) $\boxed{K=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2\right)^2}$ ， $\boxed{V=\frac{1}{2}k_1\left(x_1\right)^2+\frac{1}{2}k_2\left(x_1-x_2\right)^2}$

(2) ラグランジュ関数 $L=K-V=\left\{\frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2\right)^2\right\}-\left\{\frac{1}{2}k_1\left(x_1\right)^2+\frac{1}{2}k_2\left(x_1-x_2\right)^2\right\}$ と表され、減衰のない自由振動に関する一般座標 q_s のラグランジュの運動方程式は以下のように示されるので、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,2)$$

一般座標を $q_1 \Rightarrow x_1$， $q_2 \Rightarrow x_2$ とすると、次のように連立運動方程式が得られる。

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0$ より、$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)=\frac{d}{dt}\left\{m_1\left(\dot{x}_1\right)\right\}=m_1\left(\ddot{x}_1\right)$， $\frac{\partial L}{\partial x_1}=-\left\{k_1x_1+k_2\left(x_1-x_2\right)\right\}$

$\therefore m_1\left(\ddot{x}_1\right)+\left\{k_1x_1+k_2\left(x_1-x_2\right)\right\}=0 \quad \therefore \boxed{m_1\left(\ddot{x}_1\right)+\left(k_1+k_2\right)x_1-k_2x_2=0}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=0$ より、$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)=\frac{d}{dt}\left\{m_2\left(\dot{x}_2\right)\right\}=m_2\left(\ddot{x}_2\right)$， $\frac{\partial L}{\partial x_2}=-\left\{-k_2\left(x_1-x_2\right)\right\}$

$\therefore m_2\left(\ddot{x}_2\right)-\left\{k_2\left(x_1-x_2\right)\right\}=0 \qquad \therefore \boxed{m_2\left(\ddot{x}_2\right)-k_2x_1+k_2x_2=0}$

よって、連立運動方程式は次のようになる。

$$\boxed{\begin{cases} m_1\left(\ddot{x}_1\right)+\left(k_1+k_2\right)x_1-k_2x_2=0 \\ m_2\left(\ddot{x}_2\right)-k_2x_1+k_2x_2=0 \end{cases}} \ ,\ \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(3) $x_1=X_1e^{i\omega t}$， $x_2=X_2e^{i\omega t}$ とおいて、X_1, X_2 に関する連立方程式を求めると、次のようになる。

$$\begin{cases} \left[\left(k_1+k_2\right)-\omega^2\cdot m_1\right]\cdot X_1-k_2\cdot X_2=0 \\ -k_2\cdot X_1+\left(k_2-\omega^2\cdot m_2\right)\cdot X_2=0 \end{cases}$$ よって、振動数方程式は、$$\boxed{\begin{vmatrix} \left(k_1+k_2\right)-\omega^2\cdot m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-\omega^2\cdot m_2 \end{vmatrix}=0}$$

すなわち、

$$\left\{\left(k_1+k_2\right)-\omega^2\cdot m_1\right\}\cdot\left(k_2-\omega^2\cdot m_2\right)-\left(-k_2\right)\cdot\left(-k_2\right)=0$$

$$\therefore m_1\cdot m_2\cdot\omega^4-\left\{m_1\cdot k_2+m_2\cdot\left(k_1+k_2\right)\right\}\cdot\omega^2+k_2\cdot\left(k_1+k_2\right)-k_2^2=0$$

$$\therefore \boxed{m_1\cdot m_2\cdot\omega^4-\left\{m_1\cdot k_2+m_2\cdot\left(k_1+k_2\right)\right\}\cdot\omega^2+k_1\cdot k_2=0}$$

(4) $m_1=10\left(kg\right), m_2=5\left(kg\right), k_1=100\left(N/m\right), k_2=30\left(N/m\right)$ を(3)式に代入し、1 次，2 次の固有円振動数 $\omega_1, \omega_2\left(\omega_1<\omega_2\right)$ を求めると、次のようになる。

$$50\omega^4-\left(10\cdot 30+5\cdot 130\right)\omega^2+3000=0 \quad \therefore 50\omega^4-950\omega^2+3000=0 \qquad \therefore \omega^4-19\omega^2+60=0$$

$$\therefore \omega^2=\frac{19\mp\sqrt{19^2-240}}{2}=\frac{19\mp\sqrt{121}}{2}=\frac{19\mp 11}{2}=\begin{cases} 4 \\ 15 \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\omega_1=\sqrt{4}=2}, \quad \boxed{\omega_2=\sqrt{15}=3.872983346\cdots\cong 3.873}$$

(5) 固有振動モードは、$\frac{X_2}{X_1}=\frac{k_2}{k_2-\omega^2\cdot m_2}$ と表され、$m_2=5\left(kg\right), k_2=30\left(N/m\right)$ だから、$\frac{X_2}{X_1}=\frac{30}{30-5\omega^2}$

よって、1 次の固有振動モードは、$\frac{X_{21}}{X_{11}}=\frac{k_2}{k_2-\omega_1^2\cdot m_2}=\frac{30}{30-4\cdot 5}=\frac{30}{10}=3$

2 次の固有振動モードは、$\frac{X_{22}}{X_{12}}=\frac{k_2}{k_2-\omega_2^2\cdot m_2}=\frac{30}{30-15\cdot 5}=-\frac{30}{45}=-\frac{2}{3}$

まとめると、

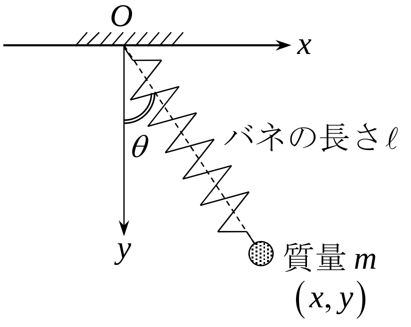
1 次モード $\boxed{\frac{X_{21}}{X_{11}}=3}$， 2 次モード $\boxed{\frac{X_{22}}{X_{12}}=-\frac{2}{3}=-0.666666\cdots\cong -0.667}$

学籍番号	氏　　　名	評 点

『応用土木振動学』小テスト

【問題】

右図に示すように、集中質量mが長さℓ（自然長ℓ_0,バネ定数k）のバネにぶら下げられた〝バネふりこ〟がある。この 2 自由度系の振動に関して、以下の設問に答えよ。



(1) $O-xy$座標系において、集中質量mの座標を(x,y)とするとき、図に示すようなバネの角度θと長さℓを用いて$(\dot{x},\dot{y})$を表せ。

(2) この系の運動エネルギーKとポテンシャルエネルギー（位置エネルギーとひずみエネルギーの和）Vを表せ。

ただし、$K=\dfrac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$であり、重力加速度は$g$とする。また、位置エネルギーは、$y=0$での位置エネルギーを基準とする。

(3) $L=K-V$とおくとき､減衰のない自由振動に関する一般座標q_Sのラグランジュの運動方程式$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_S}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial q_S}=0\quad(S=1,2)$を用いて、この系の連立運動方程式を求めよ。

なお、時間微分に関しては、下記の公式に注意すること。

合成関数の微分の公式：$y=f\left\{g(x)\right\}$のとき、$g(x)=z$とすると、$\dfrac{dy}{dx}=f'(z)\cdot g'(x)=\dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}$

【解答】

【解答】

(1) (x,y)は、$\begin{cases} x=\ell\sin\theta \\ y=\ell\cos\theta \end{cases}$ と表されるので、$(\dot{x},\dot{y})$は、次のように表される。$\boxed{\begin{cases} \dot{x}=\dot{\ell}\sin\theta+\ell\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}=\dot{\ell}\cos\theta-\ell\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}}$

(2) 運動エネルギーKは、$K=\dfrac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$と表されるので、

$$K=\frac{1}{2}m\left\{\left(\dot{\ell}\sin\theta+\ell\dot{\theta}\cos\theta\right)^2+\left(\dot{\ell}\cos\theta-\ell\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}m\left\{\left(\dot{\ell}^2\sin^2\theta+2\ell\dot{\ell}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+\ell^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta\right)+\left(\dot{\ell}^2\cos^2\theta-2\ell\dot{\ell}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+\ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}m\left\{\dot{\ell}^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)+\ell^2\dot{\theta}^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)\right\}=\frac{1}{2}m\left\{\left(\dot{\ell}\right)^2+\ell^2\left(\dot{\theta}\right)^2\right\}$$

$$\therefore\boxed{K=\frac{1}{2}m\left\{\left(\dot{\ell}\right)^2+\ell^2\left(\dot{\theta}\right)^2\right\}}$$

ポテンシャルエネルギーVは、次のように表される。$\boxed{V=\dfrac{1}{2}k\left(\ell-\ell_0\right)^2-mg\cdot\ell\cos\theta}$

(3) ラグランジュ関数は、次のように表される。

$$L=K-V=\frac{1}{2}m\left\{\left(\dot{\ell}\right)^2+\ell^2\left(\dot{\theta}\right)^2\right\}-\left\{\frac{1}{2}k\left(\ell-\ell_0\right)^2-mg\cdot\ell\cos\theta\right\}$$

減衰のない自由振動に関するラグランジュの運動方程式は以下のように示される。

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\ell}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\ell}=0$ または、$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial\dot{\ell}}\right)-\dfrac{\partial K}{\partial\ell}+\dfrac{\partial V}{\partial\ell}=0$ より、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\ell}}\right)=\frac{d}{dt}\left\{m\dot{\ell}\right\}=m\ddot{\ell}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\ell}=m\ell\left(\dot{\theta}\right)^2-k\left(\ell-\ell_0\right)+mg\cdot\cos\theta$$

$\therefore m\ddot{\ell}-\left\{m\ell\left(\dot{\theta}\right)^2-k\left(\ell-\ell_0\right)+mg\cdot\cos\theta\right\}=0$ $\quad\therefore\boxed{m\ddot{\ell}-m\ell\left(\dot{\theta}\right)^2+k\left(\ell-\ell_0\right)-mg\cdot\cos\theta=0}$

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=0$ または、$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial\dot{\theta}}\right)-\dfrac{\partial K}{\partial\theta}+\dfrac{\partial V}{\partial\theta}=0$ より、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\frac{d}{dt}\left\{m\ell^2\dot{\theta}\right\}=m\ell^2\ddot{\theta}+2m\ell\dot{\ell}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-mg\cdot\ell\sin\theta$$

$\therefore m\ell^2\ddot{\theta}+2m\ell\dot{\ell}\dot{\theta}+mg\cdot\ell\sin\theta=0$ $\quad\therefore\boxed{\ell\ddot{\theta}+2\dot{\ell}\dot{\theta}+g\sin\theta=0}$

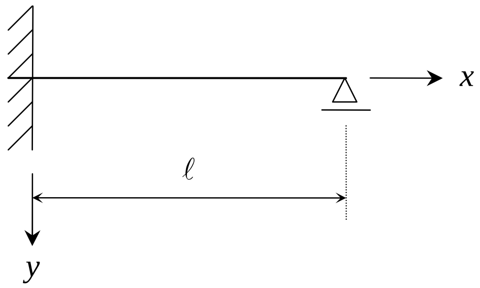
『応用土木振動学』小テスト

学籍番号	氏　　　名	評 点

【問題】

右図に示すような一端固定、他端単純支持ばりの曲げ振動に関する振動数方程式を求めよ。

ただし、単位体積質量 : w, 断面積 : A, 曲げ剛性 : EI は、すべて一定とする。



【解答】

【解答】

固定端でたわみとたわみ角が 0，単純支持端でたわみおよび曲げモーメントが 0 であるから、境界条件は次のようになる。

$$\begin{cases} x=0:X=0, & \dfrac{dX}{dx}=0 \\ x=\ell:X=0, & \dfrac{d^2X}{dx^2}=0 \end{cases}$$

したがって、次の 4 式が得られる。

$$C_1+C_3=0 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

$$C_2+C_4=0 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

$$C_1\cos\lambda\ell+C_2\sin\lambda\ell+C_3\cosh\lambda\ell+C_4\sinh\lambda\ell=0 \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

$$-\lambda^2C_1\cos\lambda\ell-C_2\lambda^2\sin\lambda\ell+C_3\lambda^2\cosh\lambda\ell+C_4\lambda^2\sinh\lambda\ell=0 \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

※式①，②より、$C_3=-C_1$，$C_4=-C_2$ だから、これを式③，④に代入し、$\lambda\neq0$ を使って整理すると、

$$C_1\left(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)+C_2\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots③'$$

$$C_1\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)+C_2\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots④'$$

③'×$\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)$ −④'×$\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)$ を計算すると、

$$\left\{\left(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)\cdot\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)-\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)\cdot\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)\right\}C_1=0$$

ここで、C_1 は任意定数だから、

$$\left(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)\cdot\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)-\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)\cdot\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)=0$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad &\cos\lambda\ell\cdot\sin\lambda\ell+\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell \\ &-\cos\lambda\ell\cdot\sin\lambda\ell+\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell \\ &=2\left(\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell\right)=0 \end{aligned}$$

よって、振動数方程式は次のようになる。

$$\boxed{\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0}$$

※式①，②より、$C_3=-C_1$，$C_4=-C_2$ だから、

$$\begin{aligned} X&=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x+C_3\cosh\lambda x+C_4\sinh\lambda x \\ &=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x-C_1\cosh\lambda x-C_2\sinh\lambda x \\ &=C_1\left(\cos\lambda x-\cosh\lambda x\right)+C_2\left(\sin\lambda x-\sinh\lambda x\right) \end{aligned}$$

また、$\dfrac{d^2X}{dx^2}=\lambda^2C_1\left(-\cos\lambda x-\cosh\lambda x\right)+\lambda^2C_2\left(-\sin\lambda x-\sinh\lambda x\right)$ だから、$x=\ell$ での境界条件より、

$$C_1\left(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)+C_2\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots③$$

$$\lambda^2C_1\left(-\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)+\lambda^2C_2\left(-\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots④$$

ここで、$\lambda\neq0$ だから、$C_1\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)+C_2\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)=0$ ………④'

式③,④'を、マトリックス・ベクトル表示すると、$\begin{pmatrix}\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell & \sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell \\ \cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell & \sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}C_1 \\ C_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix}$

C_1,C_2,C_3,C_4 が有義解をもつ必要十分条件は、$\begin{vmatrix}\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell & \sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell \\ \cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell & \sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\end{vmatrix}=0$ だから、

$$\left(\cos\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\right)\cdot\left(\sin\lambda\ell+\sinh\lambda\ell\right)-\left(\cos\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\right)\cdot\left(\sin\lambda\ell-\sinh\lambda\ell\right)=0$$

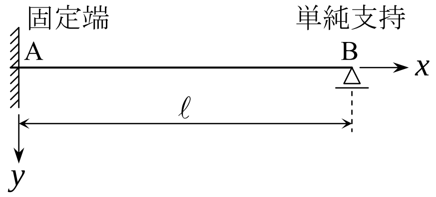
$$\begin{aligned} \therefore\quad &\cos\lambda\ell\cdot\sin\lambda\ell+\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell-\cosh\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell \\ &-\cos\lambda\ell\cdot\sin\lambda\ell+\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell+\cosh\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell \\ &=2\left(\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell\right)=0 \end{aligned}$$

よって、振動数方程式は、$\boxed{\cos\lambda\ell\cdot\sinh\lambda\ell-\sin\lambda\ell\cdot\cosh\lambda\ell=0}$ である。

『応用土木振動学』小テスト

学籍番号	氏　　　名	評 点

【問題】　右図に示すような一端固定・他端単純支持のはりの 1 次固有振動数 ω をレイリーの方法によって次の手順で求めよ。



なお、このはりは一様断面で、その単位体積質量は w, 断面積は A, 曲げ剛性は EI, 長さは ℓ とする。

また、はりの左端（固定端）を原点とし、部材軸方向に x 軸、部材軸直角・鉛直下方向に y 軸を採るはりに関する一般的な座標系を用いて、変位関数として、$y(x)=x^2(x-\ell)$ を仮定する。

(1) 運動エネルギーの最大値 $K_{\max}=\dfrac{1}{2}\omega^2\int_0^\ell wA\cdot y^2(x)\,dx$ を求めよ。

(2) ひずみエネルギーの最大値 $V_{\max}=\dfrac{1}{2}\int_0^\ell \dfrac{M^2}{EI}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^\ell EI\cdot\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx$ を求めよ。

(3) $K_{\max}=V_{\max}$ より、$\omega^2=\dfrac{\int_0^\ell EI\cdot\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^\ell wA\cdot y^2(x)\,dx}$ を用いて、このはりの 1 次固有円振動数 ω を求めよ。

(4) 一端固定・他端単純支持のはりの 1 次固有振動数の厳密解 ω_0 は、

$$\omega_0=\frac{(3.9266023)^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{wA}}$$ で与えられる。

そこで、このレイリーの方法による誤差は何%か。

【解答】

【解答】

変位関数は、$y(x)=x^2(x-\ell)=x^3-\ell x^2$ だから、事前に必要なものを計算しておくと次のようになる。

$$y'(x)=3x^2-2\ell x,\quad y''(x)=6x-2\ell=2(3x-\ell),$$

$$y^2(x)=x^4(x-\ell)^2=x^6-2\ell x^5+\ell^2x^4,\quad y''^2(x)=4(3x-\ell)^2=4\left(9x^2-6\ell x+\ell^2\right)$$

(1) 運動エネルギーの最大値 $K_{\max}=\dfrac{1}{2}\omega^2\int_0^\ell wA\cdot y^2(x)\,dx$ を求める。

$$K_{\max}=\frac{wA}{2}\omega^2\left[\frac{x^7}{7}-\frac{\ell x^6}{3}+\frac{\ell^2x^5}{5}\right]_0^\ell=\frac{wA\ell^7}{2}\omega^2\cdot\frac{15-35+21}{105}=\frac{wA\ell^7}{2}\omega^2\cdot\frac{1}{105}$$

$$\therefore\boxed{K_{\max}=\frac{1}{2}\omega^2wA\ell^7\cdot\frac{1}{105}=\frac{1}{210}\omega^2wA\ell^7}$$

(2) ひずみエネルギーの最大値 $V_{\max}=\dfrac{1}{2}\int_0^\ell\dfrac{M^2}{EI}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^\ell EI\cdot\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx$ を求める。

$$V_{\max}=\frac{EI}{2}\cdot4\left[3x^3-3\ell x^2+\ell^2x\right]_0^\ell=2EI\ell^3(3-3+1)=2EI\ell^3$$

または、

$$V_{\max}=\frac{EI}{2}\cdot4\left[\frac{(3x-\ell)^3}{3\cdot3}\right]_0^\ell=\frac{2EI}{9}\left[(2\ell)^3-(-\ell)^3\right]=\frac{2EI}{9}\left(8\ell^3+\ell^3\right)=\frac{2EI\cdot9\ell^3}{9}=2EI\ell^3$$

$$\therefore\boxed{V_{\max}=\frac{1}{2}EI\ell^3\cdot4=2EI\ell^3}$$

(3) $K_{\max}=V_{\max}$ より、

$$\omega^2=\frac{2EI\ell^3}{\dfrac{wA\ell^7}{2}\cdot\dfrac{1}{105}}=\frac{420}{\ell^4}\cdot\frac{EI}{wA}\qquad\therefore\boxed{\omega=\frac{2\sqrt{105}}{\ell^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{wA}}}$$

(4) 一端固定・他端単純支持のはりの１次固有振動数の厳密解 ω_0 は、

$$\omega_0=\frac{(3.9266023)^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI}{wA}}$$ で与えられる。

厳密解 ω_0 と比較すると、$\boxed{\dfrac{\omega}{\omega_0}=\dfrac{2\sqrt{105}}{(3.9266023)^2}=1.3292\cdots\cong1.33}$　　$\therefore$ $\boxed{\text{誤差 = 約 33\%}}$