『応用土木振動学』小テスト

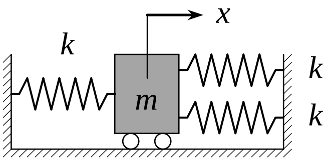
学籍番号	氏　　　名	評 点

【問題】

右下図に示すように、摩擦がない床に置かれた質量 m の物体が、バネ定数 k のバネ 3 本で壁に固定されている。この振動系に関して、以下の設問に答えよ。

(1) 下図のように x 座標を考え、この質量 m の物体の運動方程式を表せ。
ただし、質量 m の物体は〝質点〟と考え、バネの重さは無視するものとする。
また、x 座標はこの振動系の平衡状態を原点とする。

(2) この振動系の固有円振動数 ω を求めよ。また、固有周期 T, 固有周波数 f を求めよ。



(3) 初期条件として、時刻 $t=0$ で、$x=0$, $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ が与えられるとき、(1)で求めた運動方程式を解け。

【解答】

【解答】

(1) ダランベールの原理に基づいて、この振動系の運動方程式を求める。

質量 m の物体が、負の方向に x だけ変位した状態を考える。

このとき、物体に作用するバネ力は、$kx+kx+kx=3kx$ と表される。

また、物体に作用する慣性力は、$-m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-m\ddot{x}$ と表される。

よって、この振動系の運動方程式は、次のように表される。

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}=kx+kx+kx=3kx \qquad \therefore \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+3kx=0} \text{または、} \boxed{m\ddot{x}+3kx=0}$$

(2) (1)で求めた運動方程式において、$\omega^2=\dfrac{3k}{m}$ とすると、この振動系の固有円振動数 ω，固有周期 T，固有周波数 f は、$\omega=2\pi f=\dfrac{2\pi}{T}$ の関係から、次のようになる。

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{3k}{m}}},\quad \boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3k}{m}}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}},\quad \boxed{f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{m}}}$$

(3) $\omega^2=\dfrac{3k}{m}$ とおくと、(1)で求めた運動方程式は、$\ddot{x}+\omega^2x=0$ と表され、その一般解は次のように表される。

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

ここで、初期条件 $t=0$ で $x=0$ より、$A=0$ であるから、$x=B\sin\omega t$

これを時間で微分すると、$\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}=\omega B\cos\omega t$ となり、初期条件 $t=0$ で $\dot{x}=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ より、

$$\omega B=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore B=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{m}{3k}}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって、$\boxed{x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{\dfrac{3k}{m}}t}$